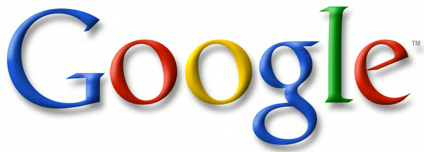

Google



VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN

DER

KONINKLIJKE AKADEMIE

VAN

WETENSCHAPPEN.

Afdeeling **NATUURKUNDE.**

DERDE REEKS.

ACHTSTE DEEL.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1891.

GEDRUKT BIJ DE ROEVER KRÖBER-BAKELS

INHOUD

VAN HET

ACHTSTE DEEL

DER

DERDE REEKS.

PROCESSEN-VERBAAL

DER

GEWONE VERGADERINGEN.

VERSLAGEN.

MEDEDEELINGEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Vrijdag 25 April 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, FRANCHIMONT, VERLOREN, VAN BEMMELEN, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAEHR, STOKVIS, FORSTER, RAUWENHOFF, PLACE, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, MICHAËLIS, VAN DIESEN, MAC GILLAVRY, GRINWIS, PEKELHARING, DE VRIES, KAPTEYN, KAMERLINGH ONNES, MARTIN, LORENTZ, SCHOUTE, KORTEWEG, HUBRECHT, HOOGEWERFF, J. A. C. OUDEMANS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. DU MONCEAU, Bibliothecaris van Z. M. den Koning, 's Gravenhage, 19 April 1890; 2°. Burgemeester en Wethouders der stad Amsterdam, 16 April 1890; 3°. C. P. BURGER JR., waarn. Bibliothecaris van de Bibliotheek der Universiteit van Amsterdam, 12 April 1890; 4°. A. J. VAN PESCH, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 12 April 1890; 5°. de Directeuren van de Nederlandsche Handel-Maatschappij te Amsterdam, 12 April 1890; 6°. G. F. WESTERMAN, Di-

recteur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 12 April 1890; 7°. C. C. DELPRAT, Redacteur van het Nederlandsch Tijdschrift voor Geneeskunde te Amsterdam, 15 April 1890; 8°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 19 April 1890; 9°. A. R. ARNTZENIUS, Griffier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 12 April 1890; 10°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 12 April 1890; 11°. R. MELVIL VAN LYNDEN, Secretaris van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te Utrecht, 15 April 1890; 12°. L. BROEKEMA, Directeur van de Rijkslandbouwschool te Wageningen, 14 April 1890; 13°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 19 April 1890; 14°. Burgemeester en Wethouders der Stad Zutphen, 16 April 1890; 15°. TAETS VAN AMERONGEN, Gouverneur van de koninklijke militaire Akademie te Breda, 16 April 1890; 16°. BOELE, Bibliothecaris van het Friesch Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde te Leeuwarden, 22 April 1890; 17°. J. W. HULKE, Bibliothecaris van de royal medical and chirurgical Society te Londen, 1890; 18°. WIESER, Directeur van het Ferdinandeum te Innsbruck, 12 December 1889; 19°. G. COCCONI, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Bologna, 15 Augustus 1889; 20°. J. W. TENKES, Secretaris van de Boston Society of natural History te Boston, 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Oorlog te 's Gravenhage, 14 April 1890; 2°. R. R. H. TOE LAER, Amsterdam, 15 April 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teylers Stichting te Haarlem, 1890; 4°. P. J. VAN HEERDT, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 17 April 1890; 5°. de Commissie voor de Buma-Bibliotheek te Leeuwarden, Maart 1890; 6°. A. TIELEMAN, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, Januari 1890;

7°. Förstemann, Archivaris van de kön. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 20 December 1889; 8°. Gilbert, Directeur van de kön. Universitäts-Bibliotheek te Greifswald, 3 Januari 1890; 9°. D. Stricker, Bibliothecaris van de Senckenbergische naturforschende Gesellschaft te Francfort a/M., 10 Maart 1890; 10°. G. W. A. Kahlbaum, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Basel, Augustus 1889; 11°. A. Rilliet, Secretaris van de Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 25 Maart 1890; 12°. G. Cocconi, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Bologna, 15 Augustus 1889; 13°. den Secretaris van de Accademia delle Scienze fisiche e matematiche te Napels, 1 November 1889; 14°. H. Wild, Directeur van het Observatoire physique central te St. Petersburg, 11 December 1889; 15°. J. C. Pilling, Directeur van de U. S. geological Survey te Washington, 28 Januari 1890; 16°. J. W. Tenkes, Secretaris van de Boston Society of natural History te Boston, December 1889; 17°. J F. Bride, Bibliothecaris van de Public Library of Victoria te Melbourne, 18 November 1889; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— De Heeren A. C. Oudemans jr., Weber, Moll en Schols hebben zich schriftelijk over hunne afwezigheid verontschuldigd.

— Is ingekomen een brief van den Heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van een opstel »Over involuties op vlakke en scheeve krommen", met verzoek, daaraan eene plaats te verleenen in de werken der Akademie. — De Voorzitter stelt het manuscript in handen van de Heeren Schoute en Bierens de Haan, om daarover, zoo mogelijk, in de volgende vergadering te rapporteeren.

— De Heer Forster heeft vroeger aangetoond, dat tuberkuleuse stoffen door inzouten haar infecteerend vermogen niet verliezen. Bij nieuwe proeven, door hem en den Heer de Freytag genomen, bleek, dat ook het rooken van vleesch, op het zouten volgend, tuberkelbacillen niet doodt. Vleesch,

waaraan tuberkuleuse woekeringen vastzaten, werd volkomen op de wijze van het rookvleesch van den handel gezouten en gerookt. Door het brengen van de fijngehakte gerookte tuberkuleuse knobbels in de buikholte van proefdieren, werd bij deze standvastig tuberkulose verwekt. Deze ervaring is uit een sanitair oogpunt niet zonder gewicht; want Spr. kon verder aantoonen, dat niet alleen de tuberkuleuse woekeringen, maar ook vleesch, van parelzieke dieren afkomstig, in vrij hooge mate infectieus is. Nocard, Böllinger e. a. hadden sap, door persing uit de spieren van parelzieke slachtdieren verkregen, bij een groot aantal proefdieren ingeënt; deze werden echter slechts bij uitzondering tuberkuleus. Spr. heeft, in plaats van vleeschsap, het fijngehakte vleesch zelf in de buikholte van konijnen en Guinea'sche biggetjes ingevoerd. Na het invoeren van vleesch van oogenschijnlijk goede kwaliteit, afkomstig van 7 parelzieke runderen, waarvan het vleesch na het inzouten voor de consumptie goedgekeurd was, zijn de proefdieren tot nu toe driemaal standvastig tuberkuleus geworden, en was dus 43 pCt. van het vleesch infectieus.

— De Heer Franchimont biedt voor de boekerij der Akademie aan twee dissertaties en licht den inhoud daarvan op de volgende wijze toe.

De Heer Simon Thomas heeft twee isomere representanten van zure nitraminen bereid, nl. het *propyl-* en het *isopropylnitramine*, en ook eenige hunner derivaten onderzocht. Onder deze bevindt zich voor 't eerst een gemengd aliphatisch nitramine, het *proplyisopropylnitramine.* Hij verkreeg dit uit zouten der zure nitraminen door dubbele ontleding met halogeenwaterstofzure aethers. De vraag of die zouten ook dubbele ontleding aangaan met zuurchloriden, zoodat langs dien weg eene zuurrest zou kunnen ingevoerd worden, is door den Heer Thomas, althans voor het propylnitramine, opgelost. Hij heeft aangetoond dat dit niet gebeurt, noch met pikrylchloride, noch met acetyl- of benzoylchloride. Wel heeft er reactie plaats, maar in de beide laatste gevallen met ontwikkeling van stikstofoxydule,

dat afkomstig kan zijn van het te verwachten product, indien dit uiteenvalt.

Een eigenaardig verschil ontdekte de Heer THOMAS tusschen den eersten term der zure nitraminen en de homologen. Terwijl nl. het kaliumzout van het methylnitramine in alcoholische oplossing dubbele ontleding aangaat met pikrylchloride, heeft dit niet plaats bij de homologen. Hunne oplossingen werken in dit geval als bestonden zij uit kali en uit het nitramine, waarvan het eerste kaliumpikraat geeft. Dit schijnt er op te wijzen dat het zure karakter van den eersten term sterker is dan dat van de homologen.

Ten slotte heeft de Heer THOMAS van een paar nitraminen het molecuulgewicht bepaald volgens de methode van RAOULT, met de vereenvoudiging van BECKMANN, en gevonden dat het met het theoretische voldoende overeenstemt.

De Heer DEKKERS heeft, na mislukte pogingen om het onbekende tetramethyleenglycol te verkrijgen uit derivaten van het aethyleenglycol, zich dit lichaam verschaft uit het tetramethyleendinitramine, door koking met zwavelzuurbevattend water. Hierdoor is eene sedert lang bestaande gaping eindelijk aangevuld. Tevens levert zijn onderzoek eene niet onbelangrijke bijdrage tot de kennis der zure dinitraminen. Het toont nogmaals, dat bij deze lichamen zich dergelijke eigenaardigheden voordoen als onder anderen bij de twee-basische zuren voorkomen; deze nl. dat, wat smeltpunt en oplosbaarheid in water betreft, die met een even aantal koolstofatomen bij elkaar behooren, evenals die met een oneven aantal. Hetzelfde geldt voor de correspondeerende urethanen, maar niet voor hunne nitroderivaten, zooals uit dit tabelletje blijkt:

SMELTPUNTEN.

	dimethylurethaan	dinitrodimethylurethaan.	dinitramine.
dimethyleen	132—133°	132°	174°
trimethyleen	74—75°	89—90°	67°
tetramethyleen	128°	61—62°	163°
pentamethyleen	114°	37°	59—60°

— De Heer van de Sande Bakhuyzen verklaart het werktuig, door hem uitgedacht om de persoonlijke fout bij het bepalen van de rechte klimming bij verschillende sterren te leeren kennen, en biedt voor de boekerij de verhandeling aan, waarin èn het instrument èn de daarmede genomen proeven beschreven zijn (Beschreibung eines Apparats zur Bestimmung des absoluten persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen, nebst der damit erhaltenen Resultate).

— De Heer Rauwenhoff biedt voor de 4⁰ werken eene verhandeling aan van den correspondent der Afdeeling Dr. van der Stok te Batavia: »de Hornsteinsche zes-en-twintigdaagsche periode, afgeleid uit meteorologische en magnetische waarnemingen te Batavia, St. Petersburg en Praag".

— Nog worden voor de boekerij der Akademie aangeboden, door den Heer van de Sande Bakhuyzen: »Détermination de la différence de longitude entre Leyde et Paris", door hemzelven en den Heer Bassot bewerkt; door den Secretaris, namens den Heer Weber, diens: »Zoologische Ergebnisse einer Reise in Niederländisch Ost-Indien. 1es Heft. 1890".

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 31 Mei 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, BAKHUIS ROOZEBOOM, MARTIN, HOFFMANN, KAPTEYN, BEIJERINCK, FORSTER, VAN BEMMELEN, STOKVIS, DE VRIES, PLACE, VERLOREN, VAN 'T HOFF, ZAAIJER, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, MICHAËLIS, VAN DIESEN, WEBER, HUBRECHT, MOLL, PEKELHARING, KOSTER, SCHOUTE, SCHOLS, BAEHR, RAUWENHOFF, A. C. OUDEMANS JR., KORTEWEG, MAC GILLAVRY, ZEEMAN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teijlers Stichting te Haarlem, 7 Mei 1890; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte te Rotterdam, 23 April 1890; 3°. R. HILDEBRAND, Leipzig, 17 Mei 1890; 4°. J. M. LATINO-COELHO, Secretaris van de Académie royale des Sciences te Lissabon, 31 Maart 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 24 Mei 1890; 2°. E. P. Wright, Secretaris van de royal Irish Academy te Dublin, 1890; 3°. E. Regel, Directeur van den Jardin impérial de Botanique te St. Petersburg, 16 Mei 1890; 4°. J. N. Baptisle, Directeur des Lignes télégraphiques de la République des Etats Unis du Brézil te Rio de Janeiro, 26 Maart 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren J. A. C. Oudemans en Hoek, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. E. den Minister van Binnenlandsche Zaken, de mededeeling behelzend dat Z. M. de Koning de herbenoeming van de Heeren H. G. van de Sande Bakhuyzen en J. D. van der Waals, respectievelijk tot Voorzitter en Onder-Voorzitter der Afdeeling, heeft goedgekeurd.

3°. Missive van denzelfden Minister, de mededeeling behelzend, dat Z. M. de Koning goedkeurde de benoemingen van de Heeren H. W. Bakhuis Roozeboom, adsistent bij het scheikundig onderwijs aan de Universiteit te Leiden, tot gewoon; Ch. Hermite, Hoogleeraar in de Wiskunde te Parijs, tot buitenlandsch lid, en van de Heeren C. J. van Schelle, mijn-ingenieur en A. P. Melchior, civiel-ingenieur, beiden op Java, tot correspondenten der Afdeeling.

4°. Brieven van de Heeren Bakhuis Roozeboom en Ch. Hermite, waarin zij dank zeggen voor hunne benoeming en verklaren die op hoogen prijs te stellen.

5°. Eene circulaire, onderteekend door de Heeren A. W. van Eeghen, Voorzitter en F. E. Blaauw, Secretaris van het kon. zoölogisch Genootschap »Natura Artis Magistra", waarin der Afdeeling mededeeling wordt gedaan van het overlijden op 82-jarigen leeftijd van den Stichter en Directeur van het Genootschap, wijlen den Heer Dr. G. F. Westerman.

— De Heer Bakhuis Roozeboom, ter vergaderzaal binnen-

geleid door de Heeren KAPTEIJN en BEIJERINCK, wordt door den Voorzitter verwelkomd met eene toespraak, waarin hij vooral nadruk legt op de belangrijke proeven, door den toegesprokene genomen op het gebied der moleculaire theorie, een gebied waarop door de Heeren VAN DER WAALS, VAN 'T HOFF en KORTEWEG bereids allermerkwaardigste uitkomsten waren verkregen.

— De Heer WEBER handelt over een geval van hermaphroditisme bij Fringilla coelebs:

Het exemplaar, dat in de nabijheid van Harderwijk gevangen werd, kwam 1⁰ April in handen van den Heer H. KOLLER, preparateur en adjunct-conservator bij het kon. zoölogisch genootschap Natura Artis Magistra te Amsterdam, die de goedheid had, de aandacht van spreker op het voorwerp te vestigen en het aan hem ter onderzoeking aftestaan. De vogel vertoont de bijzonderheid, dat zijn veerenkleed zeer scherp in twee symmetrische helften gescheiden is. De rechterzijde heeft de kleuren van het volmaakte mannetje, terwijl de linkerzijde met de kleuren van het wijfje getooid is. Dit zonderlinge verschijnsel moest aanleiding geven tot het vermoeden, dat het voorwerp een hermaphrodiet was, en wel links, — waar normaal bij vogels het eenige ovarium aangetroffen wordt, — voorzien van een ovarium, terwijl dan rechts, beantwoordende aan het mannelijke veêrenkleed, een testikel aanwezig zou moeten zijn.

De juistheid dezer beschouwing werd glansrijk bevestigd door de sectie. Daaruit bleek, dat aan de linkerzijde een ovarium aanwezig was van 3,5 mm. lengte en 2 mm. breedte, terwijl rechts een ronde testikel gevonden werd met een diameter van 2 mm.

Om uittemaken of de beide geslachtsklieren normaal gebouwd waren, onderzocht spr. op dienzelfden dag een normaal wijfje van Fringilla coelebs. De afmetingen van het ovarium waren hier: breedte 3,5 mm., lengte 4,5 mm., dus in beiderlei richting grooter dan bij het hermaphroditische individu. Daargelaten dit verschil in grootte, dat zeker van ondergeschikte beteekenis is, bleek uit een mikroskopisch

onderzoek dat beide ovaria in bouw overeenstemden en beiden eifollikels bevatten van gelijken trap van ontwikkeling. Het ovarium van het hermaphroditische individu mag dus als normaal en geschikt tot productie worden bestempeld.

Op 8 April had Spr. gelegenheid een normaal mannetje te onderzoeken. De beide testikels hadden hetzelfde voorkomen en nagenoeg dezelfde afmeting als de eenige testikel van het hermaphroditische individu; ook leverde het mikroskopisch onderzoek het bewijs, dat zij, alhoewel nog onrijp, in den fijneren bouw geheel overeenstemden. Zoo mocht dus ook de testikel van het hermaphroditische exemplaar normaal genoemd worden; waarmede tevens gezegd is, dat het onderwerpelijke exemplaar een echte, volwassen hermaphrodiet was; een term, dien Spr. slechts zou willen toepassen op een individu, dat beide soorten van geslachtsklieren in normalen vorm bezit. Naar het oordeel van Spr. is dit geval, van verschillende gezichtspunten uit, niet onbelangrijk. Daarvan wil hij slechts aanstippen: in de eerste plaats, dat dit — voor zooverre Spr. in de literatuur heeft kunnen nagaan — het eerste, zeker geconstateerde geval is van hermaphroditisme bij vogels: „zeker geconstateerd" door anatomisch onderzoek.

Aan dit eerste vereischte is niet voldaan in het geval, dat Cabanis (*Journal f. Ornithologie* XXII. pag. 344) bekend maakte van Pyrrhula vulgaris, waar, wat de kleuren aangaat, geheel hetzelfde verschijnsel zich voordeed als bij het exemplaar van den Heer Koller: rechts een mannelijk, links een vrouwelijk veêrenkleed. Een anatomisch onderzoek ontbreekt ook in het tweede geval, dat Cabanis als hermaphroditisme beschrijft. Een Colaptes mexicanus droeg rechts en links een ongelijksoortig veerenkleed. Het linkszijdige noemde Cabanis mannelijk, het rechtszijdige vrouwelijk. Dit ware dus in strijd met de beide voorafgaande gevallen. Het komt Spr. echter voor, een onjuiste uitlegging te zijn. Hij acht het waarschijnlijker, dat wij hier te doen hebben met een nog niet volmaakt mannetje, dat eerst aan één zijde het mannelijke kleed gekregen heeft door ongelijkzijdige rui.

Lorenz (*Beitrag z. Kenntniss d. ornithol. Fauna a. d. Nord-*

seite d. Kaukasus, *Moskau* 1887.) schijnt een exemplaar van Tetrao tetrix beschreven te hebben, eveneens met een op de beide lichaamshelften verdeeld mannelijk en vrouwelijk kleed. Op welke wijze, is Spr. onbekend gebleven, die geen gelegenheid had, deze mededeeling te zien.

De overigens bij vogels niet zeldzame gevallen van schijnbaar hermaphroditisme schijnen alleen, zooals uit de onderzoekingen van TICHOMIROF, en vooral van BRANDT blijkt, slechts Arrhenoidia en Fhelyidia te zijn. Een geval, dat BRANDT zelf met eenige aarzeling hermaphroditisme noemt, is zoo pathologisch, dat het dezen naam zeker niet verdient.

In de tweede plaats meent Spr. in het door hem beschreven geval een niet onbelangrijk bewijs te zien voor den invloed der geslachtsklieren op het sexueele verschil der veêren; vermoedelijk door tusschenkomst van zenuwinvloed op de voedingsbanen van het integument. Hij wijst daarbij op de treffende overeenkomst met den goudvink, dien CABANIS beschreef.

Een paar vragen van den Heer KOSTER: ééne van anatomischen en ééne van phylogenetischen aard, worden door den Spreker beantwoord.

— De Heer VAN BEMMELEN deelt het volgende mede:

In de hooge veenen wordt op sommige plaatsen eene witte zelfstandigheid gevonden, door de veenlieden als *witte* klien onderscheiden. DR. G. A. F. MOLENGRAAFF, privaatdocent aan de Universiteit te Amsterdam, zond mij daarvan een monster tot onderzoek.

De analyse leerde, dat deze witte klien bijna geheel uit geleiachtig koolzuur ijzeroxydule bestaat. Het oxydeert zich snel aan de lucht, onder verlies van koolzuur. Evenwel is 't mij gelukt het in een toestand te analyseeren, waarbij het nog maar weinig koolzuur had verloren. De analyse (in afgeronde cijfers) gaf:

86 pCt. $FeCO_3$
6 » $CaCO_3$
8 » veenbestanddeelen.

De reductie van ijzeroxyde door organische stoffen bij afsluiting van lucht is een der meest gewone verschijnselen in den bodem, in alle klei- en zandbodems, vooral in veenachtige, dus ook in alle veenen, terwijl het ijzeroxydule in vele veenwateren in merkbare hoeveelheden opgelost voorkomt.

Het merkwaardige is dan ook de plaatselijke *ophooping* van het koolzuur ijzeroxydule. Ik acht het van belang dat de oorzaken van deze ophooping nagespeurd, en de *uitgestrektheid* daarvan bepaald worden, en hoop daartoe later de gelegenheid te zullen vinden.

— De Heer HUBRECHT geeft een overzicht van de vroegste embryonale stadiën en van de wijze van ontstaan der kiembladen bij de gewone spitsmuis, *Sorex (crocidura) vulgaris*.

Reeds vroeg is op de kiemblaas, die vrij in het lumen van den uterus ligt en niet, als bij de egel, in eene decidua reflexa wordt opgesloten, een scherp omschreven epiblastisch embryonaal schild aanwezig. Het hypoblast, ontstaan door uitspreiding van grootkernige, afgeplatte cellen, die zich van de polaire verdekking der kiemblaas uit ontwikkelen, is aanvankelijk geheel onafhankelijk van het epiblast. Reeds vroeg ontstaat in het hyploblast eene locale verdikking, die als protochordale plaat worde aangeduid en waaruit zich het voorste chordaeinde en zijdelingsche mesoblastvleugels ontwikkelen. Verder achterwaarts ontstaan chorda en mesoblast: *a*) uit de protochordale wig (= »Kopffortsatz" auct.); *b*) uit de gastrulalippen (primitiefstreep), terwijl *c*) nog mesoblastcellen onmiddellijk uit het hypoblast haar oorsprong nemen, niet onder het vooreinde van de versmolten gastrulalippen, maar in het gebied eener ringvormige zone, die onder den buitenrand van het embryonale schild verloopt. Spoedig versmelt het mesoblast, dat aldus op drie verschillende punten zijn eersten oorsprong neemt, tot een samenhangend blad, dat alleen waar de chorda-aanleg zich bevindt twee zijdelingsche helften doet onderkennen, die intusschen zoowel vóór als achter ineenvloeien.

Het coelom ontstaat het eerst als eene halvemaanvormige ruimte langs, maar buiten den achterrand van het embryo-

nale schild. Eerst later treedt het ook in de embryonale streek op.

Een protochordaal-kanaal en een porus neurentericus zijn slechts voorbijgaand en onvolledig aanwezig.

Op grond van de gegevens, aan de spitsmuis ontleend, die op zeer vele punten nauw aansluiten aan wat BONNET voor het schaap en HEAPE voor de mol beschreven hebben, ontwikkelt spr. eene theoretische opvatting omtrent het gastrulatieproces bij de zoogdieren, die hij wenscht te stellen tegenover de nieuwste beschouwingen van ED. VAN BENEDEN, met welke hij zich op verschillende gronden niet kan vereenigen.

Eene opmerking van terminologischen aard, door den Heer KOSTER, geopperd, wordt door den Spreker beantwoord.

— De Heer SCHOUTE biedt uit naam van den Heer J. C. KLUIJVER, leeraar aan de H. B. S. te Breda, eene verhandeling aan voor de werken der Akademie, getiteld: »Over stralenstelsels, die uit vier elkander kruisende lijnen kunnen worden afgeleid." — De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN verklaren zich, op het verzoek des Voorzitters, bereid, daarover in de Juni-vergadering rapport uit te brengen.

— De Heer HOFFMANN biedt ter plaatsing in de werken der Akademie aan: »Bijdrage tot de kennis van de ontwikkelingsgeschiedenis van het aderlijke bloedvaatstelsel bij de Reptiliën", en de Heer A. C. OUDEMANS Jr. een opstel, getiteld: »Bijdrage tot de kennis der Cupreïne."

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden: door den Heer VAN BEMMELEN drie mededeelingen van zijne hand, verschenen in »Die landwirtschaflichen Versuchs-Stationen, en door den Heer DE VRIES eene door hem geschreven brochure, getiteld: »Die Pflanzen und Thiere in den dunklen Räumen der Rotterdamer Wasserleitung."

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de vergadering gesloten.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS DER CUPREINE

DOOR

A. C. OUDEMANS Jr.



II.

OVER DE VERBINDINGEN VAN CUPREÏNE MET BASES.

Uit vroegere onderzoekingen van PAUL en COWNLEY *) en van HESSE †) is reeds gebleken, dat cupreïne zich met bases verbindt. In strijd met de eerstgemelde Engelsche onderzoekers, wordt evenwel door HESSE beweerd, dat het alkaloïde met ammonia geene verbinding vormt. HESSE vond ook, dat ter volledige oplossing van 1 molecule cupreïne, 1 molecule kalium- of natriumhydroxyd noodig was. Slechts de natriumverbinding verkreeg hij kristallijn door bij de oplossing van cupreïne in de noodige hoeveelheid natron eene overmaat van laatstgenoemd alkali te voegen; daardoor wordt bij verwarming de gevormde gelei opgelost en bij bekoeling kristaliseert eene verbinding in den vorm van satijnglanzende kleurlooze naaldjes. De calcium-, lood- en zilververbindingen verkreeg hij in den vorm van amorphe nederslagen door dubbele ontleding der alkali-verbinding met een in water opgelost neutraal calcium-, lood- en zilverzout. De amorphe-verbindingen zijn tot zekere mate in water oplosbaar.

Mijne ervaringen strooken, over het geheel genomen, zeer goed met die van HESSE, maar ik ben er in geslaagd, de beide alkali-verbindingen in duidelijk kristallijnen toestand

---

*) *Pharmaceutical Journal*, 22 Nov. 1884, p. 401.

†) LIEBIG's *Ann.* 230, bl. 62 en verv.

af te scheiden en geloof, in strijd met Hesse, te moeten aannemen, dat cupreïne ook met ammonia eene bepaalde scheikundige verbinding vormt.

De wijze, waarop ik mij de kristallijne verbindingen van cupreïne met vaste alkaliën heb verschaft, is de volgende. Eenige grammen van het alkaloïde worden met eene zwakke overmaat van alkali, desnoods onder verwarming, in oplossing gebracht; bij het vocht wordt een gelijk volumen sterken alkohol gevoegd, en daarna zooveel van eene zeer geconcentreerde alkaliloog, dat op den bodem van het vat eene kristallijne afscheiding ontstaat. Men verwarmt nu zacht, tot zich alles weder heeft opgelost en koelt het vocht langzaam af, liefst door het bij winterkoude op eene koele plaats te laten verwijlen. Er scheiden zich allengs vrij aanzienlijke bladerige kristalplaatjes af, die door de zuigpomp kunnen worden geïsoleerd, met sterken alkohol snel kunnen worden afgewasschen en, na tusschen filtreerpapier sterk geperst te zijn, boven vaste kali kunnen worden gedroogd. Zoo doende verkrijgt men aaneenhangende schubben, die vetachtig op het gevoel zijn. Zij vertoonen eenige overeenkomst in uiterlijk met cholesterine. De oplossing in weinig warm water is dikvloeibaar en heeft veel van eene zeepoplossing; door bekoeling stolt zij tot eene min of meer stijve gelei en door een stroom koolzuur wordt daaruit cupreïne neergeslagen. Door vele metaalzouten wordt in eene niet te verdunde oplossing een vlokkig of geleiachtig neerslag gevormd.

De luchtdroge kristallijne verbindingen van cupreïne met alkaliën vertoonen de neiging, bij drogen in een exsiccator en nog meer bij verwarming boven 100°, eene oranjegele, zelfs roode tint aan te nemen. Wellicht gaat hiermede eene scheikundige verandering gepaard, maar deze is in elk geval zeer gering, vooral wanneer het drogen in een exsiccator heeft plaats gehad; want lost men de massa later in warm water op, dan verkrijgt men eene slechts eenigermate gekleurde homogene vloeistof, waaruit de cupreïne grootendeels weder onveranderd kan worden afgescheiden.

Opmerking verdient nog, dat wanneer cupreïne in eene

kleine overmaat van alkali is opgelost, de massa geheël vloeibaar kan blijven; voegt men nu nog een weinig vast alkaloïde toe, dan wordt dit allengs geleiachtig en een groot deel der vloeistof stolt tot eene gelei, terwijl een ander deel als oplossing daarboven ligt. Hieruit schijnt te blijken, dat de geheel neutrale verbinding niet zoo oplosbaar is in zuiver water als in een zwak alkalisch vocht.

Na deze voorloopige opmerkingen ga ik tot de beschrijving van de eigenschappen en de samenstelling der onderzochte verbindingen van cupreïne met alkaliën over.

Kali-cupreïne. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, KOH + 7 H_2 O$. Deze verbinding verkreeg ik nu eens in den vorm van schijnbaar zeszijdige blaadjes en dan eens in dien van naaldvormige kristallen. De oplosbaarheid van de verbinding in bepaalde mengsels van alkaliloog en alkohol schijnt grooter te zijn dan die van de natriumverbinding. De analyse leverde de volgende resultaten op:

1. 0.9600 gram luchtdroog kali-cupreïne verloren op 115° 0,2500 gr. water. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2, KOH + 7 H_2 O$ vordert 25.6 pCt. water.

2. 0.5100 gram van hetzelfde praeparaat gaven door behandeling met overmaat van zwavelzuur, voorzichtig verhitten en gloeien 0 0940 gr. $K_2 SO_4$ = 0.0606 of 11.8 pCt. KOH. De formule met $7 H_2 O$ vordert 11.5 pCt. KOH.

$C_{19} H_{22} N_2 O_2 KOH + 7 H_2 O$	Gevonden.	Berekend.
$7 H_2 O$	26.0	25.7
KOH	11.8	11.5

Het schijnt mij echter toe, dat de kaliverbinding, evenals de natronverbinding, verschillende hoeveelheden kristalwater kan opnemen. Praeparaten van verschillende bereiding bevatten wel eens minder water dan 26 pCt., zonder dat de hoeveelheid daarvan juist genoeg door eene bepaalde formule kon worden voorgesteld. Ik achtte het niet genoeg van belang, dit punt aan een nader onderzoek te onderwerpen.

Natron-cupreïne. $C_{19} H_{22} N_2 O_2, NaOH + 4 H_2 O$ en $+ 7 H_2O$. Vetachtige blaadjes, somtijds vrij aanzienlijk van grootte en op schubben zonder duidelijken kristalvorm gelijkende.

De analysen van twee praeparaten leverden de volgende uitkomsten op;

A. 1. 0,7013 gram van de verbinding verloren, op 120° gedroogd, 0.1177 gram water = 16,77 pCt. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, Na O H + 4 $H_2 O$ vordert 17 pCt. water;

2. 0.6033 gram van dezelfde verbinding gaven aan droog gegloeid natriumsulfaat 0.1038 gram, overeenkomende met 9.7 gram Na O H. De formule met 4 $H_2 O$ vordert 9.3 pCt. Na O H.

B. 1. 0.7472 gram natron-cupreïne verloren, bij drogen op 120°, 0.1936 gram of 26 pCt. water. De formule $C_{19} H_{22} N_2 O_2$, Na O H + 7 $H_2 O$ vordert 26.4 pCt. $H_2 O$.

2. 0.5200 gram van hetzelfde praeparaat gaven 0.0822 gram $Na_2 S O_4$, overeenkomende met 9.0 pCt. Na O H. De formule 7 $H_2 O$ vordert 8.4 pCt. Na O H.

$C_{19} H_{22} N_2 O_2$, Na O H + 4 $H_2 O$	Gevonden	Berekend
$H_2 O$	16.8	17.0
Na O H	9.7	9.3

$C_{19} H_{22} N_2 O_2$, Na O H + 7 $H_2 O$	Gevonden	Berekend
$H_2 O$	26.4	26.0
Na O H	9.0	8.4

Ammonia-cupreïne. Hierboven is reeds vermeld, dat het bestaan van eene bijzondere verbinding van cupreïne met ammonia door HESSE wordt ontkend; — mijns inziens ten onrechte. Cupreïne toch lost in geconcentreerde ammonia zeer gemakkelijk op, maar ook in verdundere ammoniak-vloeistof wordt het, ofschoon langzamer, tot aanzienlijke hoeveelheden opgenomen; het is, zooals wij later zullen zien, zeer goed mogelijk, het S. D. V. van cupreïne in ammoniakale-oplossing te bepalen en men vindt, dat dit niet veel verschilt van dat, wat het alkaloïde onder den invloed der vaste alkaliën vertoont. Bovendien kan men met cupreïne en ammonia juist dergelijke geleiachtige lichamen verkrijgen, als bij de werking van kali en natron op het alkaloïde. Uit dit alles schijnt wel te blijken, dat eene verbinding van cupreïne met ammoniak bestaat, maar dat zij zóó veel onbestendiger is dan die met vaste alkaliën, dat men moeite zal hebben, haar in zuiveren toestand af te zonderen.

Andere verbindingen van cupreïne met bases. Ofschoon ik deze niet nader heb onderzocht, zoo is mij toch waarschijnlijk geworden, dat dergelijke vaste verbindingen, als ik met kali en natron bereidde, ook bij de vereeniging van het alkaloïde met lithion en baryt zullen zijn te verkrijgen. In lithionloog en barytwater is cupreïne zoo oplosbaar, dat men het S. D. V. van het alkaloïde in deze vloeistoffen kan bepalen.

OVER HET SOORTELIJK DRAAIINGSVERMOGEN VAN CUPREÏNE IN ALKALISCHE OPLOSSINGEN.

Zooals reeds uit de proeven van HESSE bleek, gedraagt zich cupreïne als een phenol met één hydroxylgroep, waarvan de waterstof door metalen kan worden vervangen. Het kwam mij niet onbelangrijk voor, te onderzoeken, hoe het soortelijk draaiingsvermogen van het alkaloïde onder den invloed van verschillende hoeveelheden bases gewijzigd wordt. Naar de ervaring, die ik vroeger ten aanzien van de wijziging van het S. D. V. van één- en tweezurige alkaloïden onder den invloed van zuren had opgedaan, meende ik te mogen verwachten, dat wanneer 1 molecule alkali of eene aequivalente hoeveelheid van andere bases aan 1 molecule cupreïne was gebonden, verdere toevoeging geen belangrijken invloed zou uitoefenen. Zooals uit het volgende kan worden opgemerkt, werd mijne verwachting in hoofdzaak vervuld.

De door mij gedane proeven werden weder uitgevoerd volgens de vroeger door mij gevolgde methode; in een kolfje van ongeveer 20 C.C. inhoud werd 1 mol. (of een veelvoud daarvan), in milligrammen uitgedrukt, in eene afgemetene hoeveelheid getitreerd alkali opgelost en daarna tot aan het merk op het kolfje hetzij water, hetzij alkohol toegevoegd, daarbij zorgende dat de temperatuur ten slotte steeds dezelfde was (17° C.). Ter beoordeeling van den invloed der concentratie werden op hetzelfde volumen stijgende hoeveelheden cupreïne met de noodige hoeveelheid basis samengebracht. Zie hier de uitkomsten van deze proeven;

Cupreïne in kali (waterige oplossing). Invloed van verschillende hoeveelheden alkali.

N°.	Hoeveelheid *) cupreïne.	Volumen normale kali.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3102 gr.	1 C.C.	23 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	8°20′	8°21′	— 204°.5	— 207°.3
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°22′			
2	0.3023 "	2 "	23 "	" "	" "	8°6′	8°5′	— 203°.0	— 205°.9
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°4′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°4′5			
3	0.3508 "	2 "	23 "	" "	" "	9°15′	9°14′	— 200°.0	— 202°.8
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°11′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°14′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	9°16′5			
4	0.3120 "	6 "	23 "	" "	" "	8°4′5	8°3′	— 196°.0	— 198°.8
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°1′5			
"	" "	" "	" "	" "	" "	8°2′5			
5	0.3113 "	12 "	23 "	" "	" "	7°48′	7°47′	— 191°.2	— 194°.0
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°45′			
"	" "	" "	" "	" "	" "	7°47′5			

*) De voor deze en de volgende proeven gebezigde cupreïne bevatte 1.4 pCt. water.

Cupreïne in kali (waterige oplossing). Invloed van Concentratie.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normal kali.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
6	0.5032 gr.	3½ C.C.	19 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	15°55′	15°56′	— 198°.6	— 201°.4
〃	〃 〃	〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	15°56′5			
7	0.5988 〃	4 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	18°46′5	18°47′5	— 197°.2	— 200°.0
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	18°47′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	18°49′			
8	0.6978 〃	4⅔ 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	21°56′	21°58′	— 197°.6	— 200°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	22°0′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	21°59′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	22°0′			

Cupreïne in kali (toevoeging van abs. alkohol).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale kali.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
9	0.3075 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	14°13′	14°	— 305°.8	— 310°.2
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	14°15′			
10	0.3062 〃	2 〃	20 〃	〃	〃 〃	15°45′	15°44′6	— 339°.6	— 344°.4
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	15°44′			

Cupreïne in natron (waterige oplossing). Invloed van verschillende hoeveelheden alkali.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3082 gr.	1 C.C.	19 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	9°52′	9°52′	— 200°.6	— 203°.0
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°51′			
2	0.3090 〃	2 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	9°52′			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°49′	9°50′	— 199°.7	— 202°.1
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°50′			
3	0.3104 〃	6 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	9°42′	9°43′	— 195°.5	— 197°.9
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°44′			
4	0.3107 〃	12 〃	19 〃	〃 〃	〃 〃	9°18′	9°19′	— 187°.6	— 190°.0
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°20′			

Cupreïne in natron (waterige oplossing). Invloed van concentratie.

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
5	0.6243 gr.	4 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	18°45′	18°45′	— 197°.4	— 200°.8
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	18°45′5			
6	0.7058 〃	$3^3/_8$ 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	21°12′	21°12′	— 198°.2	— 200°.4
〃	〃 〃		〃 〃	〃 〃	〃 〃	21°12′			
7	0.9361 〃	6 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	27°54	27°54′	— 196°.9	— 199°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	27°54′			

Cupreïne in natron (toevoeging van abs. alkohol).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale natron.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
8	0.3067 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	14°16′	14°15′	— 306°.9	— 310°.5
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	14°15′			
9	0.3067 〃	2 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	14°45′	14°44′	— 341°.4	— 345°.6
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	14°43′5			

Cupreïne in lithion (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen normale lithion.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3032 gr.	1 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17 C.	9°20'	9°20'5	— 203°.3	— 205°.1
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°21'			
2	0.3064 〃	2 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	9°23'	9°23'5	— 202°.6	— 205°.5
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°24'			

Cupreïne in baryt (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen $^2/_7 \times$ normale baryt.	Totaal volumen.	*l*.	*t*.	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3110 gr.	4 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17 C.	9°24'	9°22'	— 198°.9	— 201°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°20'5			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°20'5			
2	0.3066 〃	18 〃	20 〃	〃 〃	〃 〃	9°4'	9°3'	— 194°.9	— 197°.3
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°3'			
〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	〃 〃	9°3'			

Cupreïne in ammonia *) (waterige oplossing).

N°.	Hoeveelheid cupreïne.	Volumen 12 × normale ammonia.	Totaal volumen.	*l.*	*t.*	α_D.		$(\alpha)_D$.	$(\alpha)_D$ berekend op watervrij alkaloïde.
1	0.3092 gr.	8 C.C.	20 C.C.	302.8 m.m.	17° C.	10°4′5	10°4′	— 215°.1	— 217°.6
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	10°3′			
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	10°3′5			
2	0.3103 ″	11 ″	20 ″	″ ″	″ ″	10°14′5	10°15′	— 218°.6	— 221°.1
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	10°15′5			
3	0.3139 ″	15 ″	20 ″	″ ″	″ ″	10°39′5	10°15′	— 224°.1	— 227°.3
″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	″ ″	10°38′			

*) Bij deze reeks van proeven bleek, dat cupreïne slechts langzaam in slappe ammonia tot het verzadigingspunt oplost. Het was mij niet mogelijk, eene volledige oplossing van 1 molecule cupreïne op eenige weinige C.C. normale ammonia te verkrijgen. De vorming van eene heldere oplosssing had slechts bij gebruik van eene groote overmaat van deze basis plaats.

Overziet men de verkregene uitkomsten, dan blijkt:

1⁰ dat bij gebruik van kali, natron, lithion en baryt, onder gelijke omstandigheden van concentratie en gelijke verhouding tusschen cupreïne en alkalische basis, ongeveer dezelfde waarden voor het soortelijk draaiend vermogen van cupreïne worden verkregen. Ammonia maakt hier eene uitzondering; de waarden voor het S. D. V. verkregen, verschillen van die, welke onder den invloed van de andere alkalische bases zijn gevonden en stijgen, naarmate de oplossing meer ammonia bevat. Deze afwijking schijnt mij toe, daardoor verklaard te kunnen worden, dat het S. D. V. van het alkaloïde in geheel zuivere (verdichte) ammonia waarschijnlijk verschilt van dat, wat in een ander oplosmiddel wordt waargenomen en ditzelfde zal wel het geval zijn met de verbinding van cupreïne en ammonia. Men heeft hier niet, zooals in de proeven met kali en natron, eene overwegende hoeveelheid water, maar betrekkelijk zeer veel (bij enkele proeven ± 18 pCt.) NH_3. De invloed van deze buitengewone omstandigheden en de successieve toeneming van het S. D. V. bij vermeerdering van het ammonia-gehalte erkennende, zou men kunnen verwachten, dat eene oplossing van cupreïne in weinige C.C. normale ammonia, zoo die kon worden verkregen, ten aanzien van het S. D. V. niet veel verschil met de oplossing in andere alkaliën zou vertoonen;

2⁰ dat bij de vaste alkaliën, onder overigens gelijke omstandigheden, het S. D. V. daalt, naarmate de vloeistof meer basis bevat;

3⁰ dat grootere rijkdom van de vloeistof aan cupreïne-alkali met een geringer S. D. V. van het alkaloïde samengaat;

4⁰ dat inderdaad het maximum van S. D. V. bij cupreïne ten naaste bij is bereikt, wanneer aan 1 molecule cupreïne 1 molecule kali, natron en lithion of $^1/_2$ molecule baryt is toegevoegd Verdere toeneming van het alkali-gehalte heeft in waterige oplossingen niet veel invloed. Cupreïne gedraagt zich dus tegenover alkalische bases evenals kinamine en konkinamine zich gedragen tegenover zuren.

Men zou wellicht geneigd zijn te meenen, dat de verschijnselen, die door mij bij de proeven met normaal alkali en alkohol zijn waargenomen, hiermede in strijd zijn. Immers men ontwaart, dat cupreïne in eene oplossing, bestaande uit 2 C.C. normaal alkali en 18 C.C. absoluten alkohol, zoowel bij kali als bij natron, een vrij wat hooger S. D. V. vertoont dan in eene vloeistof, die op 1 C.C, normaal alkali 19 C.C. absoluten alkohol bevat en men zou kunnen veronderstellen, dat het alkali hier het S. D. V. opdrijft, doordien er eene tweede verbinding van cupreïne met kali of natron wordt gevormd, evenals bij de twee zurige kina-alkaloiden het S. D. V. zeer aanzienlijk stijgt, wanneer men bij 1 molecule dezer lichamen op 1 molecule (verdund) Cl H nog meer zoutzuur voegt.

Ik geloof intusschen, dat deze onderstelling niet gewettigd is en dat het stijgen van het S. D. V. in het onderwerpelijke geval eenvoudig wordt veroorzaakt door de toeneming van *water* tegenover *alkohol.* Wij hebben hier — zoo ik meen — een geval, analoog aan dat, wat ik vroeger ten aanzien van het stijgen van het S. D. V. van cinchonine in chloroformische oplossing bij voortgaande toevoeging van alkohol waarnam. Er is ook geen reden te bedenken, waarom in dit geval zich waterige oplossingen ten aanzien van verzadigingsverschijnselen anders tegenover cupreïne zouden gedragen dan alkoholische. Proeven met in absoluten alkohol opgeloste zuivere kali en natron, zouden hierover nader licht kunnen verspreiden.

Merkwaardig is het in elk geval, dat de toevoeging van gelijke hoeveelheden alkohol bij de beide alkali-oplossingen eene ongeveer gelijke toeneming van het S. D, V. ten gevolge heeft.

De uitkomsten, hierboven ten aanzien van den invloed van verschillende hoeveelheden alkali op het S. D. V. van cupreïne vermeld, komen mij daarom zoo merkwaardig voor, omdat men hier een geval heeft, waarin men aan ééne zelfde stof op tweeërlei wijze de wet kan toetsen, die ik

vroeger ten aanzien van het verband tusschen scheikundig karakter en soortelijk draaiingsvermogen heb gevonden.

Cupreïne gedraagt zich tegenover zuren als eene tweezurige basis, maar tegenover bases, krachtens haar phenolachtig karakter, als éénbasisch zuur. En hiermede staat in verband het merkwaardige feit, dat het S. D. V., onder den invloed van zuren bij de twee graden van verzadiging, die het alkaloïde ondergaan kan, zeer verschilt, terwijl daarentegen bij de vorming van verbindingen met bases — die slechts in ééne enkele bepaalde verhouding plaats grijpt — al is er eene overmaat van basis voorhanden, nagenoeg hetzelfde S. D. V. in waterige oplossingen wordt waargenomen.

In de basische zouten, die ik onderzocht, was het S. D. V. gelegen tusschen — 182° en — 191°.0, in de neutrale tusschen — 283° en — 289° en, zooals men hierboven heeft gezien, bedraagt het bij geringe overmaat van basis in alkalische oplossingen en bij ongeveer gelijken concentratiegraad (1 molecule in milligrammen op ± 20 C.C.) ongeveer — 204°.

Het zou zeker van groot belang zijn, dat het door mij verrichte onderzoek over andere analoge organische alkaloïden kon worden uitgestrekt.

Delft, Mei 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Juni 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, SCHOLS, KAMERLINGH ONNES, BAKHUIS ROOZEBOOM, HOFFMANN, MAC GILLAVRY, ZEEMAN, DE VRIES, MAX WEBER, STOKVIS, FORSTER, PLACE, VAN BEMMELEN, VERLOREN, BEHRENS, BEIJERINCK, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BIERENS DE HAAN, HUBRECHT, VAN DIESEN, RIJKE, MICHAËLIS, MARTIN, GRINWIS, PEKELHARING, J. A. C. OUDEMANS, KOSTER, MOLL, ENGELMANN, VAN 'T HOFF, GUNNING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. J. A. GROTHE, Secretaris van het historische Genootschap te Utrecht, Mei 1890; 2°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1890; 3°. de Gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 29 Mei 1890; 4°. C. WINKLER, Secretaris van de Vereeniging tot bevordering der Geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië te Batavia, 15 April 1890; 5°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris van de Kongelige danske videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 20 December 1889; 6°. H. SANTES-

son, Bibliothecaris van het Institut royal géologique de Suède te Stockholm, 17 Juni 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. de Curatoren van het Stolpiaansch Legaat te Leiden, Juni 1890; 2°. het Ministerio delle istrusione publica te Rome, 1890; 3°. O. Torell, Directeur van het Institut royal géologique de Suède te Stockholm, 17 Juni 1890; 4°. H. Mohn, Directeur van het Editorial Committee of the Norwegian North-Atlantic Expedition te Christiania, 1890; 5°. J. A. Palmén, Secretaris van de Société de Géographie de Finlande te Helsingfors, 31 Mei 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren Hoek en Schoute, dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen.

2°. Eene missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (2 Juni 1890) ter begeleiding van een Koninklijk Besluit van 23 Mei 1890 N°. 18, waaruit blijkt dat voor de werkzaamheden der Commissie voor de Geologische Kaart eene Rijkssubsidie is toegestaan van *f* 500.— De Secretaris deelt mede, dat deze som bereids door hem ontvangen is. Het voorstel van den Voorzitter om haar ter beschikking te stellen van de Commissie voornoemd (Voorzitter de Heer Behrens) wordt goedgekeurd.

3°. Eene circulaire van het Bestuur van het koninklijk zoölogisch Genootschap Natura Artis Magistra (17 Juni 1890), de mededeeling behelzend dat, in plaats van wijlen Dr. G. F. Westerman, tot Directeur van het Genootschap benoemd werd de Heer Dr. C. Kerbert.

4°. Eene missive van het Bestuur van het Congres voor Nijverheidshygiëne en Reddingswezen (2 Juni 1890), waarin de leden der Afdeeling uitgenoodigd worden, voornoemd Congres bij te wonen, en opgave verzocht wordt van het aantal circulaires, gelijk aan die welke aan de missive werd

toegevoegd, ter verspreiding onder genoemde leden. De Voorzitter noodigt de aanwezigen uit, hun verlangen dienaangaande kenbaar te maken aan den Secretaris.

5⁰. Eene verhandeling van den heer J. CARDINAAL: »Constructie van oppervlakken van de vierde Orde met dubbelkegelsnede door projectieve bundelsoppervlakken van de tweede Orde", aangeboden ter plaatsing in de werken der Akademie. De heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN verklaren zich bereid, daarover verslag uit te brengen in de September-Vergadering.

6⁰. Een brief van den heer BETTINI te New-York, ter begeleiding van eenige exemplaren eener brochure, handelend over den door dien heer uitgevonden Micro-Graphophone..

— Het rapport over de verhandeling van den heer KLUYVER, in de vorige vergadering aangeboden, wordt gelezen. De conclusie strekt om haar in de werken der Akademie op te nemen. Hiertoe wordt besloten.

— De Heer BEIJERINCK spreekt over »*Cultuurproeven met zoöchlorellen, lichenengonidiën en andere lagere wieren*".

Bij proeven, uitgevoerd met het doel om, uit een door mikroskopische wieren groen gekleurd stilstaand water, deze wieren door de gelatine-methode in geïsoleerde culturen te brengen, gelukte het twee soorten: *Scenedesmus acutus* en *Chlorococcum protogenitum*, af te zonderen. Een derde soort, *Chlorosphaera limicola* n. s., werd op overeenkomstige wijze uit het lichaam, waarschijnlijk het darmlumen, van *Hydra viridis* geïsoleerd.

Deze soorten, thans sinds een jaar in voortloopende reinculturen aangehouden, groeien, in strijd met de heerschende opvatting, alleen in mediën die organisch voedsel bevatten. In het duister zoowel als in het licht wordt haar groei het meest begunstigd door een mengsel van pepton en suiker; als suiker werkt maltose het best, maar ook rietsuiker en glucose kunnen worden opgenomen. De beste verhouding is $^1/_2$ pCt. pepton en 1 pCt. maltose; hoogere suikergehalten geven aanleiding tot misvorming en ontkleuring der

groene cellen. Vaste en vloeibare cultuurmassa's met pepton en suiker in de genoemde verhouding gemengd, worden na toevoeging dezer wieren in het licht spoedig intensief groen; in het duister heeft eveneens groei plaats, maar de bladgroen-kleurstof gaat daarbij grootendeels, hoezeer, zelfs na een jaar, niet geheel verloren. In de cellen hoopt zich een vast koolhydraat op, amylum, dat met jodium blauw wordt, bij *Chlorosphaera*, paramylum, dat met jodium bruin wordt, bij *Scenedesmus* en *Chlorococcum*.

In het licht scheiden deze wieren zuurstof af door koolzuurontleding; daar hun voeding dan alleen de aanwezigheid van pepton vereischt en niet van suiker, is het zeker, dat de koolzuurontleding met de vorming van een koolhydraat gepaard gaat.

Een uitmuntende cultuurgrond is, bij lichttoetreding, water waarin 2 à 3 pCt. gelatine door een weinig pancreaspoeder, of door *Bacillus subtilis*, tot smelting is gebracht.

Scenedesmus acutus scheidt een typtisch enzym af, zoodat gewone gelatineculturen dezer soort weldra uit een groen bezinksel van *Scenedesmus*-cellen bestaan, waarboven de gesmolten gelatine als helder vocht staat. De cellen verliezen daarbij haar oorspronkelijken vorm geheel, door het verloren gaan der puntige uiteinden, zij zwellen sterk op en worden bolrond of ellipsoïdisch. Vooral in zulke culturen is het duidelijk, dat ook bij *Scenedesmus* de celvermeerdering plaats heeft door vrije celvorming van 4 tot 16 cellen binnen den wand der moedercel, die ten slotte wordt afgestroopt.

Ook *Chlorococcum* en *Chlorosphaera* deelen zich uitsluitend door vrije celvorming binnen in de moedercel. *Chlorosphaera* stelt daarbij de deelproducten hetzij als zwermsporen met twee zwermdraden of als beweginglooze cellen in vrijheid. *Chlorococcum* en *Scenedesmus* brengen nimmer zwermsporen voort.

De gonidiën van *Physcia parietina*, *Cystococcus humicola*, kunnen ook op gelatine en in voedingsvloeistoffen, bij aanwezigheid van pepton, gecultiveerd worden. In de gelatineculturen ontstaan somtijds zwermsporen, op de wijze zooals

dit door FAMINTZIN en BARANETZKY is beschreven, maar gewoonlijk, en in vloeistofculturen altijd, zijn de cellen bewegingloos. Ook zij ontstaan steeds door vrije celvorming. In voedingsvloeistoffen, geheel vrij van organisch voedsel, gelukt de cultuur der gonidiën niet. Ammoniumnitraat kon hier, evenmin als bij de overige genoemde wieren, als stikstofbron fungeeren.

De zoöchlorellen van *Hydra viridis*, *Paramaecium Aurelia* en *Stentor polymorphus* zijn zoo naverwant met *Chlorococcum*, dat men, op grond van mikroskopisch onderzoek, geneigd is ze daarmede voor identiek te houden; alle proeven om deze chlorellen in vrije cultuur buiten het lichaam der dieren te brengen, zijn echter geheel mislukt. Vermenigvuldiging heeft alleen plaats bij contact met het levende dierlijke protoplasma.

In grachtwater kon aan enkele onder talrijke geïsoleerde chlorellen, na verloop van weken, alleen een sterke opzwelling worden waargenomen, het meerendeel bleef onveranderd, alle stierven ten slotte af.

Bij kleurlooze exemplaren van *Stentor polymorphus* liggen in enkele voedingsvacuolen »pseudochlorellen", dat is op gewone chlorellen veel gelijkende groene cellen, die niet verteerd worden, maar onveranderd blijven of zelfs enkele deelingen ondergaan. Deze dieren door voeding met de genoemde, rein gecultiveerde wieren, in door zoöchlorellen op de gewone wijze groen gekleurde individuen te veranderen, mislukten geheel, ofschoon de groene cellen in groote hoeveelheid werden opgenomen. Zelfs de pseudochlorellen konden daarbij niet tot sterke vermenigvuldiging worden gebracht, niettegenstaande de dieren zelve zich ten minste aanvankelijk wel hebben vermenigvuldigd.

De culturen der genoemde wieren en van de gonidiën van *Physcia* werden door den spreker gedemonstreerd.

Twee lagere draadwieren, geïsoleerd van iepschors, bleken in hun afhankelijkheid van organische voedselstoffen met de beschreven soorten overeen te stemmen. Daarentegen konden diatomeeën, afkomstig uit zeewater en uit een fijn gewreven *Hydra*-lichaam en *Raphidium polymorphum*, voort-

gekomen uit een voedingsvacuole van een fijngewreven *Stentor*, wel in grachtwater worden opgekweekt, maar niet bij de aanwezigheid van organische stoffen.

— De Heer Beijerinck spreekt verder over „*Kunstmatige infectie van Vicia Faba met Bacillus radicicola*".

Om uit te maken, dat de bacteriën, welke uit de knolletjes van *Vicia Faba* kunnen worden opgekweekt, ook de oorzaak van het ontstaan dier knolletjes zijn, en dat het aanwezig zijn of het ontbreken van stikstofhoudende voedselstoffen op het ontstaan daarvan zonder invloed is, werden de volgende proeven genomen.

In van binnen verglaasde bloempotten van bijzondere constructie, waardoor begieting mogelijk was zonder gevaar voor infectie van buiten, werd zuiver, langdurig met gedistilleerd water geslibd rivierzand gedaan, en alles te zamen in een grooten sterilisator met stoom bij $3^1/_2$ atmospheeren gesteriliseerd. 12 van zulke potten werden in 4 partijen, elk van drie stuks, verdeeld. In alle werd een zorgvuldig gesteriliseerde boon van *Vicia Faba* geplaatst, nadat deze op een gelatinelaag tot ontkieming was gebracht en alleen dan was goedgekeurd, wanneer daarbij volstrekt geen schimmels of bacteriën waren opgekomen.

Het steriliseeren der boonen had plaats gehad door herhaald afwasschen met alcohol en afbranden van de aanhangende vloeistof.

De vier partijen werden voor een venster in het laboratorium geplaatst en begoten met de volgende gesteriliseerde zoutoplossingen, vervaardigd volgens het voorschrift van Hellriegel.

Partij 1. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost per liter in grammen:

0.1 Kaliummonophosphaat
0.03 Chloorcalcium
0.06 Magnesiumsulfaat.

Partij 2. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij partij 1.

Partij 3. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij 1 met toevoeging van 0.2 gr. Calciumnitraat.

Partij 4. Met gedistilleerd water, waarin was opgelost hetzelfde als bij 1 met toevoeging van 0.2 gr. Ammoniumsulfaat.

Deze proeven begonnen den 2^en^ April. Toen alle planten het tweede blad hadden gevormd, is uit elk der partijen 2, 3 en 4 één pot gekozen, welke begoten is met een in gesteriliseerd duinwater opgeslibde gelatinecultuur van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, in 1889 geïsoleerd uit knolletjes van *Vicia Faba*. De 3 potten van partij 1 zijn alle op die wijze geïnfecteerd.

Op 20 Juni werd op de zaadlobben van een der planten schimmel gezien, reden waarom de proeven werden gestaakt.

Bij het onderzoek der wortels vertoonden alle zes met *Bacillus radicicola* geïnfecteerde planten knolletjes; alle andere exemplaren waren daarvan volkomen vrij. De aan- of afwezigheid van calciumnitraat of zwavelzure ammoniak waren blijkbaar op de infectie zonder invloed geweest.

Vernieuwde bacteriologische onderzoekingen van de weefsels van *Vicia Faba* hebben geleerd, dat *Bacillus radicicola* daarin niet voorkomt buiten de plaatsen waar zich bacteroïden bevinden, welke plaatsen vroeger zijn aangewezen. Van een doordringing der geheele plant met *Bacillus radicicola* is dus geen sprake.

Aangaande de voeding van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, en van *B. r. Robiniae*, werd nog vastgesteld, dat de snelste ontwikkeling daarvan wordt bewerkt door pepton en suiker. Op agar-agar, waarin alleen rietsuiker aanwezig is, staat de groei onzer bacteriën stil, zoodra de geringe hoeveelheid assimileerbare stikstof daaraan is onttrokken, zoodat binding van atmospherische stikstof, onder deze omstandigheden, volstrekt niet geschiedt.

Salpetervorming in eenigszins belangrijke hoeveelheid wordt door *Bacillus radicicola* niet bewerkt. Alleen oude gelatineculturen van *Bac. Ornithopi*, waarbij asparagine,

pepton en rietsuiker als voedsel hadden gediend, bevatten sporen van een stof, die de diphenylaminreactie gaf. Daarin waren bovendien calciumoxalaat en koolzure kalk gevormd.

Bij afwezigheid van organisch voedsel staat de groei stil. Volwasschen bacteriën, verdeeld in duinwater met magnesiumcarbonaat en 0.1 gram ammoniumsulfaat per liter, sterven spoedig af.

Meer en meer blijkt het verschil tusschen de vormen van *Bacillus radicicola*, afkomstig van verschillende Papilionaceeën, belangrijk te zijn. Zoo behoort *B. Ornithopi* van *Ornithopus perpusillus* zeker tot een andere soort dan *Bac. rad. Fabae*. Want *Vicia Faba*, geïnfecteerd met een gelatinecultuur van *Bac. Ornithopi* bracht geen knolletjes voort. Hierdoor wordt tevens verklaard, waarom de Serradella, *Ornithopus sativus*, in onze tuinen vrij blijft van knolletjes, groeiende tusschen *Vicia*-soorten, die daarmede rijk zijn beladen.

— De Heer Kamerlingh Onnes biedt voor de bibliotheek der Akademie de dissertatie aan van den Heer L. H. Siertsema: »De Jaminsche Interferentiaalrefractor en hiermede verrichte brekingsindices-bepalingen" en deelt in het kort de methode van werken mede van den auteur en de uitkomsten door hem verkregen.

De Heer Bierens de Haan biedt, namens den Heer C. Le Paige te Luik, diens brochure aan: »Notes pour servir à l'histoire des Mathématiques dans l'ancien Pays de Liège."

— De Heer Martin biedt eene verhandeling aan van den Heer Dr. H. van Cappelle, ter plaatsing in de werken der Akademie. Haar titel luidt: »Geologische resultaten van eenige in West-Drenthe en in het oostelijk deel van Overijssel verrichte grondboringen." De Heeren Behrens en Martin verklaren zich bereid daarover rapport uit te brengen in de September-Vergadering.

— De Vergadering wordt gesloten.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HR. J. C. KLUYVER,

GETITELD:

OVER STRALENSTELSELS, DIE UIT VIER ELKAAR KRUISENDE LIJNEN KUNNEN WORDEN AFGELEID.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Juni 1890).

De verhandeling van den Heer J. C. KLUYVER, over welke wij thans verslag uitbrengen, is te beschouwen als een belangrijke voortzetting eener in 1877 door A. Voss in de *Mathematische Annalen* gepubliceerde studie over vier raaklijnen aan een ruimtekromme R^3 van den derden graad. Door den genoemden hoogleeraar, toen woonachtig te Darmstadt, thans te München, is voor het eerst aangewezen, dat er tusschen de lijncoördinaten van vier raaklijnen eener zelfde R^3 een identieke betrekking bestaat en het vraagstuk een R^3 te construeeren, die vier gegeven lijnen aanraakt, derhalve òf onoplosbaar òf onbepaald is. Hieraan is dan het bewijs verbonden, dat de meetkundige plaats van de raaklijnen aan alle krommen R^3, die drie gegeven lijnen aanraken, een stralencomplex van de vierde orde is.

De Heer KLUYVER leidt eerst de reeds door Voss gevonden betrekking opnieuw af. In stede van uit te gaan van een R^3, neemt hij vier willekeurig gelegen lijnen 1, 2, 3, 4 als gegeven aan en bewijst hij, dat deze door

één en dus ook door een oneindig aantal krommen R^3 worden aangeraakt, als de vier regelscharen (234), (341), (412), (123) een gemeenschappelijke raaklijn z toelaten. Hiertoe moeten de wortels uit de bekende grootheden ($1z$), ($2z$), ($3z$), ($4z$) aan vier bepaalde homogene eerstemachtsvergelijkingen voldoen. Eliminatie van deze vier wortels geeft dan de verlangde betrekking $\Gamma = 0$ in determinantenvorm.

Voor het geval de vier lijnen de bijzondere ligging hebben, waarbij Γ nul is, zijn de wortels uit de grootheden ($1z$), ($2z$), ($3z$), ($4z$) evenredig met de eerste minoren van den gevonden determinant en dus deze grootheden zelve met de factoren van den hoofdterm in den toegevoegden determinant der minoren. Voor dit geval gelden dus de betrekkingen

$$\frac{(1z)}{\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{(2z)}{\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{(3z)}{\sqrt{(31)(32)(34)}} = \frac{(4z)}{\sqrt{(41)(42)(43)}}.$$

Nu is de schrijver op de gelukkige gedachte gekomen deze vergelijkingen eveneens aan te nemen, als aan de voorwaarde $\Gamma = 0$ niet voldaan is, en het daarmede overeenkomende stelsel lijnen z te onderzoeken; daardoor is het hem gelukt aan een geheel willekeurig gelegen viertal lijnen eenige eenvoudige stralenstelsels, regelscharen en ruimtekrommmen R^3 te verbinden, die — bedriegen wij ons niet — tot heden nog niet zijn onderzocht.

Met het oog op het dubbele teeken der wortels doen de hier afgeschreven vormen, twee aan twee aan elkaar gelijk gesteld, twaalf lineaire stralencomplexen kennen, die elkaar drie aan drie volgens zestien congruenties (1,1) en zes aan zes volgens twaalf regelscharen snijden. Deze ruimtefiguur vertoont de grootste analogie met de figuur gevormd door de twaalf deelvlakken van de standhoeken eens viervlaks, de zestien snijlijnen dier vlakken drie aan drie en de twaalf snijpunten dier vlakken zes aan zes. Van de twaalf snij-

punten vallen er vier met de hoekpunten des viervlaks samen, terwijl de andere acht de middelpunten zijn van de bollen, die de vier zijvlakken des viervlaks aanraken. Eveneens splitsen zich de twaalf regelscharen in de vier regelscharen (234), (341), (412), (123), die geen aan de vergelijkingen voldoende lijnen z opleveren, en in acht andere, die dit wel doen. En evenzoo als bij de middelpunten twee groepen van vier optreden, de middelpunten der aangeschreven bollen ter eene, die der andere ter andere zij, dewijl de deelvlakkenparen op de overstaande ribben bij de eerste groep steeds uit een inwendig en een uitwendig deelvlak en bij de tweede groep steeds uit gelijknamige deelvlakken bestaan, doet zich bij de acht regelscharen een verdeeling voor in twee groepen H_1, H_2, H_3, H_4 en H_5, H_6, H_7, H_8, die zooals dadelijk blijken zal geheel verschillende eigenschappen bezitten.

De schrijver schetst vervolgens de constructie der acht regelscharen. Hiertoe merkt hij op, dat de twee gemeenschappelijke transversalen f', f'' van de lijnen 1, 2, 3, 4 gemeenschappelijke beschrijvende lijnen zijn van alle en elk paar behalve deze twee beschrijvende lijnen f', f'' twee richtlijnen g', g'' gemeen heeft. Hij bewijst, dat deze twee richtlijnen voor twee regelscharen, die in dezelfde congruentie liggen (d. w. z. voor twee regelscharen overeenkomende met twee middelpunten met een der hoekpunten van het viervlak op een zelfde lijn gelegen), tevens de richtlijnen dier congruentie zijn en leidt een constuctie dezer lijnen af uit eenige merkwaardige kwadratische involuties, die zich bij vijf punten eener rechte lijn, enz. voordoen. Daarbij openbaart zich dan een ingrijpend verschil tusschen de beide viertallen van regelscharen. Als een der vier discriminanten van de vergelijkingen, die de lijnenparen g', g'' bepalen, nul wordt — en deze discriminanten zijn naar behooren factoren van Γ —, dan zijn alleen de beschrijvende lijnen van de regelschaar der tweede groep lijnen z, die de vier regelscharen (234), (341), (412), (123) aanraken, en voert dus elk dier lijnen tot een k^3, die de vier gegeven lijnen aanraakt. Verder voert de constructie der paren van gemeen-

schappelijke richtlijnen g', g'' tot de kennis der acht regelscharen H; daarbij blijkt dan tevens meetkundig of de vier gegeven lijnen een oneindig aantal rakende krommen R^3 toelaten of geen enkele.

Een tweede beteekenis verkrijgt de tweede groep der regelscharen in verband met drie eenvoudige nulstelsels van de derde orde. Splitst men de vier gegeven lijnen in twee paren $a\,b$ en $c\,d$, dan kan men met een willekeurig punt P het vlak door de beide op $(a\,b)$ en $(c\,d)$ rustende lijnen door P, met een willekeurig vlak π het snijpunt der verbindingslijnen van de snijpuntenparen van $(a\,b)$ en $(c\,d)$ met π doen overeenstemmen. Draait π nu om een rechte lijn l, dan doorloopt het overeenkomstige punt P een ruimtekromme R^3, een kegelsnee C^2 of een andere rechte lijn l', naarmate l geen, een, of beide de lijnen f', f'' snijdt. Nu vindt schrijver, dat l' een oppervlak F^6 van den zesden graad doorloopt, als l een regelschaar met f', f'' tot twee richtlijnen beschrijft, en dat dit oppervlak onafhankelijk is van de wijze van paring $(a\,b,\ c\,d)$ en dus voor de drie gevallen (23, 14), (31, 24), (12, 34) hetzelfde wordt, als de regelschaar van lijnen l het stelsel der richtlijnen vormt van een der vier regelscharen van de tweede groep. Met de beschrijvende lijnen van deze regelschaar komen weer krommen R^3 overeen, die op het overeenkomstige oppervlak F^6 asymptotische krommen vormen. En tusschen de snijpuntenparen van elk dier krommen R^3 met de lijnen 1, 2, 3, 4 bestaan invariante betrekkingen, die door den schrijver opgespoord en meetkundig verklaard worden.

Ten slotte keert de Heer Kluyver tot het bijzondere geval $\Gamma = 0$ terug. In dit geval zijn de vier lijnen 1, 2, 3, 4, die in het algemeene geval dubbelribben waren van de vier oppervlakken F^6, keerribben van die oppervlakken en raken de asymptotische krommen R^3 de vier lijnen aan. Dan zijn twee dezer krommen R^3 steeds te beschouwen èn als overeenkomstige krommen van twee collineair verwante ruimten (Voss), èn als overeenkomstige krommen van twee reciprook verwante ruimten, en kunnen dus alle krommen R^3 uit een enkele van hen worden afgeleid.

Voor alle krommen R^3, die de lijnen 1, 2, 3, 4 aanraken, heeft de dubbelverhouding der raakpunten dezelfde waarde λ; zijn λ' en λ'' de op overeenkomstige wijs genomen dubbelverhoudingen der snijpunten van 1, 2, 3, 4 met f', f'', dan geldt de betrekking $\lambda^4 = \lambda' \lambda''$.

Met de afleiding van enkele kenmerkende getallen der reeks van krommen R^3 eindigt de Heer KLUYVER zijn verdienstelijke verhandeling, waarvan wij U de opneming in de *Verslagen en Mededeelingen* met vol vertrouwen aanbevelen.

Amsterdam, Juni 1890,

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

OVER STRALENSTELSELS,

DIE

UIT VIER ELKAAR KRUISENDE LIJNEN KUNNEN WORDEN AFGELEID

DOOR

J. C. KLUYVER.



Kan men, wanneer vier lijnen 1, 2, 3 en 4 in de ruimte gegeven zijn, een ruimtekromme R^3 van den derden graad construeeren, die deze lijnen aanraakt? Licht zou men er toe komen, om die vraag bevestigend te beantwoorden. Immers een dergelijke kromme hangt van 12 constanten af; zij kan derhalve in het algemeen aan vier drievoudige voorwaarden voldoen.

Intusschen hebben SCHUBERT *) en VOSS †) aangetoond, dat vier willekeurige raaklijnen van een R^3 altijd door een invariante betrekking zijn verbonden. Bijgevolg worden 1, 2, 3 en 4 òf door geen enkele kromme òf door alle krommen R^3 van een enkelvoudig oneindig stelsel geraakt. De simultane invariant Γ der vier raaklijnen, die in het tweede geval nul wordt, is door VOSS berekend.

Het is nu naar aanleiding van deze uitkomsten, dat ik

---

*) *Kalkül der abzählenden Geometrie*, blz. 166.

†) *Mathematische Annalen*, XIII, blz. 168, „Ueber vier Tangenten einer Raumcurve dritter Ordnung".

in de volgende bladzijden de aandacht wensch te vestigen op een groep van covariante stralenstelsels en van daarmede samenhangende R^3, welke laatste door de onderstelling $\Gamma = 0$ in de aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen overgaan.

De analytische behandeling dezer figuren voert ten eerste tot een constructie, die veroorlooft langs meetkundigen weg te beslissen of vier willekeurig aangenomen lijnen de invariante voorwaarde $\Gamma = 0$ al of niet bevredigen. Ten tweede zal uit die behandeling worden afgeleid, hoe men de rakende krommen, indien zij voorhanden mochten zijn, zou kunnen construeeren, waarna ten slotte nog enkele eigenschappen dezer krommen een punt van onderzoek zullen uitmaken.

1. De afleiding van den invariant Γ vormt het natuurlijk uitgangspunt van de volgende beschouwingen. Daarbij is het gebruik van homogene lijncoördinaten als vanzelve aangewezen.

Wanneer x_1, y_1, z_1, w_1 en x_2, y_2, z_2, w_2 de homogene coördinaten van twee gegeven punten voorstellen, noemen wij in de schrijfwijze van SALMON de grootheden

$$p = y_1 z_2 - y_2 z_1, \quad q = z_1 x_2 - z_2 x_1, \quad r = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$
$$s = x_1 w_2 - x_2 w_1, \quad t = y_1 w_2 - y_2 w_1, \quad u = z_1 w_2 - z_2 w_1$$

de homogene coördinaten der verbindingslijn. Zij voldoen, zooals bekend is, aan de identieke betrekking

$$p s + q t + r u = 0.$$

Als twee lijnen g en h met de coördinaten $p_g, \ldots u_g$ en $p_h, \ldots u_h$ elkaar snijden, wordt de invariant

$$p_g s_h + p_h s_g + q_g t_h + q_h t_g + r_g u_h + r_h u_g$$

nul. Een invariant van dezen vorm zullen wij door het teeken $(g h)$ of $(h g)$ aanduiden. Terwijl Voss nu voor een gegeven kromme R^3 de coördinaten der raaklijn als bikwadratische functies van een parameter voorstelt, en met behulp van die voorstelling aantoont, dat tusschen de coördinaten van vier raaklijnen een invariante betrekking bestaat,

willen wij vier lijnen 1, 2, 3 en 4 als gegeven beschouwen en nagaan, of zij gelijktijdig door een R^3 kunnen worden geraakt. Onderstellen wij, dat een dergelijke kromme gevonden is, dan is er één regelvlak van den tweeden graad te construeeren, dat behalve de kromme ook de lijnen 1 en 2 bevat. Een tweede regelvlak is evenzeer bepaald door de kromme en haar raaklijnen 3 en 4. Beide oppervlakken snijden elkaar nog volgens een koorde z van R^3, welke koorde, omdat 3 raakt aan het oppervlak ($12\,z$), een raaklijn zal zijn van het regelvlak (321). Om dezelfde reden zullen ook de regelvlakken (234), (314) en (124) de koorde z tot raaklijn hebben.

Omgekeerd is het duidelijk, dat, zoo die vier regelscharen een gemeenschappelijke raaklijn z bezitten, de doorsnede van een tweetal hyperboloïden, zooals ($12\,z$) en ($34\,z$), een aan 1, 2, 3 en 4 rakende R^3 oplevert.

Wij trachten dus lijnen z te vinden, die de genoemde eigenschap vertoonen. Wij noemen y een willekeurige lijn uit de regelschaar (321) en merken op, dat haar coördinaten $p_y, \ldots u_y$ als lineaire functies zijn te beschouwen van de coördinaten $p_1, \ldots u_1, p_2, \ldots u_2, p_3, \ldots u_3$ der gegeven lijnen, zoodat wij steeds zes betrekkingen kunnen aannemen van den vorm

$$p_y = R_1 p_1 + R_2 p_2 + R_3 p_3,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$u_y = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3.$$

Immers voor iedere lijn x, waarvoor geldt $(1\,x) = 0$, $(2\,x) = 0$, $(3\,x) = 0$, zal daaruit volgen $(y\,x) = 0$. De veranderlijke coëfficienten R_1, R_2 en R_3, die in deze vergelijkingen voorkomen, moeten daarbij steeds de voorwaarde

$$R_2 R_3 (23) + R_3 R_1 (31) + R_1 R_2 (12) = 0$$

vervullen, omdat tusschen de coördinaten $p_y, \ldots u_y$ de betrekking

$$p_y s_y + q_y t_y + r_y s_y = 0$$

bestaat. Iedere lijn z snijdt twee lijnen y van de regelschaar. Uit de vergelijkingen

$$(y\,z) = R_1\,(1\,z) + R_2\,(2\,z) + R_3\; 3\,z) = 0,$$
$$R_2\,R_3\,(23) + R_3\,R_1\,(31) + R_1\,R_2\,(1\,z) = 0$$

kunnen toch twee stel waarden van R_1, R_2 en R_3 worden opgelost.

Deze beide lijnen y vallen samen, als de lijn en de kegelsnee, in homogene coördinaten R_1, R_2 en R_3 door bovenstaande vergelijkingen voorgesteld, elkaar aanraken, wat gebeurt onder de voorwaarde

$$\sqrt{(23)\,(1\,z)} + \sqrt{(31)\,(2\,z)} + \sqrt{(12)\,(3\,z)} = 0 \text{ *)}.$$

Gemeenschappelijke raaklijnen z van de vier regelvlakken (234), (314), (124) en (321) moeten derhalve de vier vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\;\; \sqrt{(34)(2z)} + \sqrt{(24)(3z)} + \sqrt{(23)(4z)} = 0 \\ \sqrt{(34)(1z)} \qquad\qquad\qquad\; + \sqrt{(14)(3z)} + \sqrt{(31)(4z)} = 0 \\ \sqrt{(24)(1z)} + \sqrt{(14)(2z)} \qquad\qquad\qquad\; + \sqrt{(12)(4z)} = 0 \\ \sqrt{(23)(1z)} + \sqrt{(31)(2z)} + \sqrt{(12)(3z)} \qquad\qquad\qquad\; = 0 \end{array}\right\}, \ldots (A)$$

bevredigen, wat slechts geschieden kan, wanneer de determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{(34)} & \sqrt{(24)} & \sqrt{(23)} \\ \sqrt{(34)} & 0 & \sqrt{(14)} & \sqrt{(31)} \\ \sqrt{(24)} & \sqrt{(14)} & 0 & \sqrt{(12)} \\ \sqrt{(23)} & \sqrt{(31)} & \sqrt{(12)} & 0 \end{vmatrix}$$

nul wordt.

Door een eenvoudige herleiding is deze determinant ook te brengen in de gedaante

---

*) Door CAYLEY is deze voorwaarde in determinantvorm gegeven. Men vergelijke: SALMON, *Geometry of three Dimensions*, 4th Ed., blz. 419.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{(12)} & \sqrt{(31)} & \sqrt{(14)} \\ \sqrt{(12)} & 0 & \sqrt{(23)} & \sqrt{(24)} \\ \sqrt{(31)} & \sqrt{(23)} & 0 & \sqrt{(34)} \\ \sqrt{(14)} & \sqrt{(24)} & \sqrt{(34)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Wij stellen hierin

$$a = (23)(14), \quad b = (31)(24), \quad c = (12)(34),$$
$$s_1 = a + b + c, \quad s_2 = bc + ca + ab, \quad s_3 = abc.$$

De vergelijking $\Delta = 0$ verkrijgt daardoor eerst den vorm

$$a + b + c - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{ca} - 2\sqrt{ab} = 0,$$

wat ten slotte herleid kan worden tot

$$\Gamma = (s_1^2 - 4\,s_2)^2 - 128\,s_1\,s_3 = 0.$$

Daarmede is de invariant Γ gevonden, waarvan het al of niet nul worden over de mogelijkheid van aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen R^3 beslist.

2. Blijkens de vergelijkingen (A) is in de onderstelling $\Gamma = 0$ de lijn z onbepaald, en kan men uit (A) de grootheden $(1\,z)$, $(2\,z)$, $(3\,z)$ en $(4\,z)$ oplossen. Wij hebben daartoe $\sqrt{(1\,z)}$, $\sqrt{(2\,z)}$, $\sqrt{(3\,z)}$ en $\sqrt{(4\,z)}$ evenredig te stellen met de eerste minoren $\Delta_{k,l}$ van Δ. Hieruit volgt, daar $\Delta_{k,l} = \Delta_{l,k}$ is,

$$\frac{\sqrt{(1\,z)}}{\sqrt{\Delta_{11}}} = \frac{\sqrt{(2\,z)}}{\sqrt{\Delta_{22}}} = \frac{\sqrt{(3\,z)}}{\sqrt{\Delta_{33}}} = \frac{\sqrt{(4\,z)}}{\sqrt{\Delta_{44}}},$$

of

$$\frac{(1\,z)}{\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{(2\,z)}{\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{(3\,z)}{\sqrt{(31)(32)(34)}} = \frac{(4\,z)}{\sqrt{(41)(42)(43)}},$$

korter geschreven

$$\frac{(1\,z)}{P_1} = \frac{(2\,z)}{P_2} = \frac{(3\,z)}{P_3} = \frac{(4\,z)}{P_4} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

Deze vergelijkingen doen zien, dat van een aan 1, 2, 3 en 4 rakende R^3 de koorden z gelegen zijn in zekere lineaire complexen, die men als covariante figuren van de vier gegeven lijnen heeft te beschouwen.

Evenwel is vanwege de verschillende teekens, die aan de wortelgrootheden P kunnen worden toegekend, een nader onderzoek dienaangaande onmisbaar.

3. Te dien einde merken wij op, dat ook in het algemeene geval, wanneer Γ van nul verschilt, de stralenstelsels door de vergelijkingen (B) aangewezen een meetkundige beteekenis hebben, waarvan wij ons rekenschap hebben te geven.

Beschouwen wij bijv. de vergelijking

$$(1\,z) = \pm \frac{P_1}{P_2}(2\,z),$$

die ook geschreven kan worden in den vorm

$$\left\{(1\,z) - \frac{(13)}{(23)}(2\,z)\right\} \pm \sqrt{\frac{(31)(24)}{(23)(14)}}\left\{(1\,z) - \frac{(14)}{(24)}(2\,z)\right\} = 0.$$

Zij stelt twee lineaire complexen voor, gelegen in den complexbundel, dien de beide ontaarde complexen $(1\,z) = 0$, $(2\,z) = 0$ bepalen. Verder volgt uit de beide schrijfwijzen der vergelijking, dat de door haar voorgestelde complexen harmonisch in den bundel zijn toegevoegd, zoowel ten opzichte van de genoemde ontaardingen, als ten opzichte van de beide bundelcomplexen

$$(1\,z) - \frac{(13)}{(23)}(2\,z) = 0,$$

$$(1\,z) - \frac{(14)}{(24)}(2\,z) = 0,$$

welke door de lijnen 3 en 4 kunnen worden gebracht.

Blijkens de vergelijkingen (B) hebben wij met twaalf dergelijke complexen te doen, waarvoor wij thans de volgende notatie invoeren

$$K_{\pm} \equiv (1\,z) \pm \frac{P_1}{P_4}(4\,z) = 0, \quad K_{\pm b} \equiv (2\,z) \pm \frac{P_2}{P_4}(4\,z) = 0,$$

$$K_{\pm c} \equiv (3\,z) \pm \frac{P_3}{P_4}(4\,z) = 0,$$

$$K_{\pm a_1} \equiv (2\,z) \pm \frac{P_2}{P_3}(3\,z) = 0, \quad K_{\pm b_1} \equiv (3\,z) \pm \frac{P_3}{P_1}(1\,z) = 0,$$

$$K_{\pm c_1} \equiv (1\,z) \pm \frac{P_1}{P_2}(2\,z) = 0.$$

Ter verkrijging van het juiste inzicht in het eigenaardig verband, dat er tusschen deze complexen bestaat, denken wij ons een willekeurig viervlak met de zijvlakken 1, 2, 3 en 4. De ribben in het zijvlak 4 noemen wij a, b en c, de overstaande ribben in volgorde a_1, b_1 en c_1.

De vorm der vergelijkingen $K_{\pm a} = 0, \ldots K_{\pm c_1} = 0$ herinnert nu als vanzelf aan de vergelijkingen, die in homogene viervlakscoördinaten de deelvlakken der twaalf standhoeken op de ribben $a, b, \ldots c_1$, voorstellen, wanneer wij het gedachte viervlak tot coördinatenviervlak nemen. Tusschen de configuratie der complexen K en die der twaalf deelvlakken bestaat een volkomen analogie, en wel komen overeen met

12 deelvlakken der standhoeken	12 complexen K,
16 snijlijnen der deelvlakken, drie aan drie	16 congruenties, doorsneden der complexen K drie aan drie,
8 snijpunten der deelvlakken zes aan zes (middelpunten van in- en aangeschreven bollen) . . .	8 hyperboloïden H, doorsneden der complexen K zes aan zes,
4 hoekpunten van het viervlak	de richtscharen van de regelscharen (234), (314), (124) en (321).

Uit de analogie blijkt verder, dat de hyperboloïden H twee aan twee met de richtschaar van een der vier regelscharen (234), (314), (124) en (321) in de 16 congruenties zijn gelegen. Immers in de overeenkomstige figuur liggen de middelpunten der in- en aangeschreven bollen twee aan twee met een der vier hoekpunten van het viervlak op 16 rechte lijnen. In iedere congruentie dus hebben de twee hyperboloïden H twee richtlijnen g' en g'' gemeen, die tevens beschrijvende lijnen zijn van een der vier regelscharen, welke de vier gegeven lijnen drie aan drie bepalen.

Overigens behooren de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4 tot de beschrijvende lijnen van iedere hyperboloïde H, omdat die lijnen f' en f'' in alle complexen K zijn gelegen.

De twee volgende tabellen hebben ten doel een overzicht te geven van de onderlinge ligging dezer acht hyperboloïden H_1, H_2, ... H_8. In de eerste tabel vindt men in de kolom links de hyperboloïden H, daarachter staan telkens de zes complexen K, die het oppervlak bepalen. In de eerste kolom van de tweede tabel zijn de regelscharen (234), (314), (124), (321) geplaatst, daarachter in de tweede kolom vindt men vier paren van hyperboloïden H, wier gemeenschappelijke richtlijnen g' en g'' in de regelschaar zijn gelegen.

Hyp.	Complexen.					
H_1	K_{+a}	K_{-b}	K_{-c}	K_{-a_1}	K_{+b_1}	K_{+c_1}
H_2	K_{-a}	K_{+b}	K_{-c}	K_{+a_1}	K_{-b_1}	K_{+c_1}
H_3	K_{-a}	K_{-b}	K_{+c}	K_{+a_1}	K_{+b_1}	K_{-c_1}
H_4	K_{+a}	K_{+b}	K_{+c}	K_{-a_1}	K_{-b_1}	K_{-c_1}
H_5	K_{-a}	K_{+b}	K_{+c}	K_{-a_1}	K_{+b_1}	K_{+c_1}
H_6	K_{+a}	K_{-b}	K_{+c}	K_{+a_1}	K_{-b_1}	K_{+c_1}
H_7	K_{+a}	K_{+b}	K_{-c}	K_{+a_1}	K_{+b_1}	K_{-c_1}
H_8	K_{-a}	K_{-b}	K_{-c}	K_{-a_1}	K_{-b_1}	K_{-c_1}

Regelscharen.	Gemeenschappelijke richtlijnen van:			
(234)	H_1 H_8	H_2 H_7	H_3 H_6	H_4 H_5
(314)	H_1 H_7	H_2 H_8	H_3 H_5	H_4 H_6
(124)	H_1 H_6	H_2 H_5	H_3 H_8	H_4 H_7
(321)	H_1 H_5	H_2 H_6	H_3 H_7	H_4 H_8

Uit deze tabellen mag men reeds afleiden, dat de oppervlakken H_5, H_6, H_7, H_8 zich eenigermate van de overige onderscheiden, welk onderscheid in het volgende nog meer op den voorgrond zal treden. Met H_8 stemt in de analoge figuur het middelpunt van den ingeschreven bol overeen, aan H_5, H_6 en H_7 zijn de middelpunten der drie bollen in de »daken" toegevoegd.

4. Wij kunnen gemakkelijk de hyperboloïden H door vergelijkingen voorstellen.

Iedere richtlijn y van zulk een oppervlak snijdt alle beschrijvende lijnen z en dus ook de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4. Daarom kunnen wij de coördinaten $p_y, \dots u_y$ van y altijd als lineaire functies van de coördinaten van 1, 2, 3 en 4 beschouwen, en wel kunnen wij schrijven

$$p_y = R_1 p_1 + R_2 p_2 + R_3 p_3 + R_4 p_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_y = R_1 u_1 + R_2 u_2 + R_3 u_3 + R_4 u_4.$$

De veranderlijke coëfficienten $R_1, \dots R_4$, die hierin voorkomen, moeten de voorwaarde

$$\Sigma R_2 R_3 (23) = R_2 R_3 (23) + R_3 R_1 (31) + R_1 R_2 (12) + \\ + R_1 R_4 (14) + R_2 R_4 (24) + R_3 R_4 (34) = 0$$

bevredigen, omdat steeds

$$p_y\, s_y + q_y\, t_y + r_y\, s_y = 0.$$

Maar wij hebben bovendien $(y\,z) = 0$, dus volgt met be hulp van (B)

$$\Sigma\, R_1\, P_1 = R_1\, P_1 + R_2\, P_2 + R_3\, P_3 + R_4\, P_4 = 0.$$

De zes vergelijkingen

$$p_y = \Sigma\, R_1\, p_1, \ldots u_y = \Sigma\, R_1\, u_1,$$

benevens de beide voorwaarden

$$\Sigma\, R_2\, R_3\, (23) = 0, \qquad \Sigma\, R_1\, P_1 = 0,$$

waarin de teekens der wortelgrootheden P te nemen zijn, zooals iedere hyperboloïde H volgens de voorafgaande tabellen dit vereischt, moeten nu als de analytische voorstelling dezer oppervlakken worden aangemerkt. De coëfficienten $R_1, \ldots R_4$ zijn daarbij als veranderlijke parameters te beschouwen.

5. Wij willen thans een meetkundige constructie voor de lijnen g' en g'' van art. 3 zoeken en daaruit de constructie der hyperboloïden H afleiden. Daar het hier van belang is die acht oppervlakken nauwkeurig van elkaar te onderscheiden, terwijl zij alle tegelijkertijd moeten worden opgespoord, is het verkieslijk die constructie op algebraïschen grondslag te doen rusten.

Wij nemen dan de regelschaar (321) en zoeken daarin de lijnen g' en g'', die volgens de tabel van art. 3 achtereenvolgens gemeen zijn aan H_1 en H_5, H_2 en H_6, H_3 en H_7, H_4 en H_8.

In de eerste plaats beginnen wij met de coördinaten van iedere lijn y der regelschaar als lineaire functies van de coördinaten der lijnen 1, 2 en 3 uit te drukken. Dit geschiedt, volgens art. 2, door te stellen

$$p_y = R_1\, p_1 + R_2\, p_2 + R_3\, p_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_y = R_1\, u_1 + R_2\, u_2 + R_3\, u_3,$$

$$R_2\, R_3\, (23) + R_3\, R_1\, (31) + R_1\, R_2\, (12) = 0.$$

Aan de laatste vergelijking wordt door de veranderlijke coëfficienten R_1, R_2 en R_3 voldaan, zoo men aanneemt, dat

$$\frac{R_1}{-2(\mu-1)(23)} = \frac{R_2}{(\mu^2-1)(31)} = \frac{R_3}{2(\mu+1)(12)}.$$

Zoo worden die coëfficienten kwadratische functies van een enkelen parameter μ, en wij hebben

$$p_y = -2(\mu-1)(23)p_1 + (\mu^2-1)(31)p_2 + 2(\mu+1)(12)p_3,$$

. . . .

$$u_y = -2(\mu-1)(23)u_1 + (\mu^2-1)(31)u_2 + 2(\mu+1)(12)u_3.$$

Daardoor is dan tegelijk aan iedere lijn y één waarde van μ toegevoegd en omgekeerd; bij 1, 2 en 3 behooren in volgorde de parameterwaarden -1, ∞, $+1$.

Wij bepalen de beide lijnen h' en h'' der regelschaar, die de lijn 4 snijden en stellen dus

$$0 = (4y) = -2(\mu-1)(23)(14) + (\mu^2-1)(31)(24) + \\ + 2(\mu+1)(12)(34).$$

Deze vergelijking, volgens de notatie van art. 1 te schrijven in den vorm

$$\mu^2 b + 2\mu(-a+c) + (2a-b+2c) = 0, \quad . \; . \; (C)$$

levert de beide waarden van μ, welke aan de lijnen h' en h'' zijn toegevoegd.

Op dezelfde wijze zoeken wij de waarden van μ, behoorende bij de lijnen g' en g''. Wij stellen

$$0 = (zy) = -2(\mu-1)(23)(1z) + (\mu^2-1)(31)(2z) + \\ + 2(\mu+1)(12)(3z),$$

waarin men te substitueeren heeft

$$\frac{(1z)}{\pm P_1} = \frac{(2z)}{\pm P_2} = \frac{(3z)}{\pm P_3}.$$

De teekens der wortelgrootheden P worden geregeld naar de eerste tabel van art. 3.

Na deeling door $\sqrt{(23)(31)(12)}$ worden wij dan gevoerd tot de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2\sqrt{b}+2\mu(\sqrt{a}+\sqrt{c})+(-2\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(\sqrt{a}-\sqrt{c})+(-2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(-\sqrt{a}-\sqrt{c})+(+2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c})=0\\ \mu^2\sqrt{b}+2\mu(-\sqrt{a}+\sqrt{c})+(+2\sqrt{a}-\sqrt{b}+2\sqrt{c})=0\end{array}\right\}, \ldots (D)$$

die nu achtereenvolgens de waarden van μ aangeven voor de lijnen g' en g'', gemeen aan H_1 en H_5, H_2 en H_6, H_3 en H_7, H_4 en H_8.

Met behulp van (C) kan men de dubbelelementen l' en l'', m' en m'', n' en n'' van de involuties

$$(23;\ h'\,h''),\quad (31;\ h'\,h''),\quad (12;\ h'\,h'')$$

bepalen.

Rechtstreeksche berekening leert, dat met de lijnen

$$\left.\begin{array}{l} l' \text{ en } l'' \\ \\ m' \text{ en } m'' \\ \\ n' \text{ en } n'' \end{array}\right\} \text{overeenkomen de parameterwaarden} \left\{\begin{array}{l} +1\pm 2\sqrt{\frac{c}{b}} \\ \\ \frac{\sqrt{a}\pm\sqrt{c}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{c}} \\ \\ -1\pm 2\sqrt{\frac{a}{b}} \end{array}\right. .$$

Voor elk willekeurig aangenomen vijftal van elementen 1, 2, 3, h' en h'' kunnen de drie paar dubbelelementen l' en l'', m' en m'', n' en n'' in drietallen gegroepeerd worden, die met het drietal 1, 2 en 3 in involutie zijn. Inderdaad zal men hier de involuties $(1\,l';\ 2\,m';\ 3\,n')$, $(1\,l'';\ 2\,m'';\ 3\,n'')$, $(1\,l'';\ 2\,m';\ 3\,n'')$, $(1\,l'';\ 2\,m'';\ 3\,n')$ aantreffen. Om dit in te zien, beschouwen wij bijv. de paren van elementen $1\,l'$, $2\,m'$, $3\,n'$. Daarmede komen, ingevolge het voorafgaande, overeen de drie binaire kwadratische vormen

$$\begin{array}{ll}\mu^2\sqrt{b}-2\mu\sqrt{c} & -(\sqrt{b}+2\sqrt{c}),\\ \quad +2\mu(\sqrt{a}-\sqrt{c}) & -(2\sqrt{a}+2\sqrt{c}),\\ \mu^2\sqrt{b}-2\mu\sqrt{a} & +(2\sqrt{a}-\sqrt{b}),\end{array}$$

wier determinant naar behooren nul wordt. Zoo kan men zich ook van het bestaan der andere involuties overtuigen.

Daarmede zijn de zes elementen $l', l'', \dots n''$ gerangschikt.

Wij beschouwen nu de vier overblijvende drietallen

$$l'' m'' n'', \quad l' m' n'', \quad l' m'' n', \quad l'' m' n'',$$

en onderzoeken de navolgende vier groepen van involuties

$$\text{I}\begin{cases}(11\,;\, m'' n'')\\(22\,;\, n'' l'')\\(33\,;\, l'' m'')\end{cases},\quad \text{II}\begin{cases}(11\,;\, m' n'')\\(22\,;\, n'' l')\\(33\,;\, l' m')\end{cases},\quad \text{III}\begin{cases}(11\,;\, m'' n')\\(22\,;\, n' l')\\(33\,;\, l' m'')\end{cases},$$

$$\text{IV}\begin{cases}(11\,;\, m' n')\\(22\,;\, n' l'')\\(33\,;\, l'' m')\end{cases}.$$

Men kan bewijzen, dat, hoe de elementen 1, 2, 3, h en h'' ook worden aangenomen, de involuties van iedere groep een elementenpaar gemeen hebben. Laten wij dit bijv. voor de derde groep aantoonen en tegelijkertijd de parameterwaarden voor dit elementenpaar berekenen.

Daar de waarden van μ voor de elementen $l', l'', \dots n''$ bekend zijn, kunnen wij de binaire vormen aangeven, die met de paren $m'' n'$, $n' l'$, $l' m''$, 11, 22 en 33 overeenkomen. Als zoodanig vindt men

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2(\sqrt{bc}+\sqrt{ab})+2\mu(-a+\sqrt{bc}-\sqrt{ca})+\\ \qquad\qquad +(2a+\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}-\sqrt{ab}),\\ \mu^2\sqrt{bc}+2\mu\sqrt{bc}+\sqrt{bc}\end{array}\right\}\text{voor } m'' n' \text{ en } 11,$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2 b+2\mu(-\sqrt{bc}-\sqrt{ab})+\\ \qquad\qquad +(-b-2\sqrt{bc}+4\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}),\\ 0.\mu^2+0.\mu+4\sqrt{ca}\end{array}\right\}\text{voor } n' l' \text{ en } 22,$$

$$\left.\begin{array}{l}\mu^2(\sqrt{bc}+\sqrt{ab})+2\mu(-c-\sqrt{ca}-\sqrt{ab})+\\ \qquad\qquad +(-2c-\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+\sqrt{ab}),\\ \mu^2\sqrt{ab}-2\mu\sqrt{ab}+\sqrt{ab}\end{array}\right\}\text{voor } l' m'' \text{ en } 33.$$

Trekt men bij ieder tweetal vormen den tweeden van den eersten af, dan komt men na geringe vereenvoudiging neer op

$$\mu^2 \sqrt{b} + 2\mu(-\sqrt{a}-\sqrt{c}) + (2\sqrt{a}-\sqrt{b}-2\sqrt{c}).$$

Volgens de vergelijkingen (D) zijn de door dezen vorm aangewezen elementen de gemeenschappelijke richtlijnen g' en g'' van de hyperboloïden H_3 en H_7. Die lijnen zijn dus de gemeenschappelijke elementen van de involuties der groep III.

Het kost weinig moeite dit onderzoek ook tot de overige groepen uit te strekken, en tot het besluit te geraken, dat de gemeenschappelijke elementen der involuties van

groep	I	aanwijzen de richtlijnen g' en g'', gemeen aan de hyperboloïden	H_1 en H_5
	II		H_2 en H_6
	III		H_3 en H_7.
	IV		H_4 en H_8

De elementen h', h'', l',... n'', die wij in de voorafgaande beschouwingen aantroffen, kunnen door meetkundige constructie worden bepaald. Ook het opsporen der lijnen g' en g'' kan derhalve werkelijk langs meetkundigen weg geschieden. Als men de daartoe benoodigde constructies herhaalt, maar nu met betrekking tot de regelschaar (124) worden van iedere hyperboloïde H vier richtlijnen gevonden; daarmede zijn die oppervlakken zelve geconstrueerd.

6. Wij willen nagaan onder welke omstandigheden de beide lijnen g' van g'' van een paar zouden kunnen samen vallen. Met dit doel berekenen wij de discriminanten zoowel voor de vier vergelijkingen (D) als voor de 12 andere, die ten opzichte van de regelscharen (234), (314), (124) van overeenkomstige beteekenis zijn. In de volgende tabel zijn de uitkomsten van die berekening opgenomen.

Discriminanten.	(234)	314)	(124)	(321)
$a+b+c-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}-2\sqrt{ab}$	H_1H_8	H_2H_8	H_3H_8	H_4H_8
$a+b+c+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}-2\sqrt{ab}$	H_2H_7	H_1H_7	H_4H_7	H_3H_7
$a+b+c+2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$	H_3H_6	H_4H_6	H_1H_6	H_2H_6
$a+b+c-2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$	H_4H_5	H_3H_5	H_2H_5	H_1H_5

De 16 onderzochte vergelijkingen bezitten te zamen slechts vier verschillende discriminanten, die in de eerste kolom zijn geplaatst. In de volgende kolommen vindt men voor elk der vier regelscharen (234), (314), (124), (321) aangegeven, bij welk tweetal hyperboloïden H de vooraanstaande discriminant behoort.

Al dadelijk valt het in het oog, dat de vier discriminanten de factoren van den invariant Γ zijn, en dat de hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8 zich geheel anders gedragen dan de overige. Er blijkt namelijk, dat voor $\Gamma = 0$, altijd van één dezer vier oppervlakken de beschrijvende lijnen z zullen raken aan de regelscharen (234), (314), (124) en (321). De lijnen z van de hyperboloïden H_1, H_2, H_3 en H_4 daarentegen kunnen nooit gemeenschappelijke raaklijnen dezer regelscharen zijn. En nu is het duidelijk, hoe men meetkundig kan onderzoeken, of vier gegeven lijnen door een R^3 kunnen worden geraakt. Men behoeft slechts de richtlijnen g' en g'' op te sporen, die de hyperboloïden H met de regelschaar (321) gemeen hebben. Vallen voor een tweetal dezer oppervlakken, bijv. voor H_4 en H_8 de lijnen g' en g'' samen, dan voltooit men de constructie van H_8. Zoo men daarna op H_8 een willekeurige beschrijvende lijn z aanneemt, zullen de hyperboloïden ($23\,z$) en ($14\,z$), ($31\,z$) en ($24\,z$), ($12\,z$) en ($34\,z$) paarsgewijze elkaar doorsnijden volgens krommen R^3, welke aan 1, 2, 3 en 4 raken.

Het volledige stelsel dier krommen wordt gevonden, als men de lijn z het oppervlak H_8 laat doorloopen.

Desverkiezende echter kan men, zooals Voss opmerkt, ook uit één der rakende R^3 door een vrij eenvoudige constructie alle overige afleiden.

7. Voor wij evenwel tot de beschouwing van het bijzondere geval $\Gamma = 0$ overgaan, willen wij eerst wijzen op een niet onbelangrijke eigenschap der hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8, die het onderscheid tusschen deze vier oppervlakken en de vier overige nog duidelijker in het licht stelt. De vier gegeven lijnen kunnen op drie verschillende wijzen in paren worden gerangschikt. Iedere daardoor verkregen combinatie bijv. (23 ; 14) bepaalt, zooals wij zullen zien, een zooge-

naamd nulsysteem van hoogere orde. Van dergelijke stelsels sprekende, denken wij aan een verwantschap, waardoor aan elk punt een door dit punt gelegd vlak, aan elk vlak een in dit vlak gelegen punt is toegevoegd. Men noemt het nulsysteem van de eerste orde, wanneer met de punten eener rechte lijn de vlakken van een vlakkenbundel overeenkomen en omgekeerd.

Ten aanzien van de combinatie (23 ; 14) nu houdt men in het oog, dat door ieder willekeurig punt een snijlijn van 2 en 3, benevens een snijlijn van 1 en 4 gaat Het vlak dezer snijlijnen kan dus als nulvlak aan het aangenomen punt worden toegevoegd. Omgekeerd treft men in een willekeurig vlak een snijlijn van 2 en 3, benevens een snijlijn van 1 en 4 aan. Het snijpunt dezer lijnen mag als het nulpunt van het vlak worden aangemerkt. Daarmede is uit de combinatie (23 ; 14) een nulsysteem afgeleid. Er kan gemakkelijk worden aangetoond, dat het nulpunt een ruimtekromme R^3 doorloopt, als het nulvlak wentelt om een rechte lijn, en dat met de punten van een puntreeks de raakvlakken van een ontwikkelbaar oppervlak van de derde klasse als nulvlakken overeenkomen. Nog eenvoudiger wordt het, wanneer men te doen heeft met een rechte lijn l, die op de beide transversalen f' en f'' van 1, 2, 3 en 4 rust. Aan de punten van l zijn toegevoegd de vlakken door een zekere lijn x, die eveneens f' en f'' ontmoet, terwijl omgekeerd de vlakken door de lijn l de nulvlakken zijn van de punten der lijn x. De overeenkomst tusschen l en x draagt een involutorisch karakter. Wij zoeken naar de meetkundige plaats van x in de onderstelling, dat l een regelschaar beschrijft. Daar deze laatste lijn altijd op f' en f'' blijft rusten, mag men als in art. 4 haar coördinaten aangewezen denken door de zes vergelijkingen

$$p_l = \Sigma A_1 p_1, \ldots \ldots u_l = \Sigma A_1 u_1,$$

waarbij de veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ gebonden zijn aan de reeds meervermelde voorwaarde

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0.$$

Tusschen die coëfficienten bestaat echter, omdat l een regelschaar doorloopt, nog een tweede en wel lineaire betrekking, die men kan schrijven

$$\Sigma \pi_1 A_1 = \pi_1 A_1 + \pi_2 A_2 + \pi_3 A_3 + \pi_4 A_4 = 0.$$

Voor de aan l toegevoegde lijn x kan men op dezelfde wijze handelen en stellen

$$p_x = \Sigma V_1 p_1, \ldots u_x = \Sigma V_1 u_1,$$
$$\Sigma V_2 V_3 (23) = 0.$$

Men bedenkt, ter bepaling van de coëfficienten $V_1, \ldots V_4$, dat iedere lijn, die 1, 4 en l of 2, 3 en l snijdt, ook x ontmoet. Dit vereischt

$$V_1 = \varrho A_1, \quad V_2 = \sigma A_2, \quad V_3 = \sigma A_3, \quad V_4 = \varrho A_4.$$

Substitutie van deze waarden van $V_1, \ldots V_4$ in de vergelijking

$$\Sigma V_2 V_3 (23) = 0$$

levert

$$\varrho^2 A_1 A_4 (14) + \varrho \sigma \{A_3 A_1 (31) + A_1 A_2 (12) + A_2 A_4 (24) + $$
$$+ A_3 A_4 (34)\} + \sigma^2 A_2 A_3 (22) = 0,$$

waaruit in verband met

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0$$

volgt

$$(\varrho - \sigma) \{\varrho A_1 A_4 (14) - \sigma A_2 A_3 (23)\} = 0.$$

Daar, zoolang l en x niet samenvallen, ϱ en σ verschillend zijn, komt men tot de gevolgtrekking

$$\varrho = A_2 A_3 (23), \ \sigma = A_1 A_4 (14),$$

zoodat ten slotte de coördinaten van x worden uitgedrukt door zes vergelijkingen van den vorm

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 +$$
$$+ A_2 A_3 A_4 (23) p_4 \ldots\ldots\ldots \text{(E)}$$

De daarin voorkomende veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ moeten voldoen aan de twee voorwaarden

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 A_1 = 0.$$

Uit dit alles mag men opmaken, dat de lijn x tot meetkundige plaats heeft een unicursaal regelvlak F^6 van den zesden graad, waarop de gegeven lijnen 1, 2, 3 en 4 als dubbelstralen voorkomen. Als men in aanmerking neemt, dat iedere beschrijvende lijn van de regelschaar (321) zes lijnen x, elke lijn x daarentegen slechts twee van die beschrijvende lijnen treft, dan volgt bovendien, dat de beide transversalen f' en f'' drievoudige lijnen van F^6 zijn. Dit oppervlak stelt nu voor, zoowel de omhullende van de nulvlakken der punten van de door l beschreven hyperboloïde, als de meetkundige plaats der nulpunten van de aan die hyperboloïde rakende vlakken.

8. Maar naast de combinatie (23 ; 14) staan de beide andere (31 ; 24) en (12 ; 34), en zoo zijn dus aan de door l beschreven hyperboloïde niet één, maar drie oppervlakken F^6 toegevoegd. Wij stellen de vraag, of het mogelijk is de hyperboloïde zoo te kiezen, dat de drie regelvlakken samenvallen. Om dit te onderzoeken, beschouwen wij de vergelijkingen (E), verwisselen hierin eerst 3 met 4, daarna 2 met 3, en verkrijgen daardoor de analytische voorstelling van de beide regelvlakken F^6, waartoe de combinaties (31 , 24) en (12 , 34) aanleiding geven. Aldus vindt men naast de vergelijkingen van het eerste regelvlak

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 + \\ + A_2 A_3 A_4 (23) p_4,$$

$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 A_1 = 0,$$

voor het tweede

$$p_x - B_1 B_2 B_4 (24) p_1 + B_1 B_2 B_3 (31) p_2 + B_2 B_3 B_4 (24) p_3 + \\ + B_1 B_3 B_4 (31) p_4,$$

$$\Sigma B_2 B_3 (23) = 0, \Sigma \pi_1 B_1 = 0,$$

en voor het derde

$$p_s = C_1 C_3 C_4 (34) p_1 + C_2 C_3 C_4 (34) p_2 + C_1 C_2 C_3 (12) p_3 + \\ + C_1 C_2 C_4 (31) p_4,$$

$$\Sigma\, C_2\, C_3\, (23) = 0,\ \Sigma\, \pi_1\, C_1 = 0.$$

Zullen nu door deze drie groepen van vergelijkingen, de coördinaten van dezelfde lijn x kunnen worden voorgesteld, dan moeten de veranderlijke coëfficienten $A_1, \ldots A_4$, $B_1, \ldots B_4$, $C_1, \ldots C_4$ voldoen aan de betrekkingen

$$\frac{B_1}{A_2 (23)(24)} = \frac{B_2}{A_1 (31)(14)} = \frac{B_3}{A_4 (14)(24)} = \frac{B_4}{A_3 (23)(31)},$$
$$\frac{C_1}{A_3 (23)(34)} = \frac{C_2}{A_4 (14)(34)} = \frac{C_3}{A_1 (12)(14)} = \frac{C_4}{A_2 (23)(12)}.$$

Inderdaad volgt in die onderstelling uit $\Sigma\, A_2\, A_3\, (23) - 0$, dat ook de voorwaarden

$$\Sigma\, B_2\, B_3\, (23) = 0\,, \qquad \Sigma\, C_2\, C_3\, (23) = 0$$

zijn bevredigd. De overige betrekkingen tusschen de coëfficienten evenwel bepalen de nog onbekende grootheden $\pi_1, \ldots \pi_4$. Men vindt namelijk

$$\frac{\pi_1}{\pi_2 (31)(14)} = \frac{\pi_2}{\pi_1 (23)(24)} = \frac{\pi_3}{\pi_4 (23)(31)} = \frac{\pi_4}{\pi_3 (14)(24)},$$
$$\frac{\pi_1}{\pi_3 (12)(14)} = \frac{\pi_2}{\pi_4 (23)(12)} = \frac{\pi_3}{\pi_1 (23)(34)} = \frac{\pi_4}{\pi_2 (14)(34)}.$$

Hieraan kan worden voldaan, als men stelt

$$\frac{\pi_1}{\pm\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{\pi_2}{\pm\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{\pi_3}{\pm\sqrt{(31)(32)(34)}} = \\ = \frac{\pi_4}{\pm\sqrt{(41)(42)(43)}}.$$

De teekens der hierin voorkomende wortelgrootheden zijn zoo te kiezen, dat steeds

$$\pi_1\, \pi_3\, (24) = +\, \pi_2\, \pi_4\, (31).$$

De wortelgrootheden zelve troffen wij reeds in art. 1 aan; zij werden daar door de letters $P_1, \dots P_4$ aangeduid.

Uit het voorafgaande komt men tot het besluit, dat de lijn l vier hyperboloïden kan beschrijven, die aan den gestelden eisch beantwoorden, en wel hyperboloïden, aangewezen door de vergelijkingen

$$p_l = \Sigma A_1 p_1, \dots u_l = \Sigma A_1 u_1,$$
$$\Sigma A_2 A_3 (23) = 0, \quad \Sigma A_1 P_1 = 0,$$

in welke laatste voorwaarde men de teekens van $P_1, \dots P_4$ te nemen heeft, zooals de onderstaande tabel dit aangeeft.

P_1	P_2	P_3	P_4	
+	—	—	+	H_5
+	—	+	—	H_6
+	+	—	—	H_7
+	+	+	+	H_8

En nu blijkt door vergelijking met hetgeen in art. 3 werd afgeleid, dat de lijnen l niet anders zijn dan de richtlijnen y van de vier hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8. Alleen aan deze hyperboloïden komt derhalve de eigenschap toe, dat de omhullende van de nulvlakken hunner punten, of wat hetzelfde is, de meetkundige plaats van de nulpunten hunner raakvlakken steeds gevormd wordt door hetzelfde regelvlak F^6, onverschillig van welk der drie beschouwde nulsystemen men moge uitgaan. De coördinaten van de beschrijvende lijnen x van dit regelvlak zijn dan bepaald door de vergelijkingen

$$p_x = \Sigma V_1 p_1, \dots u_x = \Sigma V_1 u_1,$$
$$\Sigma V_2 V_3 (23) = 0, \quad \Sigma \frac{1}{V_1 P_1} = 0.$$

De teekens der grootheden $P_1, \dots P_4$ worden geregeld volgens de voorafgaande tabel.

9. Aan de lijnen z' van een der vier besproken hyperboloïden H zijn thans door middel van een der drie nulsystemen, bijv. (12; 34), zekere ruimtekrommen R^3 toegevoegd, die op het met H overeenkomende oppervlak F^6 zijn gelegen. De nulvlakken van de punten van een dezer krommen omhullen de toegevoegde lijn z', de kromme zelve heeft de lijnen 1, 2, 3, 4 en z' tot koorden en gaat, zooals in art. 6 werd opgemerkt, voor het geval $\Gamma = 0$ in een aan 1, 2, 3 en 4 rakende kromme over.

In het algemeene geval $\Gamma \lesseqgtr 0$ vertegenwoordigen de vier paar snijpunten van R^3 met 1, 2, 3 en 4 vier binaire kwadratische vormen $f_1, \ldots f_4$, waartusschen invariante betrekkingen bestaan, die wij willen onderzoeken.

De vier vormen

$$f_1 = a_x^2, \quad f_2 = b_x^2, \quad f_3 = c_x^2, \quad f_4 = d_x^2$$

bezitten de gemeenschappelijke invarianten

$$A_{11} = (a\,a')^2, \quad A_{23} = (b\,c)^2, \quad R_{23} = A_{22}\,A_{33} - A^2_{23},$$
$$R_{234} = (b\,c)\,(b\,d)\,(c\,d), \text{ enz.}$$

Daarbij is altijd voldaan aan de identiteit

$$0 = R_{234} f_1 + R_{314} f_2 + R_{124} f_3 + R_{321}\, f_4.$$

Laten wij aannemen, dat de lijn z' op R^3 een puntenpaar bepaalt, voorgesteld door den binairen vorm f_0, dan heeft men, omdat de vormen f_0, f_1 en ${}_2$, zoowel als de vormen f_0, f_3 en f_4 in involutie zijn,

$$f_0 = R_{234} f_1 + R_{314} f_2 = - R_{124} f_3 - R_{321}\, f_4,$$

waaruit volgt

$$R_{10} = R^2_{314}\, R_{12}, \quad R_{20} = R^2_{234}\, R_{12}, \quad R_{30} = R^2_{321}\, R_{34},$$
$$R_{40} = R^2_{124}\, R_{34}.$$

In de voorloopige onderstelling, dat wij met de hyperboloïde H_3 te doen hebben, is volgens de vergelijkingen (B) van art. 2

$$\frac{(1\,z)}{\sqrt{(12)\,(13)\,(14)}} = \frac{(2\,z)}{\sqrt{(21)\,(23)\,(24)}} = \frac{(3\,z)}{\sqrt{(31)\,(32)\,(34)}} =$$
$$= \frac{(4\,z)}{\sqrt{(41)\,(42)\,(43)}}.$$

Maar blijkbaar zijn hier de invarianten (1 z), (12), enz. evenredig te stellen aan de resultanten R_{10}, R_{12}, enz., zoo dat men verkrijgt

$$\frac{R^2{}_{234}}{\sqrt{R_{23}R_{24}R_{34}}} = \frac{R^2{}_{314}}{\sqrt{R_{31}R_{14}R_{34}}} = \frac{R^2{}_{124}}{\sqrt{R_{12}R_{14}R_{24}}} = \frac{R^2{}_{321}}{\sqrt{R_{23}R_{31}R_{12}}}. \quad \text{(F)}$$

Om de beteekenis van deze drievoudige betrekking tusschen vier binaire vormen beter te doen uitkomen, is het wenschelijk ze eerst in een andere gedaante te brengen.

Uit (F) volgt onmiddellijk

$$\frac{R^6{}_{321}}{R_{23}\,R_{31}\,R_{12}} = \frac{R^2{}_{234}\,R^2{}_{314}\,R^2{}_{124}}{R_{14}\,R_{24}\,R_{34}}.$$

Deeling door

$$\frac{R^4{}_{321}}{R_{23}\,R_{31}\,R_{12}} = \frac{R^4{}_{234}}{R_{23}\,R_{24}\,R_{34}}$$

geeft

$$R^2{}_{321}\,R_{14} = + \frac{R^2{}_{314}\,R^2{}_{124}}{R^2{}_{234}}\,R_{23} \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad \text{(G)}$$

Op te merken valt, dat die vergelijking geldig blijft, zoo men van de hyperboloïden H_5, H_6 of H_7 uitgaat. Daarentegen verkrijgt het tweede lid het negatieve teeken, als men de lijn z' aanneemt op een der hyperboloïden H_1, H_2, H_3 of H_4.

De identiteit

$$-R_{321}\,f_4 = R_{234}\,f_1 + R_{314}\,f_2 + R_{124}\,f_3$$

voert tot de vergelijking

$$R^2{}_{321}R_{14} = R^2{}_{314}R_{12} + R^2{}_{124}R_{31} - 2R_{314}R_{124}(A_{12}A_{31} - A_{23}A_{11}).$$

Brengt men deze in verband met de vergelijking (G), dan komt er

$$0 = -R^2_{314} R^2_{124} R_{23} + R^2_{124} R^2_{234} R_{31} + R^2_{234} R^2_{314} R_{12} - $$
$$- 2 R^2_{234} R_{314} R_{124} (A_{12} A_{31} - A_{23} A_{11}).$$

Cyclische verwisseling van 1, 2 en 3 levert nog twee andere vergelijkingen van dezelfde gedaante, te weten:

$$0 = R^2_{314} R^2_{124} R_{23} - R^2_{124} R^2_{234} R_{31} + R^2_{234} R^2_{314} R_{12} -$$
$$- 2 R^2_{314} R_{124} R_{234} (A_{23} A_{12} - A_{31} A_{22}),$$

$$0 = R^2_{314} R^2_{124} R_{23} + R^2_{124} R^2_{234} R_{31} - R^2_{234} R^2_{314} R_{12} -$$
$$- 2 R^2_{124} R_{234} R_{314} (A_{31} A_{23} - A_{12} A_{33}).$$

Zoo men daarin kortheidshalve stelt

$$a = R_{23}, \quad b = R_{31}, \quad c = R_{12},$$

$$f = A_{12} A_{31} - A_{23} A_{11}, \quad g = A_{23} A_{12} - A_{31} A_{22},$$
$$h = A_{31} A_{23} - A_{12} A_{33},$$

zal men deze drie vergelijkingen kunnen vervangen door de onderstaande

$$0 = \quad a R_{314} R_{124} - h R_{124} R_{234} - g R_{234} R_{314},$$

$$0 = - h R_{314} R_{124} + b R_{124} R_{234} - f R_{234} R_{314},$$

$$0 = - g R_{314} R_{124} - f R_{124} R_{234} + c R_{234} R_{314}.$$

Deze vergelijkingen nu kunnen niet gelijktijdig bestaan, tenzij men heeft

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & -h & -g \\ -h & b & -f \\ -g & -f & c \end{vmatrix} = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 - 2fgh = 0 \ldots (H)$$

En daarmede zijn eindelijk de betrekkingen (F) tusschen de vier vormen teruggebracht tot vier voorwaarden van de gedaante $\Delta' = 0$, waarin er telkens slechts drie voorkomen. Deze vier voorwaarden zijn natuurlijk slechts met drie onaf-

hankelijke betrekkingen gelijkwaardig. Men kan gemakkelijk speciale vormen aangeven, die er aan voldoen, door bijv. uit te gaan van de onderstelling

$$a = b = c,$$
$$f = g = h.$$

Begeert men daarbij werkelijk verschillende vormen, wier discriminanten niet nul worden, en waarvan geen drie in involutie zijn, dan moet men nemen $a = -2$, $f = +\frac{2}{3}$, waardoor men neerkomt op de vier zoogenaamde vormen van den kubus *), welker produkt wordt voorgesteld door

$$xy(x^6 - 8x^3y^3 - 8y^6),$$

en die voldoen aan de identieke betrekkingen

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0, \quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = 0.$$

10. Hiermede is evenwel de meetkundige beteekenis van de invariante voorwaarden (F) of (H) nog niet gevonden.

Om de te onderzoeken figuur te vereenvoudigen, nemen wij op de in het vorige artikel beschouwde kromme R^3 een willekeurig punt, en projecteeren daaruit de kromme met haar vier koorden 1, 2, 3 en 4 op een willekeurig plat vlak. Door die bewerking verkrijgt men een kegelsnee C^2 met vier harer snijlijnen 1, 2, 3 en 4. De puntenparen, waarin 1, 2 en 3 de kegelsnee treffen, bepalen weder drie binaire kwadratische vormen, waartusschen nog steeds de betrekking (H) bestaat. Het is de vraag, welke bijzondere ligging de drie lijnen, ingevolge de voorwaarde (H), ten opzichte van C^2 vertoonen.

Laten wij aannemen, dat ten opzichte van een niet nader aangeduiden coördinatendriehoek XYZ de kegelsnee C^2 tot vergelijking heeft

$$XY - Z^2 = 0.$$

---

*) GORDAN-KERSCHENSTEINER, *Vorlesungen über Invariantentheorie*, II, blz. 161.

De coördinaten van de punten dezer kromme zijn op de gebruikelijke wijze uit te drukken in een parameter μ volgens de vergelijkingen

$$\frac{X}{\mu^2} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{\mu}.$$

Als wij onderstellen, dat de bovenvermelde drie binaire vormen zijn

$$f_1 = a_0 \mu^2 + 2 a_1 \mu + a_2,$$
$$f_2 = b_0 \mu^2 + 2 b_1 \mu + b_2,$$
$$f_3 = c_0 \mu^2 + 2 c_1 \mu + c_2,$$

vinden wij voor de vergelijkingen der lijnen 1, 2 en 3 in volgorde

$$0 = x = a_0 X + a_2 Y + 2 a_1 Z,$$
$$0 = y = b_0 X + b_2 Y + 2 b_1 Z,$$
$$0 = z = c_0 X + c_2 Y + 2 c_1 Z,$$

waaruit men afleidt

$$X = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad Y = 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \quad Z = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_0 & b_0 & c_0 \end{vmatrix}.$$

De vergelijking van de kegelsnee C^2 ten opzichte van den coördinatendriehoek met 1, 2 en 3 als zijden wordt verkregen door deze waarden in

$$X Y - Z^2 = 0$$

te substitueeren. Als zoodanig vindt men na eenige herleiding

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + 2 f y z + 2 g z x + 2 h x y = 0.$$

De coëfficienten a, b, c, f, g en h hebben hierin de beteekenis, die wij in het vorige artikel daaraan toekenden.

Beschouwt men deze uitkomst in verband met de voor-

waarde (H), dan is de meetkundige vertolking van de invariante betrekking $\Delta = 0$ aan geen bezwaar meer onderhevig. Een bekende stelling *) toch leert, dat in het geval

$$\Delta' = abc - af^2 - bg^2 - ch^2 - 2fgh = 0,$$

de zes lijnen uit de hoekpunten van den coördinatendriehoek, getrokken naar de snijpunten van de kegelsnee C^2 met de overstaande zijden, drie aan drie door twee punten gaan.

De krommen R^3, die door middel van de in art. 7 beschouwde nulsystemen, aan de beschrijvende lijnen z van de hyperboloïden H_5, H_6, H_7 en H_8 zijn toegevoegd, hebben dus ten opzichte van hunne vier koorden 1, 2, 3 en 4 een eigenaardige ligging, die gekenmerkt is door de volgende eigenschap:

Beschouwt men de kegelsnee en de vierzijde, verkregen door een dergelijke kromme R^3 en haar vier koorden 1, 2, 3 en 4 op een willekeurig vlak uit een harer punten te projecteeren, dan zullen in elk der vier driehoeken dezer vierzijde de zes lijnen, die uit de toppen getrokken zijn naar de snijpunten der kegelsnee met de overstaande zijden, drie aan drie door twee punten gaan.

11. Het voorafgaande onderzoek heeft nu doen zien, hoe men door een meetkundige constructie de gevallen $\Gamma = 0$, $\Gamma \gtrless 0$ kan onderscheiden, en hoe de verschillende covariante figuren, die in het eerste geval de aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen R^3 voortbrengen, worden opgespoord. Thans is het wellicht niet zonder belang nog even bij het geval $\Gamma = 0$ stil te staan.

Laten wij aannemen, dat aan de beschrijvende lijnen z van de hyperboloïde H_8 in elk der meervermelde drie nulsystemen aan 1, 2, 3 en 4 rakende krommen zijn toegevoegd. Zooals in art. 9 bleek, vormen deze krommen een unicursaal regelvlak F^6, dat 1, 2, 3 en 4 tot dubbelstralen,

---

*) SALMON, *Conic sections*, 6th Ed., blz. 408, Ex. 13.

en hun beide transversalen f' en f'' tot drievoudige lijnen heeft. Intusschen vertoont het oppervlak F^6, omdat $\Gamma = 0$ is, een nieuwe bijzonderheid; de dubbelstralen zijn keer ribben geworden.

Want op de lijn 1 bijv. komen twee bladen van het oppervlak samen, en iedere kromme R^3 moet in het punt, waar zij die lijn raakt, van het eene op het andere blad kunnen overgaan. Dit vereischt, dat de raakvlakken aldaar aan de beide bladen in het osculatievlak der kromme vallen, waardoor de lijn 1 inderdaad keerribbe wordt.

Voorts zijn de lijnen f' en f'' ten opzichte van elke kromme R^3 toegevoegde poollijnen, zoodat iedere beschrijvende lijn x van F^6 voor alle krommen als een osculatiestraal moet worden beschouwd.

Het osculatievlak in een willekeurig punt van een der krommen bevat dientengevolge steeds een beschrijvende lijn, en is daarom in het aangenomen punt raakvlak van F^6. Vandaar dat, zooals Voss opmerkt, de krommen R^3 de asymptotische krommen van het oppervlak F^6 vormen.

Als men de kromme R^3 het oppervlak F^6 laat beschrijven, zullen de vier raakpunten op 1, 2, 3 en 4 blijkbaar projectivische puntreeksen doorloopen, waarvan de snijpunten dezer lijnen met de transversalen f' en f'' twee viertallen van overeenkomstige punten zijn.

Door dergelijke overleggingen komt men er toe, om een tweetal krommen R^3 en R'^3 aan te merken als overeenkomstige figuren in twee collineaire ruimten, welke de stralen der congruentie $(f' f'')$ gemeen hebben. Een herhaalde homographische transformatie is derhalve voldoende, om uit één der krommen R^3 alle andere af te leiden.

Die afleiding evenwel kan, zoo men wil, ook nog langs anderen weg geschieden.

Houdt men namelijk in het oog, dat alle lineaire complexen, die aan de krommen R^3 zijn toegevoegd, de congruentie $(f' f'')$ bevatten, dan kan men bewijzen, dat er altijd in den daardoor bepaalden complexbundel een complex K is te vinden, ten opzichte waarvan twee krommen R^3 en R'^3 wederkeerige figuren zijn, zoodanig, dat bij een punt

van de eene kromme als nulpunt een osculatievlak van de andere als nulvlak behoort.

En van zulk een verwantschap uitgaande, kan men zonder moeite aantoonen, dat voor het regelvlak F^4 van den vierden graad, beschreven door die koorden van R^3, welke in het complex K gelegen zijn, de kromme R'^3 de keerlijn vormt van het dubbelaanrakende ontwikkelbare oppervlak, hetwelk om F^4 kan worden geconstrueerd.

12. Uit dit alles blijkt genoegzaam, dat voor alle krommen R^3 van F^6 de dubbelverhouding der vier raaklijnen 1, 2, 3 en 4 dezelfde is. Wij willen nog doen zien, hoe die dubbelverhouding λ afhangt van de overeenkomstige dubbelverhoudingen λ' en λ'', waartoe de beide viertallen van snijpunten, die men op de twee gemeenschappelijke transversalen f' en f'' vindt, aanleiding geven. Daartoe schrijven wij, zooals Voss gedaan heeft, voor de coördinaten der raaklijnen eener R^3 bikwadratische functies van een veranderlijken parameter μ. Laten wij onderstellen, dat voor 1, 2, 3 en 4 deze parameter de waarden $\mu_1, \ldots \mu_4$ aanneemt. Dat de invarianten (23), (31), enz. evenredig zijn te stellen aan de grootheden $(\mu_2-\mu_3)^4$, $(\mu_3-\mu_1)^4$ enz., volgt dan vanzelf. Voor de dubbelverhouding λ geldt derhalve

$$\lambda^4 = \left(\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1-\mu_3} : \frac{\mu_4-\mu_2}{\mu_4-\mu_3}\right)^4 = \frac{(12)(34)}{(31)(24)} = \frac{c}{b}.$$

Wij brengen deze uitkomst in verband met de vergelijking

$$\mu^2 b + 2\mu(-a+c) + (2a-b+2c) = 0, \;.\;.\; \text{(C)}$$

die is afgeleid in art. 5. Deze levert de parameterwaarden μ' en μ'', behoorende bij de beide lijnen h' en h'' van de regelschaar (321), welke door 4 worden gesneden, in de onderstelling, dat aan 1, 2 en 3 de parameterwaarden -1, ∞, $+1$ toekomen.

Voor λ' heeft men bijgevolg

$$\lambda' = \frac{-1-\infty}{-1-1} : \frac{\mu'-\infty}{\mu'-1} = \frac{1-\mu'}{2}.$$

Evenzoo is

$$\lambda'' = \frac{1-\mu''}{2},$$

zoodat volgens (C)

$$\lambda' \lambda'' = \frac{1}{4}(1-\mu')(1-\mu'') = \frac{c}{b}.$$

Tusschen de drie beschouwde dubbelverhoudingen bestaat dus de zeer eenvoudige betrekking

$$\lambda^4 = \lambda' \lambda'',$$

die leert, dat voor vier willekeurige raaklijnen eener R^3 de vierde macht der dubbelverhouding gelijk is aan het produkt der beide overeenkomstige dubbelverhoudingen, behoorende bij de twee groepen van vier snijpunten, welke men op de twee gemeenschappelijke transversalen dezer vier raaklijnen aantreft.

13. Eindelijk mogen nog voor het stelsel der rakende krommen R^3 de meest voor de hand liggende kenmerkende getallen worden afgeleid. Onmiddellijk zijn als zoodanig bekend de getallen ν en ν', die in de notatie van Schubert *) aanwijzen, hoeveel krommen uit het stelsel een gegeven lijn snijden, of een osculatievlak door een gegeven lijn laten gaan. Volgens het voorafgaande is $\nu = \nu' = 6$.

Zooals werd opgemerkt, is het regelvlak F^6 unicursaal, en daarom van den rang 10. Iedere raaklijn van F^6 is evenwel osculatiestraal voor de kromme R^3, die door het raakpunt gaat, daarom vormen de osculatiestralen een complex van den graad $\sigma = 10$.

Om te beslissen, hoeveel krommen door een gegeven vlak worden geraakt, heeft men te bedenken, dat de snijpunten van het vlak met de krommen een kubische involutie vormen, gelegen op een unicursale kromme, de doorsnede van het vlak met F^6.

Zulk een involutie bezit vier dubbelpunten, dientengevolge

*) T. a. p., blz. 163.

zijn er $\varrho = 4$ krommen, welke een gegeven vlak raken. Maar dan zijn er ook evenveel, die een raaklijn door een gegeven punt laten gaan, derhalve $\varrho' = 4$.

Er blijft over den graad β te bepalen van het complex, dat door de koorden der krommen R^3 wordt gevormd. Om die bepaling te verrichten, zullen wij aan ieder punt p van een der krommen elk ander punt q van dezelfde kromme toevoegen, en op het aldus geconstrueerde drievoudig oneindig stelsel van puntenparen p, q met de verbindingslijn g toepassen de coïncidentieformule *)

$$\varepsilon g_p = p^3 + q^3 + g_s.$$

De teekens p^3 en q^3, die als voorwaarde stellen, dat de punten p en q gegeven zijn, hebben hier de waarde nul. Het teeken εg_p duidt de voorwaarde aan, dat p en q samenvallen en de lijn g door een gegeven punt gaat. Van vier krommen gaat volgens het voorafgaande een raaklijn door een gegeven punt. Maar bovendien vormen de transversalen f' en f'' twee ontaardingen, waarvoor de snijpunten met 1, 2, 3, 4 als zoogenaamde toppen moeten worden beschouwd. De lijnen uit het gegeven punt naar deze acht toppen getrokken, worden geacht de voorwaarde εg_p te bevredigen.

Men heeft dus $\varepsilon g_p = 12$. Eindelijk is g_s het teeken van de voorwaarde, die uitdrukt, dat de lijn g in een gegeven stralenbundel ligt. Nu bevat iedere stralenbundel β koorden g, waarop twee punten der kromme liggen; elk dezer twee kan het punt p zijn, daarom zou men voor g_s de waarde 2β te schrijven hebben. De stralen uit den bundel echter, die f' en f'' snijden, voldoen elk driemaal aan de voorwaarde g_s; wij hebben dus $g_s = 2\beta + 6$. En dan geeft de formule $\beta = 3$, welke uitkomst zich zonder moeite laat bevestigen, als men in het bijzonder het vlak van den stralenbundel door een der lijnen f' en f'' laat gaan. Even groot is ten slotte de graad β' van het complex, hetwelk

---

*) SCHUBERT, t. a. p., blz. 44, form. 3.

de assen (onderlinge doorsnijdingen der osculatievlakken) van de krommen R^3 bepalen.

Alles te zamen nemende, heeft men in de onderstelling $\Gamma = 0$, volgens de schrijfwijze van SCHUBERT,

$$T^4 \nu = T^4 \nu' = 6, \quad T^4 \varrho = T^4 \varrho' = 4, \quad T^4 \sigma = 10,$$
$$T^4 \beta = T^4 \beta' = 3.$$

Breda, Mei 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE

op Zaterdag 27 September 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, HOOGEWERFF, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, SCHOUTE, FORSTER, KAPTEYN, VAN 'T HOFF, PLACE, STOKVIS, MAC GILLAVRY, HOEK, HUBRECHT, VAN DIESEN, ZAAIJER, BEHRENS, VAN RIEMSDIJK, J. A. C. OUDEMANS, BIERENS DE HAAN, WEBER, GRINWIS, PEKELHARING, SCHOLS, MICHAËLIS, HOFFMANN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

— C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap: »Natura Artis Magistra" te Amsterdam, 28 Juni, 9 Augustus 1890; 2°. A. J. ENSCHEDÉ, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 27 Juni 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teijler's Stichting te Haarlem, 5 Juli 1890; 4°. W. P. WOLTERS, Secretaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 20 Augustus 1890; 5°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de Polytechnische School te Delft, 30 Juni 1890; 6°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 16 Juli

1890; 7°. E. Dupont, Directeur van het Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique te Brussel, 20 Augustus 1890; 8°. E. Coubraux, Bibliothecaris van de Société entomologique de Belgique te Brussel, 20 Augustus 1890; 9°. E. Reusens, Bibliothecaris van de Université catholique te Leuven, 19 Augustus 1890; 10°. P. J. van Beneden te Leuven, 13 Augustus 1890; 11°. A. Le Jolis, Secretaris van de Société des Sciences naturelles te Cherbourg, November 1888; 12°. H. Rix, Bibliothecaris van de royal Society te Londen, 26 Augustus 1890; 13°. P. L. Sclater, Secretaris van de zoological Society te Londen, 27 Augustus 1890; 14°. den Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 25 Augustus 1890; 15°. J. D. Hooker, Kew, 13 Augustus 1890; 16°. H. White, Bibliothecaris van de Cambridge philosophical Society te Cambridge, 18 Augustus 1890; 17°. F. Nicholson, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 19 Augustus 1890; 18°. P. G. Tait, Secretaris van de royal Society te Edinburg, 21 Augustus 1890; 19°. H. Hein, Secretaris van de anthropologische Gesellschaft te Weenen, 21 Augustus 1890; 20°. Hauer, Directeur van het k. k. Naturhistorisches Hofmuseum te Weenen, 22 Augustus 1890; 21°. D. Stur, Directeur van de k.k. geologische Reichsanstalt te Weenen, 27 Augustus 1890; 22°. P. Hunfalvy, Bibliothecaris van de Académie des Sciences de Hongrie te Budapest, 25 Juni 1890; 23°. F. Czermak, Secretaris van het Naturforschende Verein te Brunn, 1 April 1890; 24°. Marchesetti, Directeur van het Museo civico di Storia naturali te Triëst, 1890; 25°. F. Krauss, Secretaris van het Verein für vaterländische Naturkunde in Wurttemberg te Stuttgart, 15 Mei 1890; 26°. E du Bois Reymond, te Berlijn, 10 Augustns 1890; 27°. G. Voss, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Emden, 23 Augustus 1890; 28°. Matthiesen, Assistent van de Grossherzogliche Sternwarte te Karlsruhe, 25 Augustus 1890; 29°. den Directeur van Justus Perthe's geographischer Anstalt te Gotha, 25 Augustus 1890; 30°. den Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 25 Augustus 1890; 31°. den Directeur van het Germanisches Nationalmuseum te

Neurenberg, 25 Augustus 1890; 32°. Steiff, Bibliothecaris van de kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 25 Augustus 1890; 33°. H. Kreutz, Bibliothecaris van de Sternwarte te Kiel, 26 Augustus 1890; 34°. O. Buchner, Secretaris van het Oberhessischer Geschichtsverein te Giessen, 27 Augustus 1890; 35°. Hellmann, Directeur van het kön. preussisches meteorologisches Institut te Berlijn, 28 Augustus 1890; 36°. Joh. Franck te Bonn, 30 Augustus 1890; 37°. W. Kirchner, Bibliothecaris van de physikalisch-medicinische Gesellschaft te Würzburg, 28 Augustus 1890; 38°. E. Richter, Bibliothecaris van het Verein für Erdkunde te Dresden, 5 September 1890; 39°. Schaarschmidt, Bibliothecaris van de kön. Universitäts-Bibliothek te Bonn, 6 September 1890; 40°. G. Limpricht, Bibliothecaris van de Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 10 September 1890; 41°. C. Knoop, Secretaris van de Wetterauische Gesellschaft für die gesammte Naturkunde te Hanau, 11 September 1890; 42°. M. Fürbringer, te Jena, 14 September 1890; 43°. W. Schaafhausen, Secretaris van het Verein für Alterthumskunde im Rheinlande te Bonn, 15 September 1890; 44°. den Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Bamberg, 18 September 1890; 45°. B. Windscheid te Leipzig, 20 September 1890; 46°. den Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Danzig, 22 September 1890; 47°. Th. Nöldeke te Straatsburg, 1890; 48°. den Secretaris van de Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde te Giessen, 1890; 49°. Messer, Secretaris van het naturwissenschaftlicher Verein te Bremen, 1890; 50°. A. de Candolle te Genève, 1890; 51°. F. Imhoof Blumer te Winterthur, 13 Augustus 1890; 52°. Graf, Bibliothecaris van de Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften te Bern, 27 Augustus 1890; 53°. Graf, Bibliothecaris van de naturforschende Gesellschaft te Bern, 27 Augustus 1890; 54°. G. B. de Rossi te Rome, 22 Augustus 1890; 55°. A. Lacatelli, Secretaris van het Institut royal Lombard des Sciences et Lettres te Milaan, 29 Augustus 1890: 56°. G. Ferrari, Bibliothecaris van de R. Accademia di Scienze, Littere ed Arti te Modena, 1 Sep-

tember 1890; 57°. D. CARUTTI te Turijn, 8 September 1890; 58°. D. CHILONI, Directeur van de R. Biblioteca nazionale centrale te Florence, 10 September 1890; 59°. A. AGUILAR, Secretaris van de real Academia de Ciencias te Madrid, 2 September 1890; 60°. H. GYLDEN te Stockholm, September 1890; 61°. J. RICHTER, Secretaris van de Société royale des Sciences te Drontheim, 13 September 1890; 62°. E. REGEL, Directeur van den Jardin impérial de botanique te St. Petersburg, 28 Augustus 1890; 63°. den Directeur van het Comité géologique de la Russie te St. Petersburg, 16 September 1890; 64°. den Directeur van de Nicolai Hauptsternwarte, 1890; 65°. W. SCHLÜTER, Bibliothecaris van de kais. Universitäts-Bibliothek te Dorpat, 31 Augustus 1890; 66°. A. ARRHENIUS, Bibliothecaris van de Societas pro fauna et flora fennicae te Helsingfors, 14 September 1890; 67°. W. T. HARRIS, Bibliothecaris van het Bureau of Education, Department of the Interior te Washington, 1890; 68°. PAUL, Bibliothecaris van het U.S. naval Observatory te Washington, 21 Juli 1890; 69°. J. C. PILLING, Directeur van de U.S. geological Survey te Washington, 30 Juli 1890; 70°. S. P. LANGLEY, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 18 Augustus 1890; 71°, E. C. PICKERING, Directeur van Harvard College Observatory te Cambridge, 22 Juli 1890; 72°. E. J. NOLAN, Bibliothecaris van de Academy of natural Sciences te Philadelphia, 21 Juli 1890; 73°. C. B. COLSON, Secretaris van de Elliott Society of Science and Art te Charleston S.C.. 22 Juli 1890; 74°. J. ALEXANDER, Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sth. Ottowa. 1890; 75°. F. B. WYNGDOS, Secretaris van de royal Society of N. S. Wales te Sydney, 16 Juni 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 12, 27 Augustus, 9, 10, 25 September 1890; 2°. den Commissaris des Konings in de provincie Friesland te Leeuwarden, 4Juli 1890; 3°. G. C. W. BOHNENSIEG, Con-

servator van Teylers Stichting te Haarlem, 1890; 4°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 26 Juni 1890; 5°. M. SNELLEN, waarn. Hoofddirecteur van het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 1890; 6°. H. C. DIBBITS te Utrecht, 26 September 1890; 7°. C. L. VAN DER BURG te Laag-Soeren, 20 Augustus 1890; 8°. Jos. HABETS te Maastricht, 6 Augustus 1890; 9°. J. BERTRAND, Secretaris van de Académie des Sciences te Parijs, 16 Juni 1890; 10°. A DURÉAU, secretaris van de Académie de Médecine te Parijs, 29 April 1889; 11°. L. DE MILLOUÉ, Directeur van het Musée Guimet te Parijs, 7 Augustus 1890; 12°. den Directeur van de Ecole polytechnique te Parijs, Maart 1890; 13°. R. BLANCHARD, Secretaris van het Congrès international de Zoologie te Parijs 15 Maart 1890; 14°. A. GASTÉ, Secretaris van de Académie des Sciences, Arts et belles Lettres te Caen, April 1890; 15°. J. MILSAND, Bibliothecaris van de Académie des Sciences, Arts et belles Lettres te Dyon, 31 December 1890; 17°. W. H. M. CHRISTI, Directeur van het royal Observatory, Greenwich, 1890; 17°. den Directeur van de Commission de Statistique de la ville de Prague, 1890; 18°. CONWENTZ, Secretaris van de naturforschende Gesellschaft te Dantzig, 25 Augustus 1890; 19°. FÖRSTEMANN, Archivaris van de Kön. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften te Leipzig, 1890; 20°. CHR. ECCARD, Secretaris van de Pollichia te Dürkheim, December 1888; 21°. HENSINGER, Secretaris van de Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften te Marburg, Maart 1890; 22°. STEIFF, Directeur van de Kön. öffentliche Bibliothek te Stuttgart, 11 Juli 1890; 23°. A. J. PALM, Directeur van de Bibliothèque de l'Université royale te Upsala, 11 Augustus 1890; 24°. J. KENNEL, Secretaris van de Naturforscher-Gesellschaft te Dorpat, April 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. kennisgevingen van de Heeren MOLL, FRANCHIMONT,

A. C. OUDEMANS JR. en ZEEMAN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. brief van Heer A. P. MELCHIOR te Batavia, waarin hij dankzegt voor zijne benoeming tot Correspondent der Afdeeling;

3°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (6 Aug. 1890), ter begeleiding van eene »Beschrijving van de grondsoorten, gevonden bij de drinkwaterboring nabij het hospitaal te Ommerschans", opgesteld door Dr. J. LORIÉ, privaatdocent in de geologie aan 's Rijks Universiteit te Utrecht. — De Minister verwacht deze Bijlagen later terug. — Zij zal in handen worden gesteld van de geologische Commissie;

4°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (15 Augustus 1890) ter begeleiding van een schrijven van den Italiaanschen gezant te 's Gravenhage, betreffende het voornemen zijner Regeering om te Rome een internationaal congres bijeen te roepen tot het aannemen van een eersten meridiaan. De minister wenscht het gevoelen der Akademie omtrent dit denkbeeld der Italiaansche Regeering te vernemen en bekend gemaakt te worden met de zienswijze, welke de Nederlandsche Regeering eventueel voor de keuze van zulk een eersten meridiaan zou kunnen voorstaan.

Op voorstel van den Voorzitter zal de missive, met de daarbij behoorende stukken, in handen worden gesteld van de Heeren MICHAËLIS, SCHOLS en VAN DE SANDE BAKHUYZEN, om advies.

5°. missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid (20 Sept. 1890) ter begeleiding van eene circulaire, waaruit blijkt, dat het 2e ornithologisch congres in Mei 1891 gehouden zal worden te Buda-Pest;

6°. missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken (20 Sept. 1890) ter begeleiding van een adres van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië, waarbij subsidie verzocht wordt voor wetenschappelijke natuurkundige onderzoekingen in die gewesten. De missive en het adres gaan vergezeld van twee bijlagen, nl. het gunstig advies van den Heer Directeur van Onder-

wijs, Eeredienst en Nijverheid in Nederlandsch Indië, en eene missive van den Minister van Koloniën, waarin wordt vermeld, op welke wijzen tegenwoordig het natuurwetenschappelijk onderzoek van den Indischen Archipel plaats heeft.

De Voorzitter wenscht deze stukken om advies in handen gesteld te zien van de Heeren SURINGAR, WEBER, MARTIN en PEKELHARING. Aldus wordt besloten;

7°. brief van den Heer Dr. BRESTER, ter begeleiding van eene verhandeling »over de theorie van de Zon", die hij wenscht opgenomen te zien in de werken der Akademie. Als adviseurs over die verhandeling worden aangewezen de Heeren KAPTEIJN, LORENTZ en BAKHUYS ROOZEBOOM.

— De Heeren SCHOUTE en BIERENS DE HAAN brengen rapport uit over de in Juni aangeboden verhandeling van den Heer CARDINAAL. Het luidt gunstig. De conclusie om het stuk te bestemmen voor de *Verslagen en Mededeelingen* wordt aangenomen.

— De Heer SCHOUTE spreekt over rechtstreeks gelijkvormige vlakke figuren en deelt omtrent deze eenige nieuwe algemeene stellingen mee. Kortheidshalve dringen we den hoofdinhoud van deze in de volgende regels samen:

»In het vlak van twee gegeven rechtstreeks gelijkvormige figuren F_1 en F_2 is een derde figuur F_3 rechtstreeks gelijkvormig met F_1 en F_2 te vinden, die de eigenschap heeft, dat de meetkundige plaats van het snijpunt P der overeenkomstige raaklijnen t_1 en t_2 van een willekeurig aangenomen paar overeenkomstige krommen C_1 en C_2 van F_1 en F_2 de voetpuntskromme is van de overeenkomstige kromme C_3 van F_3 met betrekking tot het dubbelpunt O van F_1 en F_2, dat tevens het dubbelpunt is van F_1 en F_3 en dus ook van F_2 en F_3. Eveneens bevat het vlak een figuur F_α rechtstreeks gelijkvormig met F_1 en F_2, waarvan de met C_1 en C_2 overeenkomende kromme C_α de omhullende is van de lijn t_α door het snijpunt P van t_1 en t_2 zoo getrokken, dat de hoek (t_1, t_α) gelijk zij aan een gegeven hoek α".

»Zijn in het vlak der figuren F_1 en F_2 twee punten P_1 en Q_2 willekeurig aangenomen, dan is in dit vlak een met F_1 en F_2 rechtstreeks gelijkvormige figuur F_μ en een punt R_μ te vinden, zoodanig dat de voetpuntskromme van de met C_1 en C_2 overeenkomende kromme C_μ van F_μ met betrekking tot R_μ de meetkundige plaats is van het punt A_μ, dat den afstand $A_1 A_2$ der overeenkomstige punten van de voetpuntskrommen van C_1 met betrekking tot P_1 en van C_2 met betrekking tot Q_2 in een bepaalde verhouding μ verdeelt. Is Q_2 het punt van F_2, dat met het punt P_1 van F_1 overeenkomt, dan verdeelt R_μ den afstand $P_1 Q_2$ in dezelfde verhouding μ en is het bewijs dezer stelling zeer eenvoudig. Komt echter met P_1 van F_1 in F_2 het punt P_2, met Q_2 van F_2 in F_1 het punt Q_1 overeen, dan wordt de stelling veel samengestelder, zijn de door A_1 en A_2 doorloopen voetpuntskrommen in het algemeen niet gelijkvormig en is de meetkundige plaats van R_μ bij verandering van μ in stede van de rechte lijn $P_1 Q_2$ een unicursale circulaire kromme van den derden graad, enz."

— De heer Hubrecht wenscht eene korte mededeeling te doen over de wijze waarop bij de gewone Spitsmuis (Sorex vulgaris) ten tijde van de embryonale ontwikkeling het verband tusschen het weefsel van moeder en vrucht tot stand komt. Bij een ander insektenetend zoogdier — den egel — had hij dat verband reeds voor eenigen tijd meer uitvoerig beschreven; bij de spitsmuis, welke in dezelfde orde van zoogdieren gerangschikt wordt, zijn zeer principiëele verschillen aanwezig.

In de eerste plaats verdient het opmerking dat het spitsmuis-embryo niet, zooals dat van den egel, in eene duplicatuur van het uterus-slijmvlies (decidua reflexa) wordt opgesloten. Het ligt aanvankelijk vrij in het uterus-lumen; de wand van den uterus ondergaat intusschen reeds voorbereidende wijzigingen van groot gewicht. Ter plaatse waar de embryonen (meestal ten getale van zes of acht) zullen vastgehecht blijven, ontstaat al spoedig eene half bolvormige, later meer peervormige verwijding van het ute-

rus-lumen, aanvankelijk gepaard met eene — relatief — belangrijke verdunning van dat gedeelte van den uterus-wand dat aan het mesometrium is tegenovergesteld. Dit verdunde wandgedeelte vormt als het ware den bodem van een beker, waarin het embryo zal komen te liggen: de opstaande rand van dien beker wordt door lokale plooiing van het uterusslijmvlies gevormd, meer nabij de mesometrale aanhechting. Deze laatste opstaande plooien sluiten zich echter nooit boven het embryo.

De oppervlakte van deze verdikte plooien — de zijwand van den beker dus — levert de eerste aanhechtingsvlakte voor de kiemblaas en wel volgens eene ringvormige zone, ter plaatse waar zich later de area vasculosa bevinden zal. Daarentegen blijft de half spherische bodem van den beker langer vrij: eerst na de ontwikkeling van de allantois legt deze zich hiertegen aan en hier ter plaatse komt de schijfvormige placenta tot ontwikkeling. De placenta is dus, evenals bij den egel, antimesometraal geplaatst.

Het groote verschil met wat wij bij den egel vinden, betreft vooral de histologische wijzigingen, die aan de oppervlakte van het slijmvlies optreden, ter plaatse waar het embryo zich daartegen aanlegt. Gaat bij den egel het epithelium grootendeels te gronde en is het met name het subepitheliale bindweefsel waarin woekeringen optreden, die voor het embryo een voedingsbodem — de zoogen. *trophospheer* — te voorschijn roepen, zoo is bij de spitsmuis van zoodanig te gronde gaan van het epithelium niet alleen geen sprake, maar is het juist dit epithelium, dat zich snel woekerend vermeerdert en een belangrijk aandeel neemt aan de vorming van den voedenden bodem voor het embryo.

Van den aanvang af vertoont dat woekeringsverschijnsel eenig verschil, al naarmate wij de plek onderzoeken waar de area vasculosa of die waar de allantois zich zal gaan vasthechten.

Terwijl eerstgenoemde regio gekenmerkt is door grootere dikte (althans in den aanvang), vertoonen zich in laatstgenoemde meer complicaties. Het gewoekerde epitheliale weefsel, dat, blijkens duidelijke karyolytische figuren, uit de

meest oppervlakkige laag zijn oorsprong neemt, rangschikt zich al spoedig onder dit laatste — ten deele groepsgewijs in waaiervorm. En in een iets later stadium hebben die groepen een lumen erlangd, breken naar de holte van den uterus door en bieden aan de allantois-vlokken evenzoo vele gepraeformeerde crypten ter inhechting. Deze crypten hebben, blijkens haar wordingsgeschiedenis met tubulaire uterusklieren dus niets te maken: de laatsten worden in geringer aantal tusschen de besproken zich vormende crypten aangetroffen en staan, ook wanneer de crypten nog niet met het uterus-lumen communiceeren, daarmede in blijvenden samenhang. Al zijn dus deze kliergangen in den nog verder gewoekerden staat van het uterus-slijmvlies niet gesloten voor daarin binnendringende vlokken, zoo is toch voor verreweg het grooter deel de inhechtingsvlakte dier vlokken eene formatie *ad hoc*, die aan het moederlijk uterus-epithelium zijn ontstaan dankt. Tusschen die epitheliale crypten zendt het vasculaire bindweefselstroma van den uterus reeds vroeg talrijke uitloopers, en, is eenmaal de allantois-vlok ter plaatse aangeland, zoo vindt spoedig eene innige versmelting plaats, die het onmogelijk maakt, in de volwassen lacunaire placenta de grens tusschen beiden aan te geven.

Versmelting van moederlijk en embryonaal weefsel heeft reeds in eene vroegere phase in het gebied van den dojerzak plaats, eveneens voorbereidend aan de nauwere doorvlechting van embryonale en moederlijke vaten; echter zonder vorming van bepaalde vlokken. Daarbij valt eene voorafgaande verdikking van de buitenste cellaag van den kiemblaaswand — het trophoblast — onmiskenbaar in het oog. Nog later verdient eene andere verdikking van deze trophoblastcellen onze aandacht, alweder volgens eene ringvormige zone, doch thans beneden de aanhechtingsplaats van kiemblaas aan uteruswand. Tevens ontwikkelt zich in den wand van den dojerzak te dier tijde een zeer sterk groen pigment, dat tot in de laatste zwangerschaps-periode herkenbaar blijft.

Spreker legt nogmaals nadruk op het groote verschil tusschen egel en spitsmuis, beide Insectivora, ten aanzien van de hier besproken verschijnselen.

— De Heer van Diesen biedt, om opgenomen te worden in de werken der Akademie, eene verhandeling aan van den Heer J. C. Ramaer, Ingenieur van den Waterstaat: »Het Haarlemmermeer en de meren waaruit het ontstaan is op verschillende tijden vóór de droogmaking". — Zij zal om advies in handen worden gesteld van de Heeren van Bemmelen en Bierens de Haan.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

1. door den Heer J. A. C. Oudemans, uit naam van den Heer Dr. van Rijckevorsel, diens verhandeling: »An attempt to compare the instruments for absolute magnetic measurements at different observatories". Het doel, door den schrijver beoogd, en de uitkomsten door hem verkregen, worden door den Heer Oudemans kortelijk toegelicht;

2. door den Heer Forster, uit naam van den Heer C. J. de Freytag, zijn discipel, diens brochure »Ueber die Einwirkung concentrirter Kochsalzlösungen auf das Leben der Bacterien";

3. door den Heer Stokvis diens voordracht »Ueber vergleichende Rassenpathologie und die Widerstandsfähigkeit des Europäers in den Tropen", uitgesproken in het onlangs te Berlijn gehouden internationaal geneeskundig congres;

4. door den Heer Bierens de Haan: *a.* uit naam van den Heer A. Marre, diens »Notice sur les travaux scientifiques et littéraires de M. Archide Marre"; *b.* uit eigen naam: »Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des oeuvres de Christiaan Huygens", opgenomen in de werken der Association française pour l'avancement des Sciences;

5. door den Heer Weber zijne met platen opgeluisterde verhandeling: »Ethnographische Notizen ueber Flores und Celebes".

De Heer Weber deelde daarbij mede, dat, in tegenstelling met wat gewoonlijk verzekerd wordt, de bewoners van het binnenland van Flores een geheel ander volk zijn dan die der kusten. Het bleek hem, dat de ware inboorlingen van Flores zeer zeker niet tot de West-Maleiers behooren, zooals

tot heden geloofd werd;

6. door den Heer van de Sande Bakhuyzen: »Annalen der Sternwarte in Leiden, Band VI".

De Heer van de Sande Bakhuyzen deelt mede, dat in de thans aangeboden waarnemingen de fouten, die òf van het instrument alleen, òf van het instrument en den waarnemer afhankelijk zijn, gecorrigeerd en gereduceerd werden. — Op de fouten, door de reflectie van het licht teweeggebracht en de wijze hoe die gecorrigeerd en gereduceerd moeten worden, hoopt hij later de aandacht te vestigen.

— De Vergadering wordt gesloten.

VERSLAG

OVER DE

VERHANDELING VAN DEN HEER J. CARDINAAL,

GETITELD:

CONSTRUCTIE DER OPPERVLAKKEN VAN DEN VIERDEN GRAAD MET DUBBELKEGELSNEE DOOR MIDDEL VAN PROJECTIVISCHE BUNDELS OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 September 1890).



In 1884 heeft Dr. C. SEGRE langs meetkundigen weg een volledige classificatie uitgewerkt van de oppervlakken F^4 van den vierden graad met dubbelkegelsnee. De door hem verkregen uitkomsten behooren naar onze meening tot de schoonste vruchten ons in den laatsten tijd door de — zij het dan ook niet aanschouwelijke — studie der ruimte met vier afmetingen in den schoot geworpen. Zooals men weet, deed hij de groep der bedoelde oppervlakken F^4 ontstaan door zich in de ruimte met vier afmetingen twee tridimensionale wezens van den tweeden graad te denken en de doorsnee van deze uit een punt dier ruimte op onze ruimte met drie afmetingen te projecteeren. Daarbij bood het overeenkomstige vraagstuk, dat uit het voorgaande ontstaat door overal het aantal der genoemde afmetingen met de eenheid te verminderen, nl. de beschouwing van de vlakke kromme C^4 met twee dubbelpunten als de projectie van de aan twee oppervlakken F^2 gemeenschappelijke ruimtekromme R^4, een eenvoudigen leiddraad aan. Zoo voerde het aantal

vier der *tweekegelpunten* van de kromme R^4 onmiddellijk tot de *vijf* door de dubbelraakvlakken van het oppervlak F^4 omhulde KUMMER'sche kegels van den tweeden graad, enz.

In de aangevoerde studie van den Turin'schen hoogleeraar wordt opnieuw de aandacht gevestigd op een andere, naar het schijnt voor de eerste maal in 1870 aangegevene, handelwijs, die bij de studie der bedoelde oppervlakken kan worden gevolgd. Deze bestaat hierin, dat men het oppervlak F^4 met de dubbelkegelsnee d^2 beschouwe als de meetkundige plaats der snijkromme van de overeenkomstige elementen van twee projectivische oppervlakkenbundels van den tweeden graad, wier basiskrommen de dubbelkegelsnee d^2 gemeen hebben. »Het is vreemd", — zegt SEGRE — »dat men er tot heden nog niet aan gedacht heeft uit deze constructie een volledige meetkundige theorie der oppervlakkengroep af te leiden; naar het ons voorkomt zou een dergelijke studie niet van belang ontbloot zijn".

Een andere voortbrenging van het oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee d^2 werd door Dr. TH. REYE gegeven in de verzameling van vraagstukken als aanhangsel toegevoegd aan het tweede deel zijner »*Geometrie der Lage*". Zij berust op een reeds in 1865 door BERNER ontdekte verwantschap van den tweeden graad tusschen twee ruimten Σ en Σ' van drie afmetingen, waarbij met punten, lijnen, vlakken en oppervlakken F'^2, die tot Σ' behooren, in Σ achtereenvolgens puntenparen, kegelsneden, een drievoudig oneindig stelsel S van door een kegelsnee d^2 gaande oppervlakken F^2 en oppervlakken F^4 met d^2 tot dubbelkegelsnee overeenkomen. In deze verwantschap beantwoordt de voortbrenging van het oppervlak F^4 met d^2 tot dubbelkegelsnee door middel van twee projectivische bundels van oppervlakken F^2 in Σ gelegen aan de veel eenvoudiger voortbrenging der oppervlakken F'^2 van Σ' door middel van twee projectivische vlakkenbundels.

Het is de verdienste van den Heer CARDINAAL, over wiens nieuwe verhandeling wij thans verslag uitbrengen, het zooeven aangegeven verband tusschen de voortbrenging van het oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee ter eene en die van het

oppervlak F'^2 ter andere zij duidelijk te hebben ingezien en op rationeele wijs te hebben gebruikt tot de afleiding van de hoofdeigenschappen van het meest algemeene oppervlak F^4 met dubbelkegelsnee en van de bijzondere gevallen, waartoe de constructie voeren kan. De Heer CARDINAAL — zoo kunnen we ons uitdrukken — vond in zijn werkplaats twee raderen naast elkaar opgesteld, waarvan het eene — indertijd door STEINER opgewonden — nog in volle beweging was, terwijl het andere in de twintig jaar van zijn bestaan wegens de groote wrijving daarentegen nog geen slag gedaan had. Hij merkt nu op, dat deze raderen volkomen in elkaar zouden passen, als ze met elkaar in verband gebracht werden, en doet daarom met behulp van een REYE'schen hefboom de tanden van beide in elkaar grijpen om ten slotte na te gaan tot welke uitkomsten de beweging van het tweede rad leidt.

De voor ons liggende verhandeling is in zes hoofdstukken verdeeld. Na in het eerste als inleiding eenige litteratuuraanwijzingen en de uiteenzetting der methode van SEGRE en van de thans te volgen constructie gegeven te hebben, ontwikkelt de schrijver in het tweede hoofdstuk de verwantschap van den tweeden graad. Hierbij treden het kernoppervlak K^2 van het in Σ gelegen drievoudig oneindige stelsel S, het in Σ' hiermee overeenstemmende oppervlak K'^2 en het met het voorttebrengen oppervlak F^4 overeenstemmende oppervlak O'^2 op den voorgrond. Dit laatste oppervlak wordt het *beeldoppervlak* van F^4 genoemd. En het hoofdstuk wordt besloten met de aanwijzing der drie hoofdgroepen van oppervlakken F^4 met dubbelkegelsnee; in de eerste groep is de dubbelkegelsnee d^2 enkelvoudig, in de tweede bestaat d^2 uit twee elkaar snijdende lijnen, in de derde bestaat d^2 uit twee samengevallen lijnen.

Het derde, vierde en vijfde hoofdstuk zijn achtereenvolgens gewijd aan de behandeling der oppervlakken van de eerste, tweede en derde groep. In hoofdtrekken is de onderverdeeling bij deze drie groepen dezelfde; steeds treden dezelfde drie tweedeelige kenmerken op, die tot dezelfde acht gevallen leiden. Eerstens kunnen de oppervlakken van het

stelsel S buiten d^2 om geen of een enkel punt gemeen hebben. Ten tweede kan het beeldoppervlak een regelvlak of een kegel zijn. En ten derde kan dit laatste oppervlak den meest algemeenen of een bijzonderen stand hebben. Alleen deze bijzondere stand geeft bij de verschillende hoofdgroepen tot verschillende groepen van bijzondere gevallen aanleiding.

Van de drie groepen wordt de eerste en van deze groep weer het algemeene geval het meest uitvoerig behandeld. Daarbij komen de vijf KUMMER'sche kegels, de zestien rechte lijnen, de uit deze zestien lijnen en vijf krommen R^4 bestaande connodale lijn en de 52 op deze gelegen plooipunten van het algemeene oppervlak naar behooren voor den dag. En in elk der andere gevallen wordt door den schrijver onderzocht, welke nieuwe vormen van het oppervlak F^4 verkregen worden.

In het zesde hoofdstuk worden eindelijk enkele nieuwe gezichtspunten aangegeven, die bij het ontwerpen eener volledige classificatie niet mogen worden over het hoofd gezien. Daarbij komen in hoofdzaak de regelvlakken en de cyclides ter sprake.

Naar onze meening wordt de reeds zoo uitgebreide litteratuur over de belangwekkende groep van oppervlakken door de verhandeling van den Heer CARDINAAL werkelijk verrijkt; daarom aarzelen wij niet U te adviseeren ze in de *Verslagen en Mededeelingen* te doen opnemen.

Groningen en *Leiden*,
13 Sept. 1890

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

CONSTRUCTIE DER OPPERVLAKKEN

VAN DEN

VIERDEN GRAAD MET DUBBELKEGELSNEDE

DOOR MIDDEL VAN

PROJECTIVISCHE BUNDELS OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

DOOR

J. CARDINAAL.



I. Inleiding.

1. Alvorens tot de behandeling van dit onderwerp over te gaan, wensch ik te verwijzen naar de literatuur, die er over de oppervlakken van den vierden graad met dubbelkegelsnede bestaat; en meer bepaald naar de voornaamste bron, die bij dit opstel gebruikt is, nl. het artikel: »Etude des différentes surfaces du 4e ordre à conique double par Corrado Segre", *Mathematische Annalen.* Dl. XXIV, blz. 313 vgg. Deze verhandeling munt niet alleen uit door scherpzinnigheid en grondigheid, maar bevat ook als inleiding een geschiedkundig overzicht van het onderwerp, volledig genoeg om talrijke verwijzingen bij de hier volgende beschouwingen overbodig te maken.

Aan de door den schrijver genoemde namen Kummer, Moutard, Darboux, Casey, Clebsch, Jordan, Geiser, Korndörfer, Zeuthen, Loria en anderen, benevens aan het overzicht der door hen gevolgde methoden valt dus weinig toe te voegen; slechts worde het volgende opgemerkt.

Tot de kennis van den vorm der oppervlakken met dubbelkegelsnede heeft ongetwijfeld veel bijgedragen de verhandeling van CLERK MAXWELL, *Quart. Journ. of Math.*, Dl. IX, blz. 111, aan welke stereoskopische teekeningen toegevoegd zijn. In deze teekeningen zijn de hoofdvormen afgebeeld der cyclide van DUPIN, welke een bijzonder geval is van de oppervlakken, die thans ter sprake komen; een oppervlak namelijk, dat den oneindig ver verwijderden onbestaanbaren cirkel tot dubbelkegelsnede heeft.

Verder zij opgemerkt, dat niet alleen in de *Synthetische Geometrie der Kugeln*, maar ook in de *Geometrie der Lage*, 2te Aufl. Dl. II, blz. 283 vgg. van TH. REYE eenige beschouwingen omtrent deze oppervlakken te vinden zijn. Deze betreffen, wel is waar, het bijzondere geval, dat het oppervlak een kegelpunt bezit; maar tevens wordt het ontstaan van zoodanig oppervlak zonder kegelpunt aangegeven en enkele eigenschappen daarvan medegedeeld. Naar deze beschouwing wordt vooral daarom verwezen, omdat zij het uitgangspunt zal vormen voor de methode, in het hier volgende ontwikkeld.

2. In tegenstelling met den weg, ingeslagen door de meeste der door hem aangehaalde schrijvers, steunt SEGRE bij zijn classificatie op de meetkunde. Zijn redeneering is zeker merkwaardig genoeg om er meer bepaald de aandacht op te vestigen. Hij gaat uit van het feit, dat een ruimtekromme van de vierde orde (1e soort) door centrale projectie een vlakke kromme van de vierde orde met twee dubbelpunten doet ontstaan, en dat men, door verandering van projectiecentrum, alle vormen van deze krommen met twee of drie dubbelpunten verkrijgen kan. Op dezelfde wijze beschouwt hij de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede als de centrale projectie op de ruimte van de snijding van twee drie-dimensionale vormen van de tweede orde, liggende in de vier-dimensionale ruimte. Door alle vormen en alle standen van het projectiecentrum te beschouwen, verkrijgt hij een volledige classificatie; eveneens wordt het ontstaan verklaard van de verschillende krommen, kegelsneden, rechte lijnen enz., die op het oppervlak

gelegen zijn. Ook worden de verschillende vormen der dubbelkegelsnede nagegaan, benevens de kegelpunten, het aantal rechte lijnen op het oppervlak, enz. De geheele hoeveelheid soorten, door SEGRE verkregen, bedraagt ruim 70.

3. Hoewel de besproken verhandeling aan volledigheid niets te wenschen overlaat, zoo meen ik toch, dat er nog plaats is voor een andere meetkundige beschouwing. Om dit te staven, verwijs ik weder naar de meetkundige theorie der krommen van de vierde orde met twee dubbelpunten. Men kan deze, als boven opgemerkt, doen steunen op de projectie van de ruimtekromme van de vierde orde; maar eveneens kan men ze, zonder het platte vlak te verlaten, beschouwen als ontstaande door de doorsnijding der homologe elementen van twee projectivische kegelsnedenbundels, bij welke twee basispunten van den eenen samenvallen met twee basispunten van den anderen. Eveneens moet het blijken, dat, nevens de methode van SEGRE, een andere moet bestaan, door welke men de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede kan construeeren. Volgens deze methode cônstrueert men de bewuste oppervlakken door zich twee projectivische bundels oppervlakken van de tweede orde te denken, welke beiden een basiskromme bezitten, die in twee kegelsneden is overgegaan. Valt nu een kegelsnede van de eene basiskromme samen met een kegelsnede van de tweede basiskromme en construeert men de doorsneden der homologe elementen, dan beschrijven deze een oppervlak van de vierde orde met dubbelkegelsnede *).

4. Bij de hier gevolgde methode treedt dus het constructiestandpunt op den voorgrond; zij wordt daardoor een natuurlijke voortzetting van de meetkundige theorie der scheeve oppervlakken van den vierden graad, door schrijver dezes ontwikkeld, en kan zich aansluiten aan de constructie van an-

*) Omtrent deze methode merkt SEGRE zelf op: Il est étrange, qu'on n'ait pas encore pensé à déduire de cette construction par les méthodes de la géométrie de position une théorie synthétique complète de ces surfaces: il nous semble, qu'une telle étude n'aurait pas manqué d'intérêt.

dere oppervlakken van den vierden graad, meer bepaald aan die met een dubbellijn.

II. Algemeene constructie van het oppervlak.

5. Men denke zich vier oppervlakken van de tweede orde A^2, B^2, C^2, F^2, die met elkander de kegelsnede d^2 gemeen hebben, welke kegelsnede in een vlak δ ligt. De bundels $\overline{A^2 B^2}$ en $\overline{C^2 F^2}$, in projectief verband gebracht, doen het oppervlak O^4 ontstaan. Ter verheldering van het inzicht in den vorm en de eigenschappen van dit oppervlak is het evenwel noodig gebruik te maken van de verwantschap, waarvan ook Th. Reye gebruik maakt en waarvan enkele hoofdeigenschappen, met het oog op het volgende in herinnering zullen worden gebracht *).

De vier gegeven oppervlakken vormen namelijk de bepalende elementen van een stelsel oppervlakken van de tweede orde, dat daarvan een drievoudig oneindig aantal bevat. Het stelsel bevat ook alle kegelsneden, die de doorsnijding twee aan twee der oppervlakken uitmaken, benevens de tweetallen gekoppelde punten, waarin die kegelsneden elkander snijden †). Bepaalt men nu van al deze oppervlakken ten opzichte van een vast punt Q de poolvlakken, dan ontstaat een stelsel vlakken, liggende in een ruimte R_1, welk stelsel projectief is met het in de ruimte R gelegen oppervlakkenstelsel, en bestaat uit alle vlakken, lijnen en punten van R_1. Daar de verwantschap tusschen R en R_1 in hoofdzaak bekend wordt ondersteld, zoo kan volstaan worden met de samenvatting van die uitkomsten, welker kennis voor het begrip van het volgende volstrekt noodig is.

---

*) *Geometrie der Lage.* Vortrag 28 en Anhang n°. 100—120. Dl. II. 2e Aufl.

†) Het woord *Gebüsch* wordt hier vertaald door *stelsel,* voor *associirte Punkte* wordt *gekoppelde punten* gesteld.

Ruimte R.	Ruimte R_1.
Een oppervlak van het stelsel.	Een vlak.
Een kegelsnede van het stelsel.	Een rechte lijn.
Twee bestaanbare of onbestaanbare gekoppelde punten.	Een punt.
De punten van het vlak δ.	Een enkel punt D_1.
Kegelvlakken van het stelsel, welker toppen op een oppervlak van de tweede orde K^2 door d^2 (kernoppervlak) liggen.	Vlakken, welke een oppervlak van de tweede klasse K_1^2 omhullen.
Toppen dezer kegelvlakken als samengevallen punten.	Punten van K_1^2.
Stralen dezer kegelvlakken of wel hoofdstralen, die d^2 snijden.	Raaklijnen aan K_1^2.
De pool D van δ ten opzichte van K^2, die gekoppeld is aan elk punt van het vlak δ.	Een vast punt D_1.
Vlakken en hoofdstralen door D.	Vlakken en lijnen door D_1 *).

6. Op deze algemeene eigenschappen steunende, kan men het verband van K^2 en K_1^2 nog nauwkeuriger vaststellen. Men neme daartoe in R_1 een punt A_1 aan; hiermede komen in R overeen de twee op een rechte lijn door D gelegen punten A en A^1; met de raakvlakken, door A_1 aan K_1^2 gelegd, komen dan overeen de kegelvlakken, behoorende tot het door AA^1 bepaalde oppervlakken-net. De toppen dezer kegelvlakken zijn de snijpunten der hoofdstralen, die, door A en A^1 gaande, d^2 snijden. De meetkundige plaats dezer toppen is dus de tweede kegelsnede, volgens welke de beide kegelvlakken, die A en A^1 tot top hebben

*) Van dit stelsel oppervlakken is een bijzonder geval het stelsel bollen, die in een gegeven punt een gegeven macht hebben en dus door een gegeven bestaanbaren of onbestaanbaren bol loodrecht gesneden worden. De oneindig ver verwijderde onbestaanbare cirkel vervangt dan d^2.

en d^2 tot richtlijn, elkander snijden. Daar nu de raakvlakken uit A_1 aan K_1^2 dit oppervlak raken in de poolkegelsnede van A_1 ten opzichte van K_1^2, zoo blijkt, dat de overeenkomst tusschen K^2 en K_1^2 van dien aard is, dat met een kegelsnede op K^2 insgelijks een kegelsnede op K_1^2 overeenkomt, en wel punt voor punt.

Ligt A_1 op K_1^2, dan gaat de raakkegel over in een raakvlak en de raakkromme in twee bestaanbare of onbestaanbare rechte lijnen van K_1^2. Laat in het eerste geval een dezer lijnen a_1 genoemd worden, dan is a_1 de as van een vlakkenbundel, waarmede in R overeenstemt een kegelbundel, welks toppen op een hoofdstraal door een punt van d^2 liggen.

Hieruit volgt:

Met elke rechte lijn a_1 op K_1^2 komt in R een rechte lijn a op K^2 punt voor punt overeen. Is K_1^2 een elliptisch oppervlak, dan is dit ook met K^2 het geval.

7. De gevonden overeenkomst tusschen K^2 en K_1^2 geeft nu aanleiding tot de volgende betrekkingen tusschen de ruimten R en R_1.

a. Met een willekeurige rechte lijn l in R komt in R_1 overeen een kegelsnede l_1^2. Daar l het vlak δ snijdt, zoo gaat l_1^2 door D_1 en daar l slechts twee punten met K^2 gemeen heeft, zoo raakt l_1^2 K_1^2 in twee punten. Met een plat vlak α komt om dezelfde reden overeen een oppervlak van de tweede orde A_1^2, dat door D_1 gaat en K_1^2 volgens een kegelsnede raakt. Als α d^2 snijdt, dan worden de beide stralenbundels, die de snijpunten tot middelpunt hebben, door de kegelsnede, volgens welke α K^2 snijdt, in projectief verband gebracht; met deze stralen komen dus overeen de beide stelsels beschrijvende lijnen op A_1^2, en wel zoodanig, dat, als c_1^2 de raakkegelsnede is van K_1^2 en A_1^2, er uit een punt dezer raakkegelsnede twee beschrijvende lijnen gaan, correspondeerende met twee homologe stralen van de bundels uit de beide snijpunten. Snijdt α d^2 in twee onbestaanbare punten, dan is A_1^2 een elliptisch oppervlak; raakt α d^2, dan is A_1^2 een kegelvlak, welks beschrijvende lijnen met de stralen van den bundel, die het raakpunt tot middelpunt heeft, overeenkomen.

b. Met een kegelsnede c^2 in R, die d^2 in twee punten snijdt, komt overeen een kegelsnede c_1^2 in R_1, die K_1^2, raakt in twee punten, overeenkomende met die snijpunten van c^2 en K^2, die niet in d^2 gelegen zijn. De beide snijpunten van c_1^2 met een vlak α_1 van R_1 komen dan overeen met de beide buiten d^2 gelegen snijpunten van c^2 met het oppervlak A^2 van het stelsel. Zoo komt ook met een oppervlak van de tweede orde A^2, in R door d^2 gebracht en niet tot het stelsel behoorende, een oppervlak A_1^2 overeen van de tweede orde, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt. Deze kegelsneden en oppervlakken onderscheiden zich van de vorige, doordat zij niet door D_1 gaan.

c. De gemelde rechte lijnen, kegelsneden, vlakken en oppervlakken kunnen met K^2 werkelijke of onbestaanbare punten of kegelsneden gemeen hebben. Hiermede stemt in R_1 de werkelijkheid of onbestaanbaarheid der overeenkomstige elementen overeen. Dezelfde overeenstemming bestaat bij de hoofdstralen van R, gaande door D en de overeenkomstige door D_1 gaande rechte lijnen. Snijden deze laatste K_1^2, dan is de involutie der paren gekoppelde punten op de hoofdstralen door D hyperbolisch, met de snijpunten met K^2 tot dubbelpunten, in het tegengestelde geval zijn deze involutiën elliptisch, en er kunnen dus geen paren onbestaanbare gekoppelde punten op de lijn liggen.

8. Gaat men nu terug tot het ontstaan van het oppervlak O^4 met dubbelkegelsnede d^2, dan ziet men, dat hiermede in R_1 overeenkomt een oppervlak van de tweede orde O_1^2, ontstaande door de projectieve vlakkenbundels, welke met de oppervlakkenbundels $\overline{A^2B^2}$ en $\overline{C^2F^2}$ overeenkomen. Het onderzoek van alle doorsneden, bijzondere punten, raakvlakken, enz. van O^4 kan dus teruggebracht worden tot een onderzoek op het oppervlak van de tweede orde. Daarbij gelden dan de volgende regels.

Het oppervlak O^4 is bepaald door d^2, twee d^2 in twee punten snijdende kegelsneden en nog 3 punten; deze vormen namelijk de bepalende elementen der beide projectieve bundels.

Door deze gegevens is ook bepaald het stelsel oppervlakken van de tweede orde en, bij aanname van het punt

Q, het vlakkenstelsel in de ruimte R_1. Even goed als men ten opzichte van Q het poolvlak van een oppervlak van het stelsel bepalen kan, kan men ook, als het poolvlak gegeven is, het oppervlak bepalen. In dit laatste geval is namelijk het oppervlak bepaald door de kegelsnede d^2, een pool met bijbehoorend poolvlak en de voorwaarde, dat het tot het stelsel behoort, alzoo $5 + 3 + 1 = 9$ voorwaarden. Van alle vlakken, lijnen en punten van R_1 kan men alzoo de overeenkomstige in R bepalen.

9. Ter verkrijging eener volledige indeeling van de oppervlakken van de vierde orde met dubbelkegelsnede moet men rekening houden met de omstandigheden, waarin, zoowel het oppervlak O_1^2, dat voortaan beeld-oppervlak zal heeten, als het stelsel oppervlakken kan verkeeren. Hiervoor is in het oog te houden:

a. De aard der kegelsnede d^2. Deze kan zijn:

Een werkelijke of onbestaanbare kegelsnede.

Twee elkander snijdende, werkelijke of onbestaanbare lijnen.

Twee samenvallende lijnen.

b. De aard van het beeld-oppervlak O_1^2. Dit kan zijn:

Een scheef oppervlak.

Een kegeloppervlak.

Elliptische of onbestaanbare oppervlakken van de tweede orde worden voorloopig uitgesloten, omdat volgens onderstelling oppervlakken door projectieve vlakkenbundels ontstaande beschouwd worden.

c. De stand van het basisoppervlak O_1^2 in de ruimte R_1. Bij elk geval zal dit nader aangewezen worden.

d. Het stelsel oppervlakken. Dit stelsel kan, behalve in het algemeene geval, in het bijzondere geval verkeeren, dat alle oppervlakken met elkander, behalve de kegelsnede d^2, nog een vast punt gemeen hebben.

Hierop grondt zich nu een classificatie, die zich zoo nauw mogelijk aansluit aan de classificatie der scheeve oppervlakken van de vierde orde. Bij dit onderwerp, zoowel als bij het vroegere, berust de hoofdgroepeering op den vorm der dubbelkromme. Alzoo worden de volgende groepen gevormd.

Eerste Groep. De kegelsnede d^2 is een werkelijke of onbestaanbare kegelsnede.

Tweede Groep. De dubbelkegelsnede bestaat uit twee elkander snijdende werkelijke of onbestaanbare lijnen.

Derde Groep. De dubbelkegelsnede bestaat uit twee samenvallende lijnen.

De verdeeling in onderdeelen zal bij elke groep afzonderlijk aangegeven worden.

III. Eerste Groep.

10. Bij deze groep onderscheidt men de volgende gevallen:

Geval A. Algemeen geval. Het stelsel oppervlakken zoowel als het beeld-oppervlak biedt geen bijzonderheden aan.

Geval B. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, nog een punt met elkander gemeen. Het beeld-oppervlak biedt geen bijzonderheid aan.

Geval C. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een kegelvlak in geen bijzonderen stand.

Geval D. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een algemeen scheef oppervlak, maar neemt in de ruimte R_1 een bijzonderen stand in.

Geval E. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, nog een punt met elkander gemeen. Het beeld-oppervlak is een scheef oppervlak in een bijzonderen stand.

Geval F. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, een punt gemeen. Het beeld-oppervlak is een kegel in geen bijzonderen stand.

Geval G. Het oppervlakkenstelsel biedt geen bijzonderheden aan. Het beeld-oppervlak is een kegelvlak, dat een bijzonderen stand in de ruimte inneemt.

Geval H. Alle oppervlakken van het stelsel hebben, behalve de dubbelkegelsnede, een punt gemeen. Het beeld-oppervlak is een kegel in een bijzonderen stand.

Bij deze classificatie ziet men, dat er bij het geval A

geen bijzondere onderstellingen worden ingevoerd. Bij de gevallen B, C, D is één bijzondere onderstelling ingevoerd; bij de gevallen E, F, G twee en bij het geval H drie. Bij elk der volgende groepen zal dezelfde indeeling in gevallen in het oog worden gehouden. Zij zal dus later niet weder volledig herhaald worden.

Geval A.

11. Bij dit meest algemeene geval kan men zonder bezwaar de constructie van K^2 en $K_1{}^2$ uitvoeren en dan de meest algemeene eigenschappen van O^4 afleiden. In de eerste plaats kan men de op O^4 liggende krommen beschouwen.

Construeert men in R_1 alle oppervlakken van de tweede orde, die $K_1{}^2$ volgens een kegelsnede raken, zoo snijden deze $O_1{}^2$ volgens ruimtekrommen van de vierde orde eerste soort, die $K_1{}^2$ in vier punten raken; hiermede komen dus in R overeen krommen van de vierde orde op O^4; deze krommen kunnen K^2, behalve in de punten van d^2, in niet meer dan vier punten snijden. Met de beide stelsels beschrijvende lijnen op een der oppervlakken, die in R met deze oppervlakken overeenkomen, komen in R_1 overeen de beide stelsels rechte lijnen die $K_1{}^2$ raken (7 *b*.), zoodat een rechte lijn van elk stelsel de kromme van de vierde orde in twee punten snijdt; de krommen zijn dus van de eerste soort.

Neemt men nu op $O_1{}^2$ vier punten aan, dan bepalen deze acht oppervlakken van de tweede orde, die $K_1{}^2$ volgens een kegelsnede raken; hieruit volgt:

Construeert men ten opzichte van vier punten op O^4 de daarmede gekoppelde punten, dan ontstaan er acht punten, door welke acht ruimtekrommen van de vierde orde bepaald worden, welke geheel op O^4 liggen.

Met alle kegelsneden op $O_1{}^2$ liggende komen mede overeen ruimtekrommen van de vierde orde eerste soort op O^4. Deze worden namelijk door een vlak α in evenveel punten gesneden als de kegelsnede door het overeenkomstige oppervlak $A_1{}^2$, d. i. in vier. Een kegelsnede $c_1{}^2$ op $O_1{}^2$ kan verder in niet meer dan twee punten gesneden worden door

een andere kegelsnede, gaande door D_1 en K_1^2 dubbel rakende; alzoo kan ook de overeenkomstige ruimtekromme van de vierde orde in niet meer dan twee punten door een rechte lijn gesneden worden; deze kromme is dus ook van de eerste soort.

Wanneer de kegelsneden op O_1^2 K_1^2 dubbel raken, dan komen daarmede overeen kegelsneden op O^4 gelegen. Deze kegelsneden kunnen op de volgende wijze opgespoord worden. Legt men door zulk een kegelsnede een vlak α_1, dan snijdt dit O_1^2 en K_1^2 in twee elkander dubbel rakende kegelsneden (7 *b*); α_1 raakt alzoo de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 in twee punten en is dus een raakvlak aan een der vier kegels van de tweede orde, die door de snijkromme kunnen worden gebracht. Hieruit volgt het bestaan van vier groepen kegelsneden op O^4. Legt men door een dezer kegelsneden c_1^2 op O_1^2 een oppervlak van de tweede orde, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt en door D_1 gaat, dan stemt hiermede overeen een vlak door c^2, en dat dus O^4, behalve in c^2, nog in een tweede kegelsnede snijdt, welke alweder overeenkomt met de tweede kegelsnede, volgens welke het oppervlak door c_1^2 O_1^2 snijdt.

Met de rechte lijnen op O_1^2 komen overeen kegelsneden op O^4 gelegen; en daar door twee elkaar snijdende lijnen op O_1^2 een vlak kan gelegd worden, zoo kan door een paar kegelsneden, die elkaar in twee gekoppelde punten snijden, een oppervlak van het stelsel gebracht worden. Van elk stelsel beschrijvende lijnen van O_1^2 zijn er verder vier, die K_1^2 raken; met elk dezer acht raaklijnen komt op O^4 een kegelsnede overeen, die in twee elkaar snijdende lijnen is overgegaan; in het geheel zullen er dus zestien rechte lijnen op O^4 liggen.

Bij deze geheele beschouwing is stilzwijgend ondersteld, dat d^2 bestaanbaar is, terwijl ook de verder besproken krommen als bestaande gedacht werden. In 7 *c* is evenwel opgemerkt, dat men uit de onbestaanbaarheid der punten, lijnen, kegelsneden, enz. in R_1 die in R afleiden kan, en daar in R_1 de genoemde onbestaanbare vormen construeerbaar zijn, zoo kunnen zij overgebracht worden in R. Het

geval dat d^2 onbestaanbaar is en het al of niet aanwezig zijn van deelen van het oppervlak, die in R_1 bestaanbaar zijn, maar in R uit onbestaanbare gekoppelde punten bestaan, zal aan het einde van dit hoofdstuk behandeld worden.

12. Uit de gevonden vormen van krommen op O^4 kunnen gevolgen worden afgeleid. Wanneer men een vlak legt door een kegelsnede c^2 op O^4, dan zal het overige deel der doorsnede een tweede kegelsnede f^2 zijn. De beide kegelsneden snijden elkander in vier punten; twee daarvan behooren tot d^2; de andere twee zijn de beide raakpunten van het vlak met O^4; het vlak is dus dubbel raakvlak. Er moeten alzoo vijf groepen dubbelraakvlakken zijn; de vlakken, die de kegelsneden bevatten, overeenkomende met de beschrijvende lijnen van $O_1{}^2$ en diegene, die de kegelsneden bevatten, overeenkomende met die kegelsneden van $O_1{}^2$, die $K_1{}^2$ dubbel raken.

In R_1 wordt de eerste soort vlakken vertegenwoordigd door de raakvlakken, uit D_1 getrokken aan $O_1{}^2$ en die dus in R door D gaan; zij omhullen dus, zoowel in R_1 als in R, een kegelvlak van de tweede klasse.

Overeenkomstig de in N⁰. 7 en 11 behandelde betrekkingen wordt de tweede soort vlakken in R_1 vertegenwoordigd door de oppervlakken van de tweede orde, die $K_1{}^2$ volgens een kegelsnede raken, door D_1 gaan en $O_1{}^2$ volgens twee kegelsneden snijden. Uit de vastgestelde beginselen volgt nu de volgende constructie.

Men construeere de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van $K_1{}^2$ en $O_1{}^2$. Men legge een raakvlak aan een dezer kegels; dit snijdt $O_1{}^2$ volgens een kegelsnede $c_1{}^2$, dubbelrakende aan $K_1{}^2$. Men legge vervolgens een vlak α_1 door D_1 en de raakkoorde k_1 van $c_1{}^2$ en $K_1{}^2$, α_1 snijdt $K_1{}^2$ volgens een kegelsnede; daarin construeere men nu een kegelsnede $f_1{}^2$, gaande door D_1 en de doorsnede met $K_1{}^2$ in de twee gegeven punten rakende. Is $f_1{}^2$ geconstrueerd, dan zijn er van het oppervlak bekend twee kegelsneden, die elkander in hare raakpunten met $K_1{}^2$ snijden. Een willekeurig vlak β_1 snijdt deze kegelsneden in de punten C_1, $C_1{}^1$ en F_1, $F_1{}^1$. Om den vierhoek, door deze punten

bepaald, moeten nu de kegelsneden beschreven worden, die de doorsnede $\overline{\beta_1 K_1^2}$ dubbel raken. De raakkoorden gaan dan door het snijpunt der diagonalen en verdeelen de koordenparen harmonisch; de beide raakkoorden zijn dus construeerbaar en alzoo zijn de beide oplossingen voor het oppervlak bepaald.

Elk der oppervlakken, door middel van een zelfden dubbelprojecteerenden kegel bepaald, zal evenwel door een vast punt gaan. Het vlak van de kegelsnede, volgens welke een der oppervlakken O_1^2 snijdt, gaat door den top T_1 van den dubbelprojecteerenden kegel. Trekt men nu de lijn D_1 T_1, dan is T_1 een der dubbelpunten van een involutie, van welke de snijpunten van D_1 T_1 met K_1^2 twee toegevoegde punten zijn. Daar D_1 tot elk oppervlak behoort, zoo behoort ook het aan D_1 toegevoegde punt dezer involutie D_1^1 tot een oppervlak, dat K_1^2 volgens een kegelsnede raakt, en daar D_1 een vast punt is, is dit ook het geval met D_1^1; de oppervlakken, behoorende bij een zelfden dubbelprojecteerenden kegel, gaan dus door een vast punt. Brengt men de uitkomsten over in de ruimte R, zoo volgt hieruit:

Elk der vijf groepen van dubbelraakvlakken bestaat uit vlakken, gaande door een punt en een kegel van de tweede klasse omhullende. Deze vijf kegels zijn de naar hun ontdekker genoemde KUMMER'sche kegels.

Hierdoor is dus meetkundig de constructie hunner toppen in R_1 en dus ook in R aangegeven. Dat deze kegels van de tweede klasse zijn, blijkt hieruit, door dat in R_1 door een punt twee raakvlakken aan een dubbelprojecteerenden kegel kunnen gebracht worden.

Aanmerking. Bij de constructie van het dubbelraakvlak blijkt het, dat er in de ruimte R_1 twee oppervlakken gebracht kunnen worden, gaande door D_1 en een aan K_1^2 dubbelrakende kegelsnede, en tevens voldoende aan de voorwaarde K_1^2 volgens een kegelsnede te moeten raken; terwijl er in R slechts één vlak door een kegelsnede op O^4 liggende kan worden gebracht. Deze schijnbare tegenstrijdigheid vindt haar oorsprong in het feit, dat met de twee oppervlakken overeenkomen het vlak, door de

gegeven kegelsnede en dat door de daarmede gekoppelde gebracht.

13. In de wijze, waarop de 16 rechte lijnen op O^4 ontstaan zijn, ligt nu ook een zeer eenvoudige methode besloten om haren stand ten opzichte van elkander te bepalen. Laat de vier rechte lijnen van een op O_1^2 liggend stelsel, die K_1^2 raken, a_1, b_1, c_1, d_1 zijn, die van het tweede stelsel e_1 f_1 g_1 h_1, dan komt met a_1 overeen de lijn a en de daarmede gekoppelde a', die haar in een punt van K^2 snijdt. Op deze wijze de notatie volhoudende, ziet men dat de volgende snijdingen van lijnen ontstaan:

a door a', e, f, g, h; eveneens zijn de rechte lijnen op te maken, die b, c, ... h snijden.

a' door a, e', f', g', h' en eveneens zijn de rechte lijnen op te maken, die b', c', d', e' . . . h' snijden. Van deze zestien lijnen wordt dus ieder door vijf andere gesneden.

Daar de rechte lijnen $a_1 \ldots d_1$, $e \ldots h_1$ op acht vlakken door D_1 liggen, zoo liggen de zestien lijnen in R op acht vlakken door D; eveneens is het bij de overige Kummer'sche kegels gesteld.

14. Op de kromme d^2 liggen een zeker aantal klempunten; in deze vereenigen zich de twee oorspronkelijk gescheiden raakvlakken der dubbelkegelsnede. Ten einde deze op te sporen, denke men zich een vlak α, gaande door een raaklijn aan d^2. Met dit vlak komt in R_1 overeen een kegelvlak A_1^2, gaande door D_1 en aan K_1^2 rakende (7 a). Zij verder A het raakpunt op d^2, dan komen in R_1 met de stralen van bundel A de stralen van den kegel A_1^2 overeen, en met de snijlijn $\overline{\alpha\,\delta}$ de kegelstraal door D_1. Elke straal van bundel A snijdt de snijkromme van α met O^4, behalve in A, nog in twee punten, overeenkomende met de twee snijpunten van den overeenkomstigen kegelstraal en O_1^2. Draait dus α om de raaklijn aan d^2, dan beweegt zich de kegeltop op de overeenkomstige raaklijn uit D_1 aan K_1^2, en men kan alle kegels construeeren, met deze vlakken overeenkomende. Neemt men den veranderlijken top A_1 op O_1^2, dan zal een kegelstraal het oppervlak O_1^2, behalve in A_1, nog slechts in één punt snijden; in het over-

eenkomstige vlak in R zullen dus de stralen van den bundel de snijkromme met O^4, behalve in het punt A, nog slechts in één punt snijden, of wel dit vlak is een raakvlak en snijdt O^4 in een kromme met drievoudig punt. Hieruit volgt:

Daar een raaklijn, uit D_1 aan $K_1{}^2$ getrokken, $O_1{}^2$ in twee punten snijdt, zoo zijn er twee aan $K_1{}^2$ omgeschreven kegels, die hun toppen op $O_1{}^2$ hebben, en van welke de raaklijn een straal is; eveneens zijn er door elke raaklijn aan d^2 twee raakvlakken aan O^4 te construeeren.

Laat nu de raaklijn uit D_1 aan $K_1{}^2$ zoodanig getrokken zijn, dat zij tevens aan $O_1{}^2$ raakt; dan vallen de twee evengenoemde omhullingskegels aan $K_1{}^2$ te zamen, alzoo ook de beide raakvlakken, door de overeenkomstige raaklijn aan d^2 gebracht; het punt van d^2, waardoor deze raaklijn getrokken is, is dus een klempunt. Hieruit volgt:

Construeert men door D_1 de omhullingskegels aan $K_1{}^2$ en $O_1{}^2$, dan zullen deze in het algemeen elkander in vier stralen snijden. Deze vier stralen raken $O_1{}^2$ in de toppen der vier kegels, die met de vier raakvlakken in de klempunten op d^2 overeenstemmen.

Door deze klempunten wordt d^2 verdeeld in twee dubbele en in twee geïsoleerde deelen. Hieruit is voor een willekeurig vlak van doorsnede de aard van de dubbelpunten der doorsnede af te leiden. Daar de beide omhullingskegels elkander in een of twee stralen kunnen raken, in een straal een osculatie kunnen bezitten, of zelfs een aanraking van de derde orde, zoo zoude men hierop een verdeeling van het algemeene oppervlak kunnen gronden op gelijke wijze als dit vroeger bij de scheeve oppervlakken is geschied. De uitgebreide verdeeling, die evenwel reeds ontstaat door de gemaakte indeeling, maakt het niet wenschelijk ook op deze verdeeling verder in te gaan, vooral omdat het beginsel hier is aangewezen.

De raakvlakken aan d^2 vormen een ontwikkelbaar oppervlak, waarvan de klasse bepaald kan worden. Daartoe bepale men hoeveel vlakken van dit oppervlak er door een punt A kunnen gebracht worden. Dit aantal vlakken stemt

in R_1 overeen met dat der kegels, door A_1 gebracht, gaande door D_1, rakende aan K_1^2 en met hun top gelegen op O_1^2. Men construeere uit A_1 als top een omhullingskegel aan K_1^2; zoo ook uit D_1 als top; deze twee omhullingskegels snijden elkander in twee kegelsneden, waarop de top van een der gevraagde kegels moet liggen. Daar deze kegelsneden O_1^2 in acht punten snijden, zoo volgt hieruit, dat er acht kegels zijn en dus ook acht vlakken van het oppervlak, die door A gaan. Het oppervlak is dus van de achtste klasse.

15. De dubbelraakvlakken bepalen op O^4 door hunne raakpunten met dit oppervlak de connodale lijn. Deze connodale lijn splitst zich in de volgende deelen. In de eerste plaatst de vijf ruimtekrommen van de vierde orde, volgens welke de vijf Kummer'sche kegels O^4 raken; ten tweede de zestien rechte lijnen van het oppervlak. Op elk dezer lijnen kan men de plooipunten bepalen, d. i. die punten, waarin de twee anders gescheiden raakpunten van het dubbelraakvlak te zamen vallen.

Denkt men zich de Kummer'sche kegels geconstrueerd, dan liggen er op elk dezer kegels vier stralen, die aan de connodale lijn raken. De raakpunten zijn plooipunten van het oppervlak; op den Kummer'schen kegel, die tot top D heeft, zijn het buitendien punten, die met zich zelven gekoppeld zijn; zij liggen dus op het kernoppervlak K^2.

Ook op de rechte lijnen kan men de plooipunten opsporen. Legt men door een rechte lijn a van O^4 een vlak α, dan snijdt dit O^4 nog volgens een kromme van de derde orde c^3, die een dubbelpunt A heeft in het niet in a gelegen snijpunt van α met d^2, en α snijdt in het punt, dat a gemeen heeft met d^2 en in nog twee andere punten B en C. Deze laatste punten zijn de beide raakpunten van α met O^4. Men kan zich deze kromme c^3 ontstaan denken door den kegelsnedenbundel, volgens welken een der oppervlakkenbundels α snijdt en den daarmede projectieven stralenbundel, welks top A is. Beide bundels bepalen op a twee projectieve puntenrijen, die tot dubbelpunten hebben B en C. Draait men nu α om a, dan zal de puntenrij, door den

kegelsnedenbundel op a bepaald, dezelfde blijven, daar zij bestaat uit de snijpunten van den oppervlakkenbundel met a; de puntenrij, door den stralenbundel bepaald, verandert daarentegen, daar ook A verandert. Van deze puntenrij blijven evenwel twee punten standvastig. De rechte lijn a wordt namelijk door de aan haar gekoppelde a' in een punt S gesneden; en dit punt komt voor elken stand van α overeen met hetzelfde punt S' van de tweede puntenrij, daar het de top is van een kegel, tot den eersten oppervlakkenbundel behoorende, met welken kegel slechts één oppervlak van den tweeden bundel homoloog is. Zoo is ook met het snijpunt van d^2 en a een zelfde punt van de tweede puntenrij homoloog. Men heeft alzoo op a een vaste puntenrij en een reeks puntenrijen, welke allen twee vaste punten hebben, homoloog met twee vaste punten van de eerste rij. De dubbelpunten, welke men verkrijgt door elk der wisselende rijen in projectief verband te brengen met de vaste rij vormen dan een involutie, welker toegevoegde punten de tweetallen veranderlijke raakpunten voorstellen, die men verkrijgt wanneer men α om a laat draaien. De dubbelpunten dezer involutie zijn de plooipunten op a.

Hieruit volgt nu de stelling:

Een oppervlak van de vierde orde met dubbelkegelsnede bezit 52 plooipunten; 20 zijn gelegen op de krommen van de vierde orde, volgens welke het geraakt wordt door de vijf KUMMER'sche kegels; 32 zijn op de 16 beschrijvende lijnen gelegen *).

16. In N⁰. 7 c en 11 werd reeds opgemerkt, dat, wanneer lijnen of kegelsneden, met K_1^2 onbestaanbare punten gemeen hebben, dit ook met de snijpunten der overeenkomstige vormen met K^2 het geval moest zijn. Tevens bleek het, dat werkelijke punten in R_1 zoowel tot werkelijke als tot onbestaanbare punten in R aanleiding kunnen geven. Het is wenschelijk een algemeen middel te bezitten, om die punten in R_1, met welke in R werkelijke punten overeenkomen

*) Den naam plooipunt neem ik over van Dr. D J. KORTEWEG. Zie *Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wissenschaften.* Wien. Bd. XCVIII. Juli 1889.

te onderscheiden van die, met welke onbestaanbare overeenkomen. Vooreerst is het duidelijk, dat de meetkundige plaats van alle punten in R_1, met welke in R punten overeenkomen, die met zich zelven gekoppeld zijn, de grens zal aanwijzen tusschen twee deelen, waarin de ruimte R_1 verdeeld wordt.

Het ligt verder voor de hand, dat deze verdeeling der ruimte in twee deelen afhangt van de werkelijkheid of onbestaanbaarheid van d^2. Daar nu de meetkundige plaats der genoemde grenspunten in R_1 het oppervlak $K_1{}^2$ is, zoo volgt hieruit, dat men een klaar beeld dezer verdeeling zal verkrijgen, wanneer men alle verschillende vormen van d^2 en $K_1{}^2$ (dus ook van K^2) nagaat. Daarbij blijkt het dan, op welke wijze men de gevondene uitkomsten ook op andere gevallen toe kan passen.

a. d^2 is werkelijk bestaande; K^2 en $K_1{}^2$ zijn regeloppervlakken. Men kan door D steeds eene lijn l trekken, die K^2 niet snijdt; daarmede komt in R_1 eene lijn l_1 overeen door D_1, die $K_1{}^2$ niet snijdt; met de puntenrij op l_1 komt een elliptische involutie op l overeen; op l liggen dus geen toegevoegd imaginaire punten. Alle punten van R_1, op lijnen getrokken door D_1 en die $K_1{}^2$ niet snijden, vertegenwoordigen dus de bestaande gekoppelde puntenparen in R; hieruit volgt:

Zijn K^2 en $K_1{}^2$ regeloppervlakken, dan komen met de punten der ruimte R_1, die gelegen zijn aan dien kant van het oppervlak, aan welken D_1 ligt, werkelijke gekoppelde puntenparen in R overeen; met de punten aan den anderen kant komen onbestaanbare gekoppelde punten overeen.

b. d^2 is werkelijk bestaande; K^2 en $K_1{}^2$ zijn elliptische oppervlakken. D en D_1 liggen nu buiten K^2 en $K_1{}^2$. Met een lijn l door D, die K^2 niet snijdt, komt weder in R_1 eene lijn l_1 door D_1 overeen, die $K_1{}^2$ niet snijdt. Om dezelfde reden als bij het geval *a* liggen op deze lijn punten, die overeenkomen met bestaande gekoppelde puntenparen; hieruit volgt:

Wanneer d^2 en $d_1{}^2$ werkelijk bestaande zijn en K^2 en $K_1{}^2$ elliptische oppervlakken, dan liggen die punten van

R_1, met welke in R bestaande gekoppelde punten overeenkomen, buiten K_1^2 en die punten. met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, binnen K_1^2.

c. d^2 is onbestaanbaar; K^2 en K_1^2 zijn elliptische oppervlakken. D en D_1 liggen nu binnen K^2 en K_1^2. Men trekke door D de lijn l en door D_1 de daarmede overeenkomende l_1. Men denke zich nu een bundel uit het stelsel oppervlakken van de tweede orde genomen; snijdt deze bundel K^2 slechts volgens werkelijke kegelsneden, dan kan de involutie van de snijpunten van den bundel met l hyperbolisch of elliptisch zijn; snijdt daarentegen de bundel K^2 ook in onbestaanbare kegelsneden, dan is de involutie noodzakelijk hyperbolisch. Zoo zal ook in R_1 een bundel vlakken l_1 snijden in punten, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, wanneer de vlakken K_1^2 niet snijden. De ruimte buiten K_1^2 bevat dus die punten, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen.

d. d^2 is onbestaanbaar; zoo ook K^2 en K_1^2. Alle involutiën, volgens welke een lijn door D gesneden wordt, zijn elliptisch; er zijn dus geen onbestaanbare gekoppelde punten.

17. Heeft men nu O_1^2 aangenomen, dan kan men, met behulp dezer beginselen, nagaan welke krommen, kegelsneden en rechte lijnen op O^4 werkelijk of onbestaanbaar worden. Eveneens blijkt het, dat O^4 geheel onbestaanbare gedeelten bezitten kan. Daar deze verhandeling zich evenwel slechts met de hoofdpunten bezig houdt, zoo moet dit onderzoek, even als verschillende andere constructiën, tot een lateren arbeid voorbehouden blijven. Bij dit geval, zoowel als bij de volgende, is er verder naar gestreefd, zoo min mogelijk in herhaling te treden van uitkomsten door anderen en meer bijzonder door Segre verkregen.

Geval B.

18. Het stelsel oppervlakken, gelegen in de ruimte R, bestaat uit alle oppervlakken van de tweede orde, gebracht door de vaste kegelsnede d^2 en een vast punt D, waarbij

voorloopig weder aangenomen wordt, dat d^2 een werkelijke kegelsnede is. De algemeene betrekking tusschen de ruimten R en R_1 wordt nu gewijzigd; die wijzigingen, welker kennis, met het oog op het volgende, onmisbaar is, zullen nu worden aangegeven.

Het oppervlak K^2 gaat over in het kegeloppervlak K^2, dat het vaste punt D, dat aan alle oppervlakken gemeen is, tot top heeft, en de kegelsnede d^2 tot richtlijn. Met een lijn a, door D getrokken, komt in R_1 een lijn a_1 overeen, door D_1 getrokken; doch, daar de punteninvolutie op a parabolisch is, zoo komt met elk punt op a_1 slechts één punt op a overeen. Gaat de straal uit D door een punt A van d^2, ligt hij alzoo op K^2, dan zijn alle punten van DA toppen van kegels, tot het stelsel behoorende; met deze kegels komen in R_1 overeen vlakken, die eveneens door een lijn moeten gaan; hieruit volgt:

Met alle kegelvlakken van het stelsel komen in R_1 overeen vlakken, gaande door raaklijnen aan een kegelsnede d_1^2, in een vlak δ_1 gelegen.

Met een vlak α_1 in R_1 komt overeen een oppervlak A^2 in R, gaande door d^2 en D; dit oppervlak snijdt dus K^2 volgens twee beschrijvende lijnen. Met deze lijnen komen overeen de lijnen, getrokken van D_1 naar de snijpunten van α_1 met d_1^2 en de snijlijn $\alpha_1 \delta_1$ zelve. Met de lijnen, getrokken in α_1 door de snijpunten van α_1 met d_1^2, komen de beschrijvende lijnen van A^2 overeen.

En volmaakt op dezelfde wijze komt met een vlak α in R een oppervlak A_1^2 in R_1 overeen, gaande door d_1^2 en D_1. Met de beschrijvende lijnen op A_1^2 komen de beide stralenbundels door de snijpunten van α met d^2 overeen; en met de verbindingslijn dezer snijpunten komen de beide beschrijvende lijnen door D_1 overeen.

Met alle lijnen, door een punt van d_1^2 getrokken, komen in R overeen lijnen, die d^2 snijden en tevens een punt gemeen hebben met den kegelstraal, uit D getrokken naar het overeenkomstige punt van d^2. Het omgekeerde geldt van de lijnen, getrokken door een punt van d^2.

Uit dit alles volgt, dat het oppervlak K_1^2 zich heeft

afgeplat tot de kegelsnede d_1^2, en dat de ruimte R in hetzelfde verband tot R_1 staat als R_1 tot R.

19. Met het oog op de opmerking van N°. 17 zullen voor de beschouwing van het oppervlak O^4, dat in dit stelsel uit het beeldoppervlak O_1^2 wordt afgeleid, slechts de hoofdpunten aangegeven worden van de uitkomsten, bij het geval A reeds verkregen; terwijl meer in het bijzonder in het licht zal gesteld worden, in welke opzichten dit oppervlak van het vorige verschilt *).

Trekt men een lijn l_1 door D_1, welke O_1^2 snijdt, dan komen met de twee snijpunten als vroeger overeen de twee puntenparen, die in de involutie op l homoloog zijn met de punten van de puntenrij op l_1. Daar de involutie op l evenwel parabolisch is, zoo ligt van elk dezer paren een punt in D; hieruit volgt, dat D een dubbelpunt van O^4 is. Met een raaklijn door dit dubbelpunt komt overeen een lijn, door D_1 getrokken naar een gemeenschappelijk punt van δ_1 en O_1^2; dan toch valt een der snijpunten samen met D. Met den kegel, die D_1 tot top en de snijkromme van δ_1 met O_1^2 tot richtlijn heeft, komt dus de raakkegel aan D overeen, zoodat D een kegelpunt is.

De ruimtekrommen van de vierde orde, op O^4 liggende, bevatten in dit geval één groep, die een dubbelpunt bezit; het zijn die, welke met de kegelsneden van O_1^2 overeenkomen en dus ontstaan door de snijding van O^4 met oppervlakken van het stelsel. Van de kegelsneden op O^4 gaan diegene door D, welke met de rechte lijnen op O_1^2 overeenkomen.

Van de rechte lijnen, die op het oppervlak liggen, gaan er vier door D; met deze lijnen komen overeen de gemeenschappelijke stralen der kegels, wier gemeenschappelijke top D_1 is, en die tot richtlijnen hebben d_1^2 en de snijkromme $\delta_1\ O_1^2$; want deze hebben in R meer dan vier

*) Het hier beschreven oppervlak is hetzelfde als datgene, wat Reye langs een geheel anderen weg uit een algemeen stelsel afleidt (*G. d. L.* Deel II, p. 288—290). Wel maakt hij nog een opmerking in N°. 116 omtrent die gelijkheid

punten met O^4 gemeen. De andere rechte lijnen worden in R_1 vertegenwoordigd door de acht beschrijvende lijnen van O_1^2, die door de vier snijpunten van d_1^2 met O_1^2 gaan. Met deze acht lijnen komen acht lijnen op O^4 overeen; de vier lijnen door D moeten dus gerekend worden acht rechte lijnen te vervangen.

Zooals gebleken is, zijn de vier rechte lijnen door D de snijlijnen van den kegel K^2 en den kegel, die met $D_1 - \overline{\delta_1 O_1^2}$ overeenkomt. Deze laatste is de raakkegel van D. Er gaat evenwel nog een derde kegel uit D, het is de kegel, welks stralen de raaklijnen zijn, uit D aan een ander punt van het oppervlak getrokken. Hij wordt in R_1 vertegenwoordigd door den omhullingskegel, uit D_1 aan O_1^2 getrokken.

Overeenkomstig hetgeen bij het voorgaande geval opgemerkt is, vervult deze kegel ook hier de rol van Kummer'schen kegel. De volgende uitkomsten zijn nu af te leiden.

a. De kegel $D_1 - \overline{\delta_1 O_1^2}$ snijdt O_1^2 nog in een tweede kegelsnede; alzoo snijdt de raakkegel O^4 in een ruimtekromme van de vierde orde met dubbelpunt.

b. Ook de Kummer'sche kegel raakt O^4 in een dergelijke kromme.

c. De Kummer'sche kegel raakt den raakkegel volgens twee stralen, die met O^4 in D vier punten gemeen hebben.

d. De Kummer'sche kegel snijdt den kernkegel K^2 in vier lijnen, die D met de klempunten op d^2 verbinden.

Behalve den Kummer'schen kegel uit D, kan men, even als in geval A, nog de overige kegels opsporen. De vier dubbelprojecteerende kegels der snijkromme van O_1^2 en K_1^2 gaan voor dit geval over in de drie tweetallen overstaande zijden van den volledigen vierhoek der snijpunten van d^2 en O_1^2. Noemt men deze snijpunten T_1', T_1'', T_1''', dan ligt dus op elk der lijnen $D_1 T_1'$, $D_1 T_1''$, $D_1 T_1'''$ een punt, waarmede in R een top van een Kummer'schen kegel overeenkomt. Constructief kan het punt op $D_1 T_1'$ bepaald worden door een vlak α_1 door $D_1 T_1'$ te leggen; dit snijdt d_1^2 in twee punten A_1 en B_1 en een andere kegelsnede van O_1^2,

die door een vierhoekszijde uit T_1' gaat, in twee andere punten C_1, D_1; de kegelsnede door D_1, A_1, B_1, C_1, D_1 snijdt $D_1 T_1'$ in het gevraagde punt, van 'twelk men het overeenkomstige in R construeeren kan. De KUMMER'sche kegel uit D moet dus geacht worden twee diergelijke kegels te vertegenwoordigen.

20. Ten slotte kan men opmerken, dat de beschrijvende lijnen van het kernoppervlak K^2, die tevens rechte lijnen op O^4 zijn, gesneden moeten worden door twee der andere rechte lijnen. Trekt men in R_1 namelijk een lijn van D_1 naar een snijpunt van d_1^2 met $\underline{O_1^2 \delta_1}$, dan wordt deze lijn door twee beschrijvende lijnen van O_1^2 in dit snijpunt gesneden. Deze twee lijnen komen met twee lijnen in R overeen, die de overeenkomstige lijn door D in twee punten snijden. De stand der lijnen op O^4 is dus zoodanig, dat de vier rechte lijnen door D ieder gesneden worden door twee andere, welke niet door D gaan; de overige acht liggen zoodanig, dat elk gesneden wordt door vier andere.

Van de plooipunten blijven bestaan die op de acht rechte lijnen, die niet door D gaan en die op de drie raakkrommen van de KUMMER'sche kegels, welker top D niet is, alzoo $2 \times 8 + 3 \times 4 = 28$ plooipunten. In D zijn dus 24 plooipunten vereenigd *).

Is verder d^2 werkelijk bestaande, dan zal ook d_1^2 dit zijn; daar verder alle involutiën op rechte lijnen door D parabolisch zijn, zoo komen geen onbestaanbare gekoppelde punten voor, met welke in R_1 bestaande punten zouden overeenkomen.

Geval C.

21. In dit geval gelden omtrent het oppervlakkenstelsel alle uitkomsten, gevonden in het geval A.

Zij verder het beeld-oppervlak een kegeloppervlak O_1^2 met een top A_1. Het eerste dat oogenblikkelijk op te mer-

*) Deze uitkomst stemt overeen met die verkregen door Dr. D. J. KORTEWEG in het aangehaalde geschrift. Zie blz. 34 daarvan.

ken valt, is dat alle vlakken, gebracht door de lijn $D_1 A_1$, O_1^2 in twee beschrijvende lijnen snijden. Met deze vlakken komen dus in R overeen vlakken, die O^4 snijden in twee kegelsneden, hebbende met elkander steeds de gekoppelde punten A en A' gemeen. De punten A en A' zijn dus dubbelpunten. Wordt het vlak door $D_1 A_1$ een raakvlak aan O_1^2, dan wordt in R de snijding een enkele kegelsnede. Dit oppervlak O^4 bezit dus twee raakvlakken, die volgens een enkele kegelsnede raken.

De kegel O_1^2 zal in het algemeen vier stralen bezitten, die K_1^2 raken; hieruit volgt:

Door elk der dubbelpunten gaan vier rechte lijnen, die geheel op O^4 liggen; deze acht rechte lijnen snijden elkander twee aan twee in punten van het kernoppervlak K^2. Daar verder de vier raakpunten der raaklijnen uit A_1 aan K_1^2 in het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2 liggen, zoo liggen in R de vier homologe punten in een vlak, overeenkomende met het oppervlak van de tweede orde, dat door D_1 gaat en K_1^2 raakt volgens het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2.

Twee Kummer'sche kegels worden vervangen door het vlakkenpaar, dat de raakkegelsneden bevat; er blijven er drie over, die op de gewone wijze geconstrueerd worden, en welker toppen volgens N^0. 12 in het poolvlak van A_1 ten opzichte van K_1^2 hunne vertegenwoordigers in R_1 vinden.

De klempunten liggen in de Kummer'sche vlakken, door de kegelpunten A A' gebracht. Alle punten der kegelsneden in de beide Kummer'sche vlakken moeten als plooipunten worden beschouwd.

Ook bij dit oppervlak geeft de beschouwing van het geval, dat d^2 imaginair is, na het opgemerkte hieromtrent bij het geval A, geen stof tot bijzondere beschouwingen.

Geval D.

22. Bij dit geval begint de beschouwing van de bijzondere standen, die O_1^2 in de ruimte R_1 innemen kan. Daar deze vele in getal zijn, zoo zal gedurig de opsomming der

bijzondere standen vooropgesteld worden; terwijl die gevallen, waarbij het aangeven van constructiemethoden tevens den weg wijst bij de volgende gevallen, nader besproken worden.

Voor de overige standen zal dan een verwijzing voldoende zijn.

23. De te beschouwen bijzondere standen van O_1^2 ten opzichte van K_1^2 zijn:

a. O_1^2 raakt K_1^2.

b. O_1^2 raakt K_1^2 zoodanig, dat de snijkromme van beiden in het raakpunt A_1 een keerpunt heeft.

c. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

d. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde, door de gemeenschappelijke beschrijvende lijn geraakt.

e. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

f. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkander raken.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een kegelsnede en twee elkaar snijdende lijnen.

h. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden en twee elkaar snijdende lijnen, welker snijpunt in de kegelsnede ligt.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een scheeve vierzijde.

k. De omhullingskegel, uit D_1 aan K_1^2 getrokken, valt samen met dien uit D_1 aan O_1^2.

l. Als voren; maar de beide snijpunten der raakkegelsneden vallen te zamen, zoodat deze kegelsneden elkander raken.

m. Als *k*; maar O_1^2 raakt nog K_1^2.

n. Als voren; O_1^2 raakt K_1^2 in een punt van de raakkegelsnede op K_1^2.

24. Overgaande tot de nadere beschouwing van stand *a*, ziet men het volgende.

Laat het raakpunt van K_1^2 en O_1^2 A_1 zijn, waarmede in R het punt A correspondeert. Met de rechte lijnen, door A getrokken, komen overeen kegelsneden, door D_1 gaande en K_1^2 in A_1 en nog een ander punt rakende. Men legge een vlak α_1 door $D_1 A_1$; dit snijdt O_1^2 en K_1^2 in de kegel-

sneden c_1^2 en k_1^2, die elkander in A_1 raken. Alle kegelsneden, in α_1 getrokken door D_1, welke c_1^2 en k_1^2 in A_1 en k_1^2 buitendien nog in een ander punt raken, snijden c_1^2 nog in twee punten; hiermede komen overeen de twee punten, waarin de overeenkomstige lijn c door A O^4 nog snijdt; het punt A is dus een dubbelpunt van de doorsnede van O^4 met α.

Om in α de raaklijnen aan dit dubbelpunt te kunnen trekken, moet men in α_1 de kegelsneden construeeren, gaande door D_1, rakende aan k_1^2 en c_1^2 in A_1 osculeerende. Daartoe denke men zich een kegelsnedenbundel, bestaande uit de kegelsneden, gaande door D_1 en c_1^2 in A_1 osculeerende. Elke kegelsnede van dien bundel snijdt k_1^2 nog in twee punten, welker verbindingslijn een straal van een stralenbundel is, van welken ook $D_1 A_1$ een straal is. Construeert men dus een kegelsnede van den bundel, dan snijdt deze k_1^2 nog in twee punten. Uit het snijpunt B_1 der verbindingslijn met $D_1 A_1$ trekke men de raaklijnen aan k_1^2; deze geven de gezochte raakpunten. Er zijn dus twee oplossingen d. i. twee raaklijnen aan de snijkromme in A. De twee raaklijnen kunnen samenvallen; alsdan moet α_1 zoodanig zijn aangebracht, dat k_1^2 en c_1^2 elkander osculeeren; α_1 moet dan gelegd worden door $D_1 A_1$ en een raaklijn aan de snijkromme van K_1^2 en O_1^2; er zijn twee diergelijke vlakken te construeeren; hieruit volgt dus, dat men twee vlakken door $D A$ kan leggen, zoodanig dat de beide raaklijnen in het dubbelpunt der snijkromme samenvallen en het dubbelpunt in een keerpunt overgaat. Daar deze vlakken raakvlakken zijn van den raakkegel in het dubbelpunt A, zoo blijkt dat het punt A een kegelpunt is.

Van de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 blijven er (behalve de kegel, die A_1 tot top heeft) nog twee bestaan; hieruit volgt:

Van de vijf KUMMER'sche kegels van O^4 blijven er drie bestaan; de beide andere vereenigen zich in den raakkegel, uit A aan O^4 getrokken.

Het aantal overblijvende rechte lijnen op O^4 stemt overeen met het dubbele aantal rechte lijnen van O_1^2, dat de

snijkromme van K_1^2 en O_1^2 raakt; buitendien zijn er nog twee rechte lijnen op O_1^2, die door A_1 kunnen getrokken worden. Daar er van elk stelsel van beschrijvende lijnen twee raaklijnen zijn aan de snijkromme, zoo heeft men:

Heeft O^4 een kegelpunt, dan liggen er in het geheel twaalf rechte lijnen op O^4; vier dezer rechte lijnen gaan door het kegelpunt.

Het aldus verkregen oppervlak stemt dus geheel en al overeen met het oppervlak van het geval B; maar de meetkundige afleiding is een geheel andere; zij heeft het voordeel, dat men haar op de nu volgende gevallen kan toepassen, waartoe nu zal worden overgegaan.

25. De standen, die met behulp der gegeven constructiën te beredeneeren zijn, zijn:

b. Heeft de snijkromme in A_1 een keerpunt, dan is er slechts één vlak te construeeren door D_1 A_1, zoodanig dat c_1^2 en k_1^2 elkander osculeeren, nl. het vlak door D_1 A_1 en de keerraaklijn; de raakkegel in A gaat dus over in twee elkaar snijdende vlakken; A is een biplanaar punt van de eerste soort. In elk dezer vlakken komen nu twee rechte lijnen te liggen, terwijl er nog vier andere zijn.

c. Daar de beide gemeenschappelijke punten der koorde en der ruimtekromme van de derde orde A_1 en B_1 de rol vervullen van dubbelpunten, zoo bezit O^4 twee kegelpunten, die zich evenwel van het geval C onderscheiden, door dat hunne verbindingslijn op het oppervlak O^4 ligt; buitendien gaan er door A en B nog twee rechte lijnen en er zijn nog vier niet door deze punten gaande rechte lijnen op O^4.

d. De beide kegelpunten vereenigen zich in een biplanaar punt van de tweede soort; de hoofdraaklijn hiervan ligt op O^4; er gaan nog twee andere lijnen door het biplanare punt, terwijl er nog twee andere rechte lijnen op O^4 liggen.

e. Er ontstaan twee kegelpunten; bij onderzoek blijkt dit geval met het geval C overeen te stemmen.

f. Er ontstaat ook nu een biplanaar punt van de tweede soort, zich onderscheidende van *d* doordat de hoofdraaklijn niet op O^4 ligt; door dit punt gaan vier rechte lijnen op O^4.

g. Er ontstaan drie kegelpunten; is A_1 het snijpunt der beide gemeenschappelijke beschrijvende lijnen en zijn B_1 en C_1 die der lijnen met de kegelsnede, dan verkeeren de kegelpunten A en B en A en C ten opzichte van elkander in het verband bij *c* aangegeven; B en C in dat bij *e* behandeld.

h. De drie kegelpunten van het voorgaande geval vereenigen zich in een uniplanaar punt van de eerste soort, door hetwelk op O^4 twee rechte lijnen getrokken kunnen worden. Het raakvlak wordt in R_1 vertegenwoordigd door het oppervlak van de tweede orde, gebracht door D_1 en volgens de beide gemeenschappelijke beschrijvende lijnen $K_1{}^2$ rakende.

i. Er ontstaan vier kegelpunten, twee aan twee verbonden door vier lijnen op het oppervlak O^4.

26. Geheel andere eigenschappen verkrijgt het oppervlak O^4, wanneer $O_1{}^2$ zich bevindt in een der standen *k* tot *n*; om welke reden weder de eerste stand *k* meer bijzonder zal worden nagegaan.

k. Uit de constructie, in N⁰. 14 voor de klempunten op d^2 aangegeven, volgt dat, wanneer de raakkegels, uit D_1 aan $K_1{}^2$ en $O_1{}^2$ beschreven, dezelfde zijn, elk punt van d^2 de eigenschappen van een klempunt moet bezitten; d^2 is dus een keerkegelsnede van O^4. $K_1{}^2$ en $O_1{}^2$ snijden elkander volgens twee elkander snijdende kegelsneden; door de snijlijn van de vlakken van deze kegelsneden gaan de poolvlakken van D_1 ten opzichte van $O_1{}^2$ en $K_1{}^2$ en deze vormen met de vorige een harmonischen vlakkenbundel. De raakkegel van D aan K^2 is dus tevens de Kummer'sche kegel uit D; maar de kromme van de vierde orde, volgens welke deze aan O^4 raakt, gaat over in twee elkaar snijdende kegelsneden, waarvan er een met de keerkegelsnede d^2 samenvalt en de andere overeenstemt met de raakkegelsnede van D_1 aan $O_1{}^2$. O^4 snijdt verder het kernoppervlak eveneens in twee kegelsneden.

Elk punt P_1 van de raakkegelsnede op $O_1{}^2$ is de top van een kegel, die aan $K_1{}^2$ raakt en met het raakvlak aan een overeenkomstig punt van d^2 overeenkomt (14);

de stralen van zulk een raakkegel uit P_1 snijden O_1^2 nog in een tweede punt. Valt evenwel P_1 in een snijpunt der vier kegelsneden, dan gaat de raakkegel over in een raakvlak en de stralen door dit punt zijn de raaklijnen aan O_1^2. In R zal dus het overeenkomstige punt van d^2 de eigenschap bezitten, dat de lijnen, daardoor in het raakvlak getrokken, de snijkromme van dat raakvlak met O^4 in vier samenvallende punten snijden. Daar dit punt dus de rol van een viervoudig punt speelt, is het een sluitpunt (close-point van CAYLEY). De keerkegelsnede heeft dus twee sluitpunten, waarvan de constructie thans is aangegeven. Door elk der beide sluitpunten gaan vier op O^4 liggende rechte lijnen; zij liggen in de vlakken, met de raakvlakken aan O_1^2 in de beide snijpunten der kegelsneden overeenkomende, en komen overeen met de beschrijvende lijnen van O_1^2 in die vlakken. Behalve de kegel uit D zijn er nog twee KUMMER'sche kegels.

Uit dezen stand laten zich nu de andere bijzondere standen dadelijk afleiden.

l. De beide sluitpunten op d^2 vallen samen.

m. Behalve de keerkegelsnede is er nog een kegelpunt. De oppervlakken O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in dit geval volgens een kegelsnede en twee elkaar snijdende lijnen, die de kegelsnede snijden.

n. Het snijpunt der beide bij *m* genoemde rechte lijnen valt op de kegelsnede; waaruit volgt, dat het kegelpunt in de beide samenvallende sluitpunten valt.

Geval E.

27. Dit geval houdt zich bezig met die bijzondere standen van O_1^2, welke voor kunnen komen als het stelsel oppervlakken een vast punt heeft, 'twelk aan alle oppervlakken gemeen is. Daar de algemeene stand van O_1^2 voor deze aanname bij het geval B besproken is, zoo zal, op het voetspoor van geval D, weder eerst de opsomming van de bijzondere standen gegeven worden.

a. O_1^2 raakt aan het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de kegelsnede d_1^2.

c. O_1^2 raakt het vlak δ_1 en een der hierin liggende beschrijvende lijnen raakt d_1^2.

d. O_1^2 raakt d_1^2 in twee punten.

e. O_1^2 raakt δ_1 en de beide hierin liggende beschrijvende lijnen raken d_1^2.

f. O_1^2 raakt vlak δ_1 en het snijpunt der hierin gelegen beschrijvende lijnen ligt op d_1^2.

g. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven.

h. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven en raakt δ_1.

i. O_1^2 is in kegel $D_1\, d_1^2$ beschreven en raakt d_1^2 in twee samenvallende punten.

28. Uit hetgeen omtrent het ontstaan van een kegelpunt bij geval B is opgemerkt volgt:

a. Het kegelpunt gaat over in een biplanaar punt van de eerste soort; de beide vlakken, waarin de raakkegel is overgegaan, worden vertegenwoordigd door de vlakken, gebracht door D_1 en de beschrijvende lijnen, volgens welke O_1^2 aan δ_1 raakt. Dit geval stemt overeen met geval D *b.*

b. Het geval *b* verdient eenigszins nadere beschouwing. Laat O_1^2 d_1^2 raken in A_1; met alle lijnen, door A_1 getrokken, komen in *R* overeen lijnen, die den straal *D A* van K^2 en tevens d^2 snijden. Liggen nu deze lijnen in het raakvlak van O_1^2 in A_1, dan liggen de overeenkomstige in *R* alle op een kegel, die een vast punt *A* van O^4 tot top heeft en d^2 tot richtlijn; deze lijnen hebben geen ander punt met O^4 gemeen dan *A* en een punt van d^2; *A* is alzoo een dubbelpunt. De stralen van den raakkegel komen overeen met de kegelsneden, gebracht door D_1, een punt gemeen hebbende met d_1^2 behalve A_1 en O_1^2 in A_1 osculeerende. Het oppervlak O^4 heeft dus twee kegelpunten, verbonden door een daarop gelegen lijn; dit geval stemt dus overeen met *D c.*

c. Verbindt men de voorwaarden *a* en *b*, dan ziet men, dat hierbij ontstaat een kegelpunt en een biplanaar punt van de eerste soort, welk geval bij de vorige rubriek niet voorkwam.

d. O^4 heeft drie kegelpunten als *D g.*

e. Hierbij ontstaan twee kegelpunten en een biplanaar punt van de eerste soort.

f. Het dubbelpunt, dat bij den stand *b* is nagegaan, heeft nu tot raakkegel een kegel, overeenkomende met het vlak δ_1, in hetwelk de twee beschrijvende lijnen liggen. Hieruit volgt, dat het bewuste dubbelpunt naar *D* gegaan is, welk punt daardoor overgaat in een biplanaar punt van de tweede of derde soort, vereenigingspunt van een kegelpunt met een kegelpunt of een biplanaar punt van de eerste soort, naar gelang een der beschrijvende lijnen d_1^2 snijdt of raakt.

29. Uit de behandeling van stand *k* bij het geval D volgt, dat de drie volgende gevallen betrekking hebben op oppervlakken met keerkegelsnede; zoo ziet men, dat hierbij de navolgende vormen ontstaan.

g. Het oppervlak O^4 heeft een keerkegelsnede en een kegelpunt, stemt dus overeen met geval D, stand *m*.

h. Het oppervlak O^4 heeft, behalve de keerkegelsnede, nog een biplanaar punt van de eerste soort.

i. Het oppervlak O^4 heeft een keerkegelsnede, waarop twee samenvallende sluitpunten en een kegelpunt.

Geval F.

30. Dit geval houdt zich, evenals de beide volgende, bezig met de vormen van O^4, die ontstaan door een kegelvlak als beeld-oppervlak te nemen, waarbij hier vooreerst ondersteld wordt, dat het stelsel oppervlakken een vast punt bezit, waardoor alle oppervlakken gebracht worden, terwijl de kegel O_1^2 geen bijzonderen stand inneemt.

Het is, op grond van het voorgaande, in te zien, dat het hierdoor ontstaande oppervlak O^4, behalve *D*, nog een tweede kegelpunt bezitten zal, overeenkomende met den top A_1 van kegel O_1^2.

Dit geval stemt dus geheel en al overeen met geval C. De vier rechte lijnen, uit elk der kegelpunten gaande, worden vertegenwoordigd door de vier kegelstralen, die uit A_1 naar d_1^2 gaan en de vier rechte lijnen, uit D_1 naar de snijpunten van d_1^2 met de kegelsnede $\overline{\delta_1 O_1^2}$ getrokken. Dit geval

geeft weder aanleiding tot de nader te beschouwen bijzondere gevallen.

Geval G.

31. Uit de algemeene eigenschappen van geval C, waar de kegel O_1^2 in R_1 een algemeenen stand innam, leidt men, voor het geval het oppervlakkenstelsel geen bijzonderheden aanbiedt, de volgende bijzondere standen van kegel O_1^2 af.

a. O_1^2 kan met den top A_1 op K_1^2 liggen.

b. O_1^2 kan K_1^2 zoodanig snijden, dat er een dubbelpunt de snijkromme ontstaat, zonder dat A_1 op K_1^2 ligt.

c. O_1^2 kan met den top op K_1^2 liggen, zoodat de kromme in A_1 een keerpunt heeft.

d. O_1^2 kan K_1^2 zoodanig snijden, dat er een keerpunt in de snijkromme ontstaat, zonder dat A_1 op K_1^2 ligt.

e. O_1^2 kan K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde snijden.

f. O_1^2 kan K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met raaklijn door A_1^2 snijden.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee rechte lijnen en een kegelsnede.

h. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkaar raken.

32. Uit deze bijzondere standen zijn de navolgende vormen van het oppervlak O^4 af te leiden.

a. Wanneer O_1^2 met den top A_1 op K_1^2 ligt, dan vereenigen zich de beide gekoppelde kegelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort. O^4 stemt overeen met geval D, stand *f*. De doorsnijding met een vlak α, door D_1 A_1 gebracht, geeft twee kegelsneden k_1^2 en c_1^2; c_1^2 splitst zich evenwel in twee rechte lijnen, die elkander in een punt van k_1^2 snijden. De eenige kegelsnede, die k_1^2 dubbel raakt, door D_1 gaat en c_1^2 osculeert is de dubbel te tellen lijn, $D_1 A_1$. $D A$ is dus in R de raaklijn aan den raakknoop der snijkromme.

Om de raakvlakken te verkrijgen merke men op, dat

deze O^4 moeten snijden in een kegelsnede en twee elkander in A snijdende lijnen. Het zijn dus in R_1 de vlakken, gebracht door $D_1 A_1$ en de raaklijnen aan de snijkromme van O_1^2 en K_1^2; er zijn dus twee raakvlakken.

b Er ontstaan drie kegelpunten; elk der twee gekoppelde kegelpunten is met het derde, dat met het dubbelpunt der kromme overeenkomt, verbonden door een rechte lijn op O^4. Dit stemt overeen met geval D, stand *g*.

c. De beide raakvlakken, door de constructie voor den stand *a* gevonden, vereenigen zich; bij het biplanaar punt van de tweede soort, voegt zich nog een kegelpunt, dat volgens de beschouwing *b* ontstaan is, en het punt A wordt uniplanaar; drie kegelpunten vereenigen zich in dit punt. Er gaan twee rechte lijnen door A, overeenkomende met de keerraaklijn 'en liggende in het vlak, dat uit de vereeniging der beide raakvlakken van den stand *a* bestaat.

d. Er ontstaat een biplanaar punt van de eerste soort en twee gekoppelde kegelpunten; het eerste is een gevolg van het aanwezig zijn van het keerpunt. Het oppervlak stemt overeen met geval E, stand *e*.

e. Er ontstaan een biplanaar punt van de tweede soort en een kegelpunt; de verbindingslijn van beide ligt op O^4; de bijzondere raaklijn aan het biplanaar punt komt overeen met $D_1 A_1$.

f. Het biplanaar punt van het vorige geval vereenigt zich met het kegelpunt; er ontstaat weder een uniplanaar punt; maar nu gaat er slechts één lijn door; men kan dit een uniplanaar punt van de tweede soort noemen.

g. O^4 heeft twee kegelpunten en een biplanaar punt van de tweede soort; het laatste met elk der beide andere door een lijn op O^4 verbonden.

h. Er ontstaan vier kegelpunten als geval D, stand *i*.

i. Evenals bij stand *g* ontstaan er twee gekoppelde kegelpunten en een biplanaar punt van de tweede soort.

Geval H.

33. Ten slotte blijft nog de bespreking der bijzondere

standen van het kegelvlak O_1^2 als het oppervlakkenstelsel een vast punt bezit, dat op alle oppervlakken ligt. De voornaamste zijn:

a. De top A_1 van O_1^2 ligt in het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de kegelsnede d_1^2.

c. O_1^2 raakt d_1^2 in twee punten.

d. O_1^2 raakt δ_1.

e. O_1^2 raakt δ_1 en de raakstraal raakt d_1^2.

f. O_1^2 ligt met den top op δ_1 en een der snijstralen raakt d_1^2.

g. O_1^2 ligt met den top op δ_1; de beide snijstralen raken d_1^2.

34. De vormen, waartoe deze standen aanleiding geven, zijn na het voorgaande gemakkelijk af te leiden.

a. Het kegelpunt A vormt met het kegelpunt D een biplanaar punt van de tweede soort. Het oppervlak stemt overeen met dat van geval D, stand *f* of geval G, stand *a*.

b. Behalve D en A is er nog een kegelpunt, overeenkomende met het raakpunt; dit kegelpunt is met elk der beide eerste door een lijn op O^4 verbonden. Het geval stemt overeen met geval G, stand *b* en geval D, stand *g*.

c. Er zijn vier kegelpunten in het geheel als geval D, stand *i* en geval G, stand *h*.

d. Het biplanaar punt van de tweede soort, dat bij stand *a* ontstond, heeft nu slechts één raakvlak en gaat over in een uniplanaar punt. Met de lijnen, die D_1 vereenigen met de snijpunten van den raakstraal met de kegelsnede, komen twee lijnen op O^4 overeen, zoodat het punt het karakter heeft van geval G, stand *c*.

e. Er ontstaat een uniplanaar punt in D, zooals in geval G, stand *f*, omschreven is; er bestaat eveneens één lijn uit D op O^4 getrokken.

f. Er ontstaat een biplanaar punt in D, bestaande uit twee kegelpunten, even als bij stand *a*; maar buitendien is er nog een kegelpunt.

g. Even als *f*; maar er zijn nog twee kegelpunten. De beide laatste gevallen stemmen overeen met geval G, stand *e* en *g*.

34. Hiermede kunnen de oppervlakken van de eerste groep als afgeloopen beschouwd worden.

De behandeling heeft doen zien, dat meermalen dezelfde vormen op verschillende wijzen kunnen worden afgeleid; maar dat er bij elk geval gedurig enkele nieuwe vormen worden verkregen, die volgens een vorige afleiding niet te verkrijgen waren. Voor een volledig overzicht van alle vormen zal dus de hier gevolgde verdeeling noodzakelijk blijken. Zooals bij enkele hoofdstanden is aangetoond, komen bij de op verschillende wijze ontstaande overeenstemmende vormen ook hetzelfde aantal rechte lijnen en KUMMER'sche kegels te voorschijn. Voor elk geval kan in het bijzonder die vergelijking worden opgemaakt, bij welke afleidingen men dezelfde aantallen terugvindt, die SEGRE in de in het begin aangehaalde verhandeling op een andere wijze verkrijgt.

IV. TWEEDE GROEP.

35. Even als bij de vorige groep zal eerst ondersteld worden, dat de twee elkander snijdende lijnen, waarin de kegelsnede is overgegaan, werkelijk bestaande zijn; naderhand zal dan op de veranderingen gewezen worden, die intreden wanneer deze onbestaanbaar zijn. De verdeeling in verschillende gevallen geschiedt even als in de eerste groep en zooals dit in N⁰. 10 wordt aangegeven. Voorop dienen evenwel gesteld te worden de wijzigingen, die de oppervlakken K^2 en $K_1{}^2$ ondergaán, vergeleken met de algemeene constructie daarvan.

Geval A.

36. Laat de twee elkaar snijdende lijnen, waarin d^2 is overgegaan, a en b zijn, liggende als voren in vlak δ. Daar deze lijnen de poolkegelsnede vormen van een punt D ten opzichte van het kernoppervlak K^2, zoo is K^2 een kegelvlak, dat δ in die lijnen snijdt en de raakkegel uit D is

in de vlakken Da en Db overgegaan. Hiermede komen in R_1 overeen het punt D_1, de kegel K_1^2 en de elkander snijdende lijnen $a_1 b_1$.

De kegelvlakken, tot het stelsel behoorende, zijn overgegaan in kegelvlakken, die het punt $\overline{ab} = P$ tot top hebben en in vlakkenparen door a en b. Is b.v. A een punt in R, dan zal het vlak Aa K^2 in den straal a' snijden; het vlak $a'b$ vormt met Aa het in een vlakkenpaar overgegane kegelvlak. Het tweede vlakkenpaar door A gaande, bestaat uit het vlak Ab, dat K^2 in b' snijdt en het vlak $b'a$. Met deze vlakkenparen komen in R_1 overeen de beide raakvlakken, door A_1 aan K_1^2 getrokken; terwijl met den kegelbundel door A overeenkomt de vlakkenbundel door $A_1 P_1$, zijnde P_1 het snijpunt der lijnen $a_1 b_1$.

Met de lijnen, die in R a of b snijden, komen in R_1 overeen raaklijnen aan K_1^2. Worden zij door een bepaald punt A van a getrokken, dan vindt men de overeenkomende door de lijn $D_1 A_1$ te trekken; alle raaklijnen van K_1^2, die $D_1 A_1$ snijden, komen dan met de lijnen door A overeen. Om de lijnen te construeeren, overeenkomende met den stralenbundel uit een punt A van a in het vlak α door a getrokken, construeere men eerst weder de lijn $D_1 A_1$; vervolgens het raakvlak α_1 aan K_1^2, met α overeenkomende; snijdt nu $D_1 A_1$ α_1 in B_1, dan komen de stralen door B_1 met den stralenbundel door A overeen.

37. Laat nu in R_1 het beeld-oppervlak O_1^2 een algemeen oppervlak zijn; even als bij de voorgaande groep kan men dan in R_1 de vier dubbel projecteerende kegels van K_1^2 en O_1^2 construeeren; maar nu is K_1^2 zelf een dezer kegels. De kegelsneden, liggende op O_1^2, welker vlakken raakvlakken aan een der drie nieuwe dubbel-projecteerende kegels zijn, (N°. 11) bieden nu geen bijzonderheden aan; wel is dit het geval met de kegelsneden, liggende in raakvlakken aan K_1^2 zelf; deze raken K_1^2 in twee punten van een zelfden straal en komen dus overeen met de kegelsneden, volgens welke O^4 gesneden wordt door vlakken gaande door a en b. Hieruit volgt:

Wanneer de dubbelkegelsnede van O^4 in twee elkaar snij-

dende lijnen is overgegaan, dan is een der KUMMER'sche kegels overgegaan in de lijnen a en b.

Er zullen eveneens acht beschrijvende lijnen van O_1^2 zijn, die aan K_1^2 raken; met elk dezer lijnen komt in R een paar gekoppelde lijnen overeen, waarvan er een a en de andere b snijdt, en die elkander in een punt van K^2 snijden. Daar verder twee beschrijvende lijnen van O_1^2, die K_1^2 in dezelfde beschrijvende lijn raken, in een raakvlak aan K_1^2 liggen, zoo zijn er in het geheel vier vlakken door a, welke met vier vlakken door b vier vlakkenparen vormen en waarin de zestien rechte lijnen liggen. Uit deze aanwijzing zal men de ligging der zestien rechte lijnen kunnen bepalen.

Past men de methode van N°. 14 toe tot het bepalen der klempunten op de dubbelkromme, dan ziet men, dat elk der raakvlakken $D_1\,a_1$ en $D_1\,b_1$ den omhullingskegel van D_1 aan O_1^2 in twee stralen snijdt; met deze stralen komen in R overeen de lijnen, naar de klempunten getrokken; men ziet dus, dat er op elk der dubbellijnen a en b twee gelegen zijn. Er kunnen ook een of twee dubbele klempunten ontstaan.

Bij de plooipunten van dit oppervlak valt op te merken, dat er, behalve de plooipunten, liggende op de zestien rechte lijnen en die op de ruimtekrommen van de vierde orde, nog gelegen zullen zijn op de dubbellijnen a en b. De kegelsneden, volgens welke vlakken door a of b O^4 snijden, hebben namelijk twee snijpunten met deze lijnen; er zullen evenwel standen zijn, voor welke de kegelsneden raken. Ten einde deze te bepalen, denke men zich eerst een vlak α_1, rakende aan K_1^2; dit snijdt het vlak $D_1\,a_1$ volgens een lijn l_1 en het beeld-oppervlak O_1^2 in een kegelsnede c_1^2. Uit elk punt van l_1 kunnen twee raaklijnen aan c_1^2 getrokken worden; deze raaklijnen komen overeen met de raaklijnen, uit een punt van a getrokken aan de kegelsnede, volgens welke het overeenkomstige vlak α door a O^4 snijdt. Ware l_1 een raaklijn aan c_1^2, dan zoude er slechts één raaklijn door een punt van l_1 aan c_1^2 mogelijk zijn en dus de overeenkomstige kegelsnede in R a raken. Hieruit volgt:

Ten einde de plooipunten op a te bepalen, construeere men de doorsnede van het vlak $D_1\, a_1$ met $O_1{}^2$, trekke uit den top P_1 van $K_1{}^2$ de beide raaklijnen aan deze doorsnede en legge door de raakpunten raakvlakken aan $K_1{}^2$; deze beide vlakken zijn de vlakken, die overeenkomen met de vlakken, die O^4, volgens een kegelsnede snijden, rakende aan a. Hetzelfde geldt ten opzichte van de dubbellijn b.

38. Even als bij de vorige groep zal ook bij deze oppervlakken $K_1{}^2$ in R_1 de grens aanwijzen tusschen de punten van R_1, welke met werkelijke gekoppelde punten of met onbestaanbare overeenkomen. Men heeft nu de volgende gevallen.

a. a en b zijn werkelijk bestaande; D ligt buiten K^2. Met de punten binnen $K_1{}^2$ komen onbestaanbare, met de punten buiten $K_1{}^2$ komen werkelijk bestaande gekoppelde punten overeen.

b. a en b zijn onbestaanbaar; D ligt binnen K^2. Met de punten binnen $K_1{}^2$ komen de werkelijk bestaande, met die buiten $K_1{}^2$ de onbestaanbare gekoppelde punten overeen.

c. a en b zijn onbestaanbaar; K^2 is eveneens onbestaanbaar. Er ontstaan in R geen onbestaanbare gekoppelde punten.

Geval B.

39. Daar de oppervlakken van het stelsel in R, behalve de beide rechte lijnen a en b, nog een vast punt D met elkander gemeen hebben, zoo wordt het kernoppervlak de kegel, die D tot top heeft en a en b tot richtlijnen, m. a. w. deze kegel gaat over in twee vlakken, die elkander volgens de lijn $D\,P$ snijden.

Even als in het voorgaande geval zijn de kegelvlakken van het stelsel weder in twee afdeelingen te verdeelen. Een afdeeling is het kegelnet, welks gemeenschappelijke stralen $P\,D$, a en b zijn; de tweede bestaat uit de bundels vlakkenparen, bepaald door $D\,a$ met alle vlakken door b en $D\,b$ met alle vlakken door a. In R_1 komen met de kegels overeen alle vlakken door P_1; met de vlakkenparen alle vlakken door a_1 en b_1. De twee elkander snij-

dende lijnen $a_1\, b_1$ vervangen de kegelsnede d_1^2 der vorige groep.

Met alle rechte lijnen in R_1, die $P_1\, D_1$ snijden, komen overeen kegelsneden door D en het vlak δ in P rakende; deze laatsten toch zijn krommen, die de doorsnijding zijn van een vlak door $P\,D$ met een oppervlak van het stelsel. Met een stralenbundel, liggende in een vlak α_1, welks top op een punt van $P_1\, D_1$ ligt, komt overeen een kegelsnedenbundel door D, rakende in P aan δ en op een zelfde oppervlak liggende; ging α_1 nog door $P_1\, D_1$, dan zijn het kegelsneden in een zelfde vlak door $P\,D$. Met alle stralen door een punt van $P_1\, D_1$ komt overeen het kegelsnedennet, gevormd door de snijding van een vlakkenbundel, door $P\,D$ gelegd en een oppervlakkenbundel, door $\overline{\underline{a\,b}}$ en een kegelsnede van het stelsel door D en P gebracht. Diegenen van deze kegelsneden, welke in een zelfde vlak door $P\,D$ liggen, osculeeren elkander in P.

De overige eigenschappen van lijnen, vlakken enz. in R en R_1 zijn weder, even als bij de eerste groep, geval B, zoodanig dat de ruimten R en R_1 tot elkander in een wederkeerig verband staan.

40. Geeft men nu in R_1 aan het beeld-oppervlak O_1^2 een willekeurigen stand, dan zal, even als bij de voorgaande groep, O^4 een dubbelpunt in D verkrijgen; dit punt wordt een kegelpunt, welks raakkegel weder overeenkomt met den kegel, tot top hebbende D_1 en tot richtlijn de doorsnede van O_1^2 met δ_1.

De rechte lijnen op O^4 splitsen zich weder in vier lijnen, gaande door D en overeenkomende met de vier stralen, door D_1 naar de snijpunten van $a_1\, b_1$ met de doorsnede van δ_1 met O_1^2 getrokken. De andere acht worden vertegenwoordigd door de acht beschrijvende lijnen van O_1^2, die a_1 en b_1 snijden.

De constructie der verdere Kummer'sche kegels, waarvan er een vertegenwoordigd is door de lijnen a en b en twee zijn samengevallen in den kegel, uit de raaklijnen door D aan het oppervlak getrokken gevormd, geeft geen aanleiding tot bezwaren.

Geval C.

41. Daar het oppervlakkenstelsel geen bijzonderheden aanbiedt, zijn de oppervlakken K^2 en K_1^2 als in het geval A; het beeld-oppervlak is nu evenwel een kegelvlak O_1^2, dat tot top A_1^2 heeft.

Het oppervlak O^4 bezit nu, even als bij de voorgaande groep, twee gekoppelde kegelpunten; uit elk dezer kegelpunten gaan vier rechte lijnen; vier dezer lijnen snijden a en vier b; zij snijden elkander twee aan twee in K^2. Ook zijn er weder twee kegelsneden, volgens welke O^4 door het daardoor gebrachte vlak geraakt wordt.

Geval D.

42. Hierbij beginnen weder de bijzondere standen van O_1^2, waarbij als voren eerst ondersteld wordt, dat het oppervlakkenstelsel geen vast punt bezit. De voornaamste dezer standen zijn:

a. O_1^2 raakt K_1^2 in A_1.

b. O_1^2 raakt K_1^2 zoodanig, dat er in het raakpunt A_1 een keerpunt in de snijkromme is.

c. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

d. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden, die elkander raken.

e. O_1^2 gaat door den top P_1 van K_1^2.

f. O_1^2 gaat door den top P_1 van K_1^2, zoodat P_1 een keerpunt der snijkromme is.

g. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

h. De koorde van den vorigen stand wordt een raaklijn aan de ruimtekromme.

i. O_1^2 snijdt K_1^2 volgens een kegelsnede en twee elkander snijdende lijnen.

43. Bij nadere beschouwing ziet men, dat de standen *a*, *b*, *c* en *d* aanleiding geven tot een oppervlak O^4 met een kegelpunt A in het eerste geval, dat in het geval *b* het kegelpunt overgaat in een biplanaar punt van de eerste

soort; in het geval *c* ontstaan er twee gekoppelde kegelpunten, die in het geval *d* in een biplanaar punt van de tweede soort overgaan; terwijl het geval *a* met het geval B, het geval *c* met het geval C overeenstemt. De standen *e* en de daaraanvolgende vergen nadere bespreking.

e. Wanneer P_1 op O_1^2 ligt, dan komen met de rechte lijnen door P_1 overeen de paren gekoppelde lijnen door P. Nu snijdt evenwel een lijn l_1 O_1^2 nog slechts, behalve in P_1, in één punt; elk der met l overeenkomende gekoppelde lijnen l en l' snijdt dus O^4 in slechts één punt; het punt P is dus een punt geworden, zoodanig dat een lijn, daardoor getrokken, O^4 in één punt snijdt; P is dus een drievoudig punt. De kegel van de derde orde, die de raakkegel van dit punt moet zijn, heeft zich evenwel gesplitst in twee deelen t. w. in het vlak δ van $a\,b$ en in een kegel van de tweede orde, overeenkomende met het raakvlak in P_1 aan O_1^2 geconstrueerd. Alle rechte lijnen, door P_1 in dit vlak getrokken, zullen eveneens O_1^2 in geen ander punt dan P_1 snijden. Dit drievoudig punt kan, wegens het aanwezig zijn van slechts één raakvlak in dit punt, een planaar drievoudig punt heeten. Uit dit punt gaan vier rechte lijnen op O^4 liggende; zij komen overeen met de twee beschrijvende lijnen van O_1^2 door P_1 getrokken. Daar er verder nog vier beschrijvende lijnen op O_1^2 liggen, die K_1^2 raken, zoo heeft O^4, behalve de vier genoemde. nog acht rechte lijnen, welke geheel op haar liggen. Behalve den bijzonderen Kummer'schen kegel uit den top P en den kegel $a\,b$, construeert men de overige twee Kummer'sche kegels door eerst in R_1 de dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 te construeeren.

f. Wederom vertoont zich in P het drievoudige punt, maar het raakvlak aan O_1^2 in P_1 is nu tevens een raakvlak aan K_1^2; de kegel van de tweede orde, bij den vorigen stand ontstaande, splitst zich dus nu in twee vlakken, een door a en een door b; het drievoudig punt P wordt triplanaar.

g. Nevens het drievoudig punt, dat planaar is, ontstaat nog een kegelpunt met het planaar punt verbonden door een lijn op O^4.

h. Het kegelpunt heeft zich met het planaar drievoudig punt verbonden tot een bijzonder triplanaar punt van de tweede soort. Het raakvlak aan den kegel, overeenkomende met de beide raakvlakken door P, is tevens dat voor O_1^2.

i. Bij het planaar drievoudige punt komen op O^4 nog twee kegelpunten, overeenkomende met de snijpunten der rechte lijnen met de kegelsnede.

De bepaling van het aantal en de ligging der rechte lijnen voor elk dezer gevallen van O^4 kan zonder bezwaar geschieden op de wijze, zooals voor stand *e* is aangeduid.

Geval E.

44. Heeft het oppervlakkenstelsel een vast punt D, waardoor alle oppervlakken gaan, bestaat het alzoo uit alle oppervlakken van de tweede orde, gebracht door D en de elkander snijdende lijnen a en b, dan kan O_1^2 weder verschillende standen in R_1 innemen. De voornaamste hiervan zijn:

a. O_1^2 raakt aan het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt aan een der lijnen a_1 of b_1.

c. O_1^2 raakt a_1 en b_1.

d. O_1^2 raakt het vlak δ_1 in een punt van a_1.

e. O_1^2 gaat door het snijpunt P_1 van a_1 en b_1.

f. O_1^2 gaat door P_1 en raakt het vlak δ_1 in een ander punt.

g. O_1^2 gaat door P_1 en het raakvlak in dit punt bevat a_1 of b_1.

h. O_1^2 gaat door P_1 en raakt in dit punt het vlak δ_1.

45. Uit vergelijking met vroegere gevallen en standen leidt men nu de bijzondere gevallen van O^4 af.

a. Het dubbelpunt D van O^4 wordt een biplanaar punt van de eerste soort; de raakkegel is overgegaan in twee elkaar snijdende vlakken (als D *b*).

b. Nevens het kegelpunt D treedt een tweede kegelpunt op. Zij A_1 het raakpunt van O_1^2 met a_1, dan ligt dit kegelpunt op de lijn DA, welke op het oppervlak O^4 ligt; deze verbinding van kegelpunten moet dus on-

derscheiden worden van de in C besprokene gekoppelde kegelpunten.

c. Drie kegelpunten. Het kegelpunt D is met de beide andere door lijnen op het oppervlak verbonden.

d. De beide kegelpunten vereenigen zich tot een biplanaar punt van de tweede soort.

e. Dit doet weder, even als de drie volgende standen, oppervlakken met een drievoudig punt ontstaan. Het geval *e* geeft een oppervlak O^4 met een planaar drievoudig punt en een kegelpunt, verbonden door een rechte lijn op O^4, even als in het geval D *g*.

f. Nevens het planaar drievoudig punt is er een biplanaar punt van de eerste soort op het oppervlak O^4.

g. Het drievoudig punt wordt triplanaar; het raakvlak door a_1 komt overeen met twee vlakken, een door a en een door b, welke met δ de drie raakvlakken in het drievoudig punt vormen.

h. Dit geval is zeer merkwaardig. Ter beoordeeling van den vorm van het oppervlak O^4, brenge men vlakken door D_1 P_1; deze snijden O_1^2 in kegelsneden, welke door P_1 gaan en δ_1 raken; deze kegelsneden zijn bijzondere gevallen van kegelsneden, die twee punten met a_1 b_1 gemeen hebben; in R komen dus daarmede kegelsneden overeen, die δ in P raken.

Daar nu alle vlakken door P D het oppervlak O^4 in zulke kegelsneden snijden, zoo is P D een dubbele lijn van O^4 en O^4 gaat over in het romeinsche oppervlak van Steiner, bij hetwelk drie dubbellijnen uit een zelfde drievoudig punt gaan.

Geval F.

46. Evenals bij de voorgaande groep, geeft dit geval geen stof tot veel bijzonderheden. Heeft het stelsel oppervlakken een vast punt en neemt O_1^2 geen bijzonderen stand in de ruimte R_1 in, dan bezit O^4, behalve D, nog een tweede kegelpunt A, overeenkomende met den top A_1 van

den kegel O_1^2. Het geval stemt dus geheel en al overeen met het geval C.

Geval G.

47. Bij dit geval en het volgende komen de verschillende bijzondere standen ter sprake, die de kegel O_1^2 in de ruimte R_1 kan innemen. In de eerste plaats wordt weder ondersteld, dat het oppervlakkenstelsel zelf geen vast punt bezit. De voornaamste bijzondere standen zijn dan de volgende:

a. De beide kegels K_1^2 en O_1^2 snijden elkander in een ruimtekromme van de vierde orde met dubbelpunt; de top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2.

b. De beide kegels K_1^2 en O_1^2 snijden elkander weder in een ruimtekromme met dubbelpunt; dit dubbelpunt ontstaat nu doordat K_1^2 en O_1^2 hetzelfde raakvlak hebben.

c. De top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2; maar de gevormde ruimtekromme heeft in A_1 een keerpunt.

d. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in twee kegelsneden.

e. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander in een ruimtekromme met dubbelpunt; de top P_1 van K_1^2 ligt op O_1^2.

f. De top P_1 van K_1^2 ligt weder op O_1^2, maar de ruimtekromme heeft een keerpunt.

g. O_1^2 en K_1^2 snijden elkander volgens een ruimtekromme van de derde orde met koorde.

h. Deze ruimtekromme met koorde gaat over in een kegelsnede met dubbel tellende rechte lijn.

i. De kegel O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$.

k. O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$ en de top A_1 van O_1^2 ligt op K_1^2.

l. O_1^2 raakt aan het vlak $D_1\ a_1$ en snijdt K_1^2 volgens twee kegelsneden.

m. O_1^2 raakt vlak $D_1\ a_1$ en de top P_1 van K_1^2 ligt op O_1^2.

n. O_1^2 raakt vlak $D_1\ a_1$ en vlak $D_1\ b_1$.

48. De gevallen *a* tot *d* geven aanleiding tot verschillende vormen van dubbelpunten. De stand *a* doet de beide

gekoppelde dubbelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort samenvallen, van welk punt de bijzondere raaklijn niet op het oppervlak ligt; dit geval stemt overeen met geval D, stand *d*. In het geval *b* zijn er drie kegelpunten even als geval E, stand *c*. In het geval *c* is er bij het kegelpunt een biplanaar punt van de tweede soort gevormd en wordt er alzoo een uniplanaar punt gevormd.

Bij den stand *d* ontstaan er vier kegelpunten in het geheel.

De standen *e* tot *h* hebben betrekking op het ontstaan van drievoudige punten, even als dat bij de gevallen D en E het geval was. Voor den stand *e* verkrijgt men de verbinding van een drievoudig punt met twee gekoppelde kegelpunten. Het drievoudig punt is planaar; de raakkegel wordt vertegenwoordigd door het raakvlak in P_1 aan O_1^2. Uit dit drievoudige punt gaan twee rechte lijnen, elk naar een der dubbelpunten. Dit geval stemt overeen met geval D, stand *i*. Voor het geval *f* gaat het drievoudige punt in een triplanaar punt over.

Bij den stand *g* ligt de top A_1 van O_1^2 op K_1^2 en de top P_1 van K_1^2 op O_1^2. De beide kegelpunten hebben zich nu vereenigd tot een biplanaar punt van de tweede soort; terwijl het drievoudige punt planaar is gebleven.

Eindelijk hebben bij het geval *h* de beide kegels een zelfde raakvlak langs een gemeenschappelijken straal. Het drievoudige punt is dus triplanaar geworden, terwijl het dubbelpunt een biplanaar punt van de tweede soort is. Hierdoor ontstaat geval *E*, stand *h*.

Geheel anders wordt de gedaante van O^4 bij de nu volgende standen *i* tot *n*. Deze gevallen toonen overeenkomst met die gevallen van de eerste groep, waarbij het beeldoppervlak ingeschreven was in den omhullingskegel van D_1 aan K_1^2. Ontstond in dat geval een keerkegelsnede, zoo moeten nu op dezelfde wijze de dubbellijnen overgaan in keerlijnen.

i. Beschouwen wij eerst den stand van den kegel O_1^2, waarin hij aan het vlak $D_1\ a_1$ raakt, maar de top overigens een willekeurige plaats inneemt. De raakvlakken aan kegel K_1^2 snijden O_1^2 volgens kegelsneden, rakende

aan D_1 a_1. Met elk dezer raakvlakken (n°. 36) komt een vlak door a overeen, 't welk dus O^4 snijdt volgens a en een kegelsnede aan a rakende (n°. 37); a is dus een keerlijn van O^4. Verbindt men A_1 met D_1, dan komen met A_1 twee gekoppelde punten in R overeen; daar A_1 evenwel in $D_1\,a_1$ ligt, is een dezer punten in a gekomen. De vlakken door D_1 A_1 snijden O_1^2 volgens twee rechte lijnen, met welke in R overeen komen twee kegelsneden, die met elkander gemeen hebben een punt van b, het met A_1 overeenkomende en niet in a liggende punt A, en elkander raken in een punt van a. Daar dit voor alle vlakken door D_1 A_1 het geval is, zoo is A een dubbelpunt van het oppervlak O^4, terwijl het daarmede gekoppelde punt in a een sluitpunt van de keerlijn is.

De beide zooeven genoemde kegelsneden zullen elkander in dit punt raken. Het tweede sluitpunt op a is het punt, overeenkomende met het snijpunt van a_1 en den straal van O_1^2, die in D_1 a_1 ligt. Het daardoor gaande raakvlak is het vlak $D\,a$, dat O^4 snijdt, behalve in a, in twee lijnen, waarvan er een samenvalt met a en de andere naar A gaat.

k De methode, bij den vorigen stand gebruikt, kan nu ook worden toegepast; de beide in den vorigen stand gescheiden sluitpunten hebben zich nu vereenigd; terwijl gelijktijdig het kegelpunt van het voorgaande geval op de keerlijn terecht is gekomen.

l. Als K_1^2 door O_1^2 volgens twee kegelsneden gesneden wordt, dan zal er nog een tweede kegelpunt ontstaan, en het oppervlak O^4 heeft dus in het geheel twee kegelpunten, terwijl de sluitpunten als voren bepaald worden.

m. In dit geval verkrijgt men, als bij den stand *f*, een triplanaar punt, maar de lijn a is keerlijn, daar D_1 a_1 het gemeenschappelijke raakvlak der beide kegelvlakken is.

n. Eindelijk zal bij dit geval zoowel de rechte lijn a als de rechte lijn b een keerlijn zijn; het dubbelpunt is op de lijn $D\,P$ komen te liggen. Op elk der keerlijnen is er een sluitpunt en er liggen nog twee rechte lijnen op

het oppervlak, die de sluitpunten verbinden met het kegelpunt D.

Geval H.

49. Zij D wederom het vaste punt, dat alle oppervlakken van het stelsel met elkander gemeen hebben; construeert men dan als voren het vlakkenpaar K^2 en de twee elkaar snijdende lijnen a_1 b_1, dan heeft men voor den kegel O_1^2 met den top A_1 de volgende standen als de voornaamste.

a. De top A_1 van O_1^2 ligt op het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt de lijn a_1.

c. O_1^2 raakt de lijnen a_1 en b_1.

d. O_1^2 raakt het vlak δ_1.

e. Het snijpunt P_1 van a_1 en b_1 ligt op O_1^2.

f. O_1^2 ligt met den top A_1 op δ_1 en een der stralen, volgens welke dit vlak O_1^2 snijdt, gaat door P_1.

g. O_1^2 raakt δ_1 en de raakstraal gaat door P_1.

h. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1.

i. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1 en de lijn b_1.

k. O_1^2 raakt het vlak D_1 a_1 en P_1 ligt op O_1^2.

l. O_1^2 raakt vlak D_1 a_1 en vlak D_1 b_1

50. In overeenstemming met het vroeger gevondene ziet men nu, dat in het geval *a* het punt A met het punt D een biplanaar punt van de tweede soort vormt, evenals geval D, stand *d* en geval G, stand *a*; bij den stand *b* ontstaan er drie kegelpunten, als geval E, stand *c* of geval G, stand *b*; bij stand *c* ontstaan er vier kegelpunten gelijk geval G, stand *d*. Bij stand *d* ontstaat er een uniplanaar punt.

De standen *e*, *f*, *g* geven wederom tot drievoudige punten in P aanleiding. In het geval *e* is er dus, behalve de kegelpunten D en A, een planaar drievoudig punt, zoodat deze stand een vorm van O^4 geeft, overeenstemmende met geval D, stand *i*. De raakkegel komt overeen met het raakvlak van den kegel in P_1.

Bij den stand *f* gaat het raakvlak door een der stralen, volgens welk O_1^2 δ_1 snijdt; het drievoudig punt blijft

dus planaar; maar het kegelpunt D gaat over in een biplanaar punt van de tweede soort, evenals geval G, stand g. Een bijzonder geval, waarin de kegel verkeeren kan is nog. dat hij niet alleen door P_1 gaat, maar ook a_1 raakt; alsdan ontstaan er in het geheel twee kegelpunten en het drievoudig punt wordt triplanaar even als geval G, stand f.

Bij het geval g komt, even als bij geval E, stand h, het oppervlak van Steiner te voorschijn.

Bij de standen h, i, k, l komen, even als bij het voorgaande geval, de vormen van O^4 te voorschijn, waarbij of wel één der dubbellijnen of wel beide keerlijn worden.

Bij den stand h is er een kegelpunt D en een keerlijn a; de lijn b is dubbellijn gebleven. Dit stemt overeen met geval G, stand i.

Bij den stand i komen er in het geheel twee kegelpunten, als geval G, stand l.

Bij den stand k is P een drievoudig punt geworden, 't geen dus overeenstemt met geval G, stand m.

Eindelijk is er, zoo O_1^2 aan D_1 a_1 zoowel als aan D_1 b_1 raakt, een oppervlak met twee keerlijnen ontstaan, 't welk nog buitendien een kegelpunt bezit.

V. Derde Groep.

51. Terwijl bij de geheele voorgaande groep de beide rechte dubbellijnen, waarin de dubbelkegelsnede was overgegaan, òf wel bestaanbaar òf wel onbestaanbaar waren, zoo zijn in dit geval de lijnen a en b samengevallen tot één lijn a, door welke een vlak δ gelegd wordt, dat dezelfde beteekenis heeft als vroeger en dus de meetkundige plaats is van alle rechte lijnen, die een punt van a met een punt van de met haar samenvallende rechte lijn b verbinden. De verdeeling in de gevallen A tot H blijft behouden. Bij het geval A staan weder vooraan de wijzigingen, die er in de beide ruimten plaats hebben in den vorm en stand der hoofdelementen.

Geval A.

52. In het stelsel oppervlakken bestaat de voornaamste wijziging hierin, dat alle oppervlakken kegelvlakken zijn geworden, rakende aan het vlak δ in de lijn a.

Neemt men vier dezer kegelvlakken aan, dan zullen deze elkander twee aan twee snijden in kegelsneden, welker vlakken door een punt D gaan; de vlakken $D\,a$ en $D\,b$ der voorgaande groep zijn nu evenwel samengevallen; a is dus een dubbellijn van K^2 en K^2 moet alzoo overgegaan zijn in twee elkander snijdende vlakken.

Met een willekeurig vlak der ruimte R_1 komt nu een kegel van het stelsel overeen; gaat dit vlak door de in R_1 liggende lijn a_1, dan wordt de kegel in R een vlakkenpaar; men ziet dus, dat er in elk kegelnet, tot het stelsel behoorende, een vlakkenpaar is; in het geheele stelsel dus een bundel van vlakkenparen. De vlakkenparen door a vormen een involutie, projectief met den vlakkenbundel door a_1. De dubbelvlakken dier involutie zijn de vlakken die K^2 vormen; met hen komen twee vlakken in R_1 overeen; zij vervangen het oppervlak K_1^2. Als voren komen weder met de vlakken door D de vlakken door een vast punt D_1 overeen.

Met de rechte lijnen, door a getrokken, komen overeen rechte lijnen, die a_1 snijden; met een rechte lijn evenwel, die a_1 snijdt een tweetal lijnen door een punt van a; met willekeurige rechte lijnen in R_1 kegelsneden van het stelsel, die dus in een punt van a het vlak δ raken. Met willekeurige rechte lijnen in R komen overeen kegelsneden in R_1, gaande door D_1 en rakende aan de beide K_1^2 vervangende vlakken; met kegelsneden in R, die δ in een punt van a raken, kegelsneden, die de twee vlakken raken; snijden de kegelsneden in $R\,a$ in twee punten, dan snijden de overeenkomstige kegelsneden in $R_1\,a_1$. Met een stralenbundel door een punt A_1 op a_1 en liggende in een vlak α_1 door a_1, komen overeen de twee stralenbundels, door een punt A van a gaande en in de met α_1 overeenkomende vlakken α en α^1 liggende.

53. Laat nu in R_1 het beeldoppervlak O_1^2 een algemeen oppervlak van de tweede orde zijn. De groepen kegelsneden, die op O^4 liggen, worden thans in R_1 vertegenwoordigd door de rechte lijnen op O_1^2 en de kegelsneden, volgens welke vlakken door a_1 gebracht O_1^2 snijden; buitendien zijn er nog twee groepen, die men verkrijgt, wanneer men de beide nog overschietende KUMMER'sche kegels construeert. Om deze te verkrijgen, dient men de beide kegels te construeeren, bepaald door de doorsnijding van O_1^2 met de beide vlakken K_1^2.

Met de punten A_1 en B_1, in welke O_1^2 de lijn a_1 snijdt, komen twee punten A en B op a overeen. Trekt men door A_1 en B_1 lijnen, dan komen daarmede in R overeen lijnen; daar evenwel de lijnen in R_1 het oppervlak O_1^2, behalve in A_1, slechts in één punt snijden, zoo snijdt elk der lijnen van de gekoppelde paren in R het oppervlak O^4, behalve in A, in slechts een enkel punt; hieruit volgt, dat zoowel A als B een drievoudig punt is. Wat betreft het soort drievoudige punten, zoo zijn A en B beide planaar; met de raakvlakken in A_1 en B_1 aan O_1^2 komen de raakkegels in A en B overeen.

Door A_1 en B_1 gaan verder in het geheel vier beschrijvende lijnen van O_1^2; hieruit volgt, dat O^4 in het geheel acht rechte lijnen bezit, waarvan er door elk drievoudig punt vier gaan; dit viertal rechte lijnen ligt gedurig op een raakkegel; en elk dezer vier wordt door een der vier uit het andere drievoudig punt gesneden.

De beide drievoudige punten moeten ook beschouwd worden als toppen van KUMMER'sche kegels; in de dubbele knooplijn a zijn deze twee kegels samengevallen, terwijl nog overblijft die kegel, die met den omhullingskegel uit D_1 aan O_1^2 overeenstemt.

Daar de lijn a geheel en al een dubbele knooplijn is, zijn klempunten verdwenen, wel kan men een ander bijzonder punt opsporen.

Legt men namelijk door D_1 vlakken, dan zullen deze a_1 in een punt C_1 en O_1^2 in een kegelsnede c_1^2 snijden. Uit het punt C_1 kunnen in het algemeen twee raaklijnen aan

c_1^2 getrokken worden; met deze raaklijnen komen in R overeen de twee paren gekoppelde lijnen, die de vier raaklijnen van den dubbelknoop C aan de snijkromme c^4 vormen. Laat nu evenwel het snijvlak gelegd worden door de lijn, die uit D_1 getrokken, de snijkromme van het vlak $D_1\ a_1$ met O_1^2 raakt. Noemt men nu C_1 weder het snijpunt dezer lijn met a_1, dan valt een der beide bovengenoemde raaklijnen met $D_1\ C_1$ te zamen, 't geen ten gevolge heeft, dat in R van de vier raaklijnen er twee onveranderd blijven bestaan; van de twee andere valt er een in de raaklijn aan de dubbelknoop, de andere is $D\ a$. De dubbelknoop is dus voor dezen stand in een snavelpunt overgegaan; daar er uit D_1 twee raaklijnen in het vlak $D_1\ a_1$ aan O_1^2 kunnen getrokken worden, bezit de dubbele knooplijn twee snavelpunten. De beide raakvlakken door deze aan den KUMMER'schen kegel, die D tot top heeft gebracht, snijden O^4 volgens kegelsneden, die elkander in het snavelpunt osculeeren.

54. Het onderzoek naar die punten van de ruimte R_1, met welke onbestaanbare gekoppelde punten overeenkomen, kan volgens de vroegere methoden geschieden. Men heeft gezien, dat de vlakkenparen in R een involutie vormen, van welke de vlakken, waarin K^2 is overgegaan, de dubbelvlakken zijn. De vlakken $D\ a$ en δ liggen verder harmonisch ten opzichte dezer dubbelvlakken, die voortaan α en β zullen heeten. De meetkundige plaats van alle punten in R_1, die overeenkomen met de punten van α en β, zijn de twee vlakken α_1 en β_1, die ook ten opzichte van $D_1\ a_1$ en δ_1 harmonisch liggen. Zooals in overeenstemming met het voorgaande blijkt (n°. 38), zijn er twee gevallen mogelijk.

a. α en β zijn bestaanbaar. Die punten van R_1, die in den tweevlakkenhoek liggen, in welken D_1 ligt, benevens in den daar tegenoverstaanden, komen overeen met de bestaanbare gekoppelde punten van R; de andere punten komen overeen met de onbestaanbare gekoppelde punten.

b. α en β zijn onbestaanbaar. Met alle punten van R_1 komen bestaanbare gekoppelde punten van R overeen.

Geval B.

55. Hebben de oppervlakken van het stelsel, behalve de dubbel tellende lijn a, nog een vast punt D met elkander gemeen, dan vereenigen zich de twee vlakken α en β, waarin het kernoppervlak K^2 is overgegaan, tot één vlak α door $D\,a$ en de evengenoemde vlakkeninvolutie wordt parabolisch. De oppervlakken van het stelsel bestaan uit de kegels, welker top op a ligt, die δ volgens a raken en nog door het vaste punt D gaan, en uit de vlakken door a, met het vlak α een oppervlak uitmakende. Met de eerste komen de willekeurige vlakken in R_1 overeen; met de laatste de vlakken door a_1.

Even als voorheen komen met alle rechte lijnen, die a snijden, rechte lijnen, die a_1 snijden overeen en staat de ruimte R weder in hetzelfde verband tot R_1 als omgekeerd R_1 tot R.

Neemt het beeld-oppervlak $O_1{}^2$ nu een willekeurigen stand in de ruimte R_1 in, dan heeft O^4 een kegelpunt D; de raakkegel in dit punt komt overeen met den kegel, die D_1 tot top heeft en tot richtlijn de doorsnede van $O_1{}^2$ met δ_1. De beide drievoudige punten op a worden weder vertegenwoordigd door de snijpunten A_1 en B_1 van a_1 met $O_1{}^2$. Uit elk dezer drievoudige punten gaat een rechte lijn naar D, welke geheel op O^4 ligt; terwijl met de beide andere lijnen, uit A_1 gaande en op $O_1{}^2$ liggende, nog twee lijnen uit A op O^4 liggende overeenkomen. Eveneens is het met B gesteld.

Geval C.

56. Hierbij wordt weder ondersteld, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is, maar het basis-oppervlak een kegeloppervlak $O_1{}^2$ is, dat tot top C_1 heeft. Het oppervlak O^4 bezit twee gekoppelde kegelpunten; uit elk dezer punten gaan twee rechte lijnen, overeenkomende met $C_1\,A_1$ en $C_1\,B_1$. De rechte lijnen verbinden dus de kegelpunten met de drievoudige punten. Bij de beide laatst behandelde gevallen blij-

ven de opmerkingen, die bij het geval A omtrent het bestaan van snavelpunten op a gemaakt zijn, van waarde.

Geval D.

57. Men onderstelle, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is en O_1^2 een algemeen regeloppervlak; de voornaamste der bijzondere standen, die men aan O_1^2 geven kan, zijn de volgende:

a. O_1^2 raakt a_1.
b. O_1^2 raakt α_1.
c. O_1^2 raakt α_1 en β_1.
d. O_1^2 raakt α_1 in een punt van a_1.

De stand *a* geeft aanleiding tot het samenvallen van de twee drievoudige punten A en B; het raakvlak van O_1^2 gaat tevens door a_1. Hieruit volgt, dat het drievoudige punt, ontstaande door de bijeenvoeging der punten A en B, triplanaar is. De drie raakvlakken zijn δ en de beide vlakken met het raakvlak aan O_1^2 overeenkomende. Er zijn slechts vier rechte lijnen op O^4 overgebleven.

In den stand *b* vertoont zich nevens de planare drievoudige punten nog een kegelpunt; dit oppervlak stemt overeen met het geval B.

In den stand *c* komen er twee kegelpunten; zoodat dit oppervlak met het geval C overeenstemt.

Eindelijk heeft in den stand *d* het kegelpunt zich bij de beide samengevallen drievoudige punten gevoegd en een triplanaar punt gevormd, waarvan de drie raakvlakken tot twee zijn samengekomen, namelijk het vlak δ en het vlak α. Dit punt kan dan een triplanaar punt van de tweede soort heeten. Er gaan uit dit punt nog twee rechte lijnen, in het vlak α liggende.

Geval E.

58. Onderstellende, dat het oppervlakkenstelsel een vast punt D bevat, waardoor alle kegelvlakken gaan, kan men

ook nu de voornaamste bijzondere standen van O_1^2 vaststellen; zij zijn:

a. O_1^2 raakt het vlak δ_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt δ_1 in een punt van a_1.

Bij den stand *a* gaat het kegelpunt D over in een biplanaar punt van de eerste soort. Met de twee vlakken, waarin de raakkegel is overgegaan, komen overeen de beide vlakken door D_1 en de beschrijvende lijnen van O_1^2, die in δ_1 liggen.

Bij den stand *b* vallen de beide drievoudige punten samen in een triplanaar punt van de eerste soort, terwijl het kegelpunt behouden blijft.

Bij den stand *c* ontstaat een bijzonder geval van het oppervlak van Steiner; het geval namelijk, dat twee der uit het tripelpunt gaande lijnen samenvallen.

Geval F.

59. In dit geval ontstaat er geen nieuwe vorm. Daar het stelsel oppervlakken door een gemeenschappelijk vast punt gaat, komt met den top C_1 van den kegel O_1^2 slechts één kegelpunt C in R overeen. Het oppervlak O^4 heeft dus twee kegelpunten, D en C, en twee planare drievoudige punten A en B en stemt overeen met het geval C.

Geval G.

60. Laat vooreerst aangenomen worden, dat het oppervlakkenstelsel algemeen is en kegel O_1^2 met den top C_1 een bijzonderen stand inneemt; dan zijn de voornaamste bijzondere standen de volgende:

a. O_1^2 ligt met den top C_1 op een der vlakken α_1 of β_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt het vlak α_1 of β_1.

d. O_1^2 raakt het vlak $D_1\, a_1$.

In het geval *a* vereenigen zich de beide kegelpunten tot een biplanaar punt van de tweede soort, waaruit twee rechte lijnen getrokken kunnen worden, welke dit biplanare punt

verbinden met de beide drievoudige punten, welke planaar gebleven zijn.

In het geval *b* blijven de beide kegelpunten bestaan; maar de twee tripelpunten vereenigen zich tot een triplanaar punt van de eerste soort, welks raakvlakken, behalve uit δ, bestaan uit de twee vlakken, overeenstemmende met het raakvlak door a_1 aan O_1^2.

Het geval *c* geeft aanleiding tot een drievoudig punt, dat triplanaar is, maar waarvan de beide raakvlakken zijn samengevallen; dit geval onderscheidt zich van het geval D, stand *d*, door dat het raakvlak, volgens één enkele lijn, het oppervlak raakt, in plaats van het volgens twee lijnen te snijden; alzoo ontstaat geval *E*, stand *c*.

Eindelijk voldoet in den stand *d* het oppervlak aan de voorwaarde, dat elk punt van de dubbele knooplijn *a* een snavelpunt is. Hieruit volgt, dat de lijn *a* overgaat in een snavellijn. Behalve deze bevat O^4 nog een kegelpunt, dat overeenkomt met den top C_1 van O_1^2. Van dit kegelpunt gaat een rechte lijn naar het triplanare punt, overeenkomende met het raakpunt van O_1^2 met a_1. Van dit triplanare punt valt een der raakvlakken langs δ, het andere is $C\,a$. Het met C gekoppelde punt C' is in a komen te vallen.

Geval H.

61. Neemt men eindelijk aan, dat het stelsel een vast punt D bezit, en beschouwt men de bijzondere standen van kegel O_1^2, dan geraakt men tot de volgende standen:

a. De top C_1 van O_1^2 ligt op δ_1.

b. O_1^2 raakt a_1.

c. O_1^2 raakt δ_1.

d. O_1^2 raakt het vlak $D_1\,a_1$.

Na het voorgaande ziet men, dat het geval *a* aanleiding geeft tot een biplanaar punt van de tweede soort, en dus overeenstemt met geval G, stand *a*; bij den stand *c* keert geval E, stand *c*, weder; bij het geval *b* heeft men, even als bij geval G, stand *b*, twee kegelpunten en een triplanaar punt van de eerste soort; ten slotte komt bij den stand *d*

het oppervlak met een snavellijn en een kegelpunt weder terug.

VI. Algemeene opmerkingen.

62. Niettegenstaande de vele verkregen vormen en de uitgebreide onderverdeeling, waartoe dit onderwerp aanleiding heeft gegeven, is het in te zien, dat het aantal vormen van oppervlakken, dat men door vergelijking der ruimten R en R_1 verkrijgen kan, hiermede niet uitgeput is. Een korte aanwijzing van de aanvullingen, die te maken zijn, moge hier nog hare plaats vinden.

In de eerste plaats worde opgemerkt, dat men aan het beeldoppervlak ook zoodanigen bijzonderen stand kan geven, dat daarmede in R een regeloppervlak van de vierde orde overeenkomt. Een bijzondere stand, behoorende tot de eerste groep, kan hiervoor tot voorbeeld dienen.

Laat d^2 een werkelijke kegelsnede zijn en K^2 en $K_1{}^2$ regeloppervlakken van de tweede orde. Is nu l_1 een beschrijvende lijn van $K_1{}^2$, dan kan het beeldoppervlak $O_1{}^2$ zoodanig gesteld worden, dat het niet alleen een beschrijvende lijn bezit, samenvallende met l_1, maar dat deze beschrijvende lijn in drie punten van l_1 hetzelfde raakvlak voor de beide oppervlakken heeft, zoodat $O_1{}^2$ en $K_1{}^2$ elkander langs de geheele lijn l_1 raken. De beschrijvende lijnen van $O_1{}^2$, die tot het l_1 snijdende stelsel behooren, zijn dan allen raaklijnen aan $K_1{}^2$. Nu komen evenwel met raaklijnen aan $K_1{}^2$ in R overeen rechte lijnenparen, die d^2 snijden; met het oppervlak $O_1{}^2$ moet dus een regeloppervlak O^4 overeen komen, dat de kegelsnede d^2 tot dubbelkromme heeft. Daar met de lijn l_1 een beschrijvende lijn l van het kernoppervlak K^2 overeenkomt, en in de punten van l gedurig twee gekoppelde beschrijvende lijnen van O^4 elkaar ontmoeten, zoo is ook l een dubbellijn van O^4 en het regeloppervlak O^4 behoort tot die soort, die een kegelsnede, met een deze snijdende rechte lijn tot dubbelkromme heeft.

Op dezelfde wijze kan men ook bij de andere groepen typen van regeloppervlakken van de vierde orde terugvinden.

In de tweede plaats kan hier de opmerking herhaald worden, reeds door Reye gemaakt, dat men ook O_1^2 zoodanig stellen kan, dat O^4 in een oppervlak van de derde orde overgaat, tot de vierde orde aangevuld door het vlak δ. Daartoe moet O_1^2 door het punt D_1 gelegd worden (No. 5). Het ligt eveneens buiten het doel dezer verhandeling, hierop verder in te gaan; slechts volge hier de opmerking, dat men in dezen stand van O_1^2 een middel heeft, om de 27 rechte lijnen van het ontstaande oppervlak O^3 op te sporen.

Zooals bij No. 11 gebleken is, zijn er acht lijnen van O_1^2, die K_1^2 raken, waarmede zestien rechte lijnen op O^3 overeen komen. Maar als O_1^2 door D_1 gaat, zullen er ook kegelsneden op gelegen zijn, welke door D_1 gaan en K_1^2 dubbel raken, met welke dus rechte lijnen in R overeenkomen (No. 7 en No. 11). Zij kunnen geconstrueerd worden door weder de vier dubbelprojecteerende kegels van de snijkromme van O_1^2 en K_1^2 te construeeren en hieraan door D_1 raakvlakken te leggen. Er ontstaan alzoo acht raakvlakken en dus acht kegelsneden op O_1^2 gelegen, met welke acht rechte lijnen op O^3 overeenkomen. Buitendien gaan er nog twee rechte lijnen van O_1^2 door D_1, met welke in R overeenkomen twee rechte lijnen door D en de lijn, die hare snijpunten met δ verbindt. In het geheel zijn er dus $16 + 8 + 3 = 27$ rechte lijnen. Ook de ligging dezer lijnen ten opzichte van elkander is duidelijk te zien. De lijnen, met de acht kegelsneden op O_1^2 overeenkomende, snijden d^2 niet en moeten dus een punt gemeen hebben met de rechte lijn in δ gelegen; deze wordt nog buitendien gesneden door de beide lijnen overeenkomende met de lijnen van O_1^2, die door D_1 getrokken zijn; er zijn dus in het geheel tien lijnen, die de gemelde lijn in δ snijden zullen. Elk der acht kegelsneden op O_1^2 wordt door tien beschrijvende lijnen van O_1^2 gesneden, met welke op O^3 rechte lijnen overeenkomen, t. w. door de acht raaklijnen aan K_1^2 en de twee beschrijvende lijnen door D_1.

Zoo ziet men, dat ook de rechte lijnen van O^3, die hiermede overeenkomen, door tien andere rechte lijnen worden gesneden. Op deze wijze voortgaande kan men van elke rechte lijn uitmaken, door welk tiental andere zij gesneden wordt, en de ligging alzoo volkomen nagaan.

Insgelijks kan men door toepassing der gevonden beginselen tot kennis komen van de bestaanbaarheid of onbestaanbaarheid der rechte lijnen op O^3.

Eindelijk worde opgemerkt, dat men ook den stand van O^2 zoodanig regelen kan, dat er een cyclide mede overeen komt. Zooals reeds is opgemerkt, is d^2 alsdan de oneindig ver gelegen onbestaanbare cirkel; K^2 wordt de orthogonaalbol van het stelsel. Stelt men nu in dit stelsel $O_1{}^2$ zoodanig, dat O^4 vier dubbelpunten verkrijgt, daarbij zorgende, dat twee dezer dubbelpunten op d^2 komen te vallen, dan ontstaan de meer bijzondere cycliden, die het eerst een punt van studie o. a. bij Dupin en Maxwell hebben uitgemaakt.

63. Is alzoo aangegeven, welke bijzondere gevallen uit de hier behandelde vormen nog zouden kunnen worden afgeleid, tevens moet worden opgemerkt, dat er nog enkele vormen in de voorafgaande beschouwing gemist worden. Die oppervlakken namelijk, die tot dubbelkromme twee elkaar snijdende lijnen hebben, en waarbij of wel één dezer lijnen, of wel beide keerlijnen zijn, treden alleen op in verbinding met minstens een kegelpunt. Toch laat zich wel nagaan, dat, daar de dubbelkegelsnede keerkegelsnede worden kan, zonder dat een kegelpunt optreedt, dit ook met het oppervlak met twee dubbellijnen het geval moet zijn. De oppervlakken met keerlijnen evenwel ontstaan bij de hier gevolgde methode uit kegelvlakken en zullen dus een kegelpunt moeten bezitten. Bij vergelijking der door Segre behandelde vormen zal men zien, dat dit juist de ontbrekende zijn.

De reden hiervan is gelegen in het feit, dat deze oppervlakken ook kunnen teruggebracht worden tot een andere rubriek, de rubriek namelijk der oppervlakken van de vierde orde met een dubbellijn. Deze vormen evenwel

een geheel bijzondere afdeeling, welker behandeling tot een volgenden arbeid blijft voorbehouden. Ook de regeloppervlakken met twee elkander kruisende dubbellijnen zoude men volgens de behandelde methoden niet kunnen verkrijgen.

Tevens zijn hierbij aangewezen de beide richtingen, waarin zich de studie verder kan voortbewegen; de richting, die uit de algemeene constructiën, in het voorgaande behandeld, bijzondere gevolgen doet afleiden; en de richting waarbij men zich voorstelt dezelfde methode ook op andere oppervlakken en op het vinden van andere algemeene eigenschappen toe te passen.

Tilburg, Juni 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 25 October 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, VAN DIESEN, ZEEMAN, SCHOLS, BAEHR, KAPTEIJN, MOLL, WEBER, SURINGAR, HOEK, BIERENS DE HAAN, GRINWIS, PEKELHARING, MULDER, KOSTER, FRANCHIMONT, FORSTER, VAN RIEMSDIJK, MAC GILLAVRY, KORTEWEG, STOKVIS, ZAAIJER, PLACE, BEHRENS, HOFFMANN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, ENGELMANN, VAN BEMMELEN, MARTIN, MICHAËLIS en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. DE BUSSY, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 13 October 1890; 2°. A. LANCASTER, Bibliothecaris van het Observatoire royal te Brussel, 1890; 3°. den Ministre de l'Instruction publique et des beaux-Arts te Parijs, 3 October 1890; 4°. L. DELISLE, Directeur van de Bibliothèque nationale te Parijs, 16 October 1890; 5°. CH. SCHEFER, Socretaris van de Ecole spéciale des langues orientales vivantes te Parijs, 10 October 1890; 6°. den Secretaris van de Société Académique Indo-Chinoise te Parijs,

11 October 1890; 7°. den Bibliothecaris van het Muséum d'Histoire naturelle te Parijs, 23 October 1890; 8°. T. J. STIELTJES JR., te Toulouse, 5 October 1890; 9°. den Secretaris van de Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres te Toulouse, 12 October 1890; 10°. A. DURIEUX, Secretaris van de Société d'Emulation te Cambrai, 5 October 1890; 11°. den Secretaris van de Académie nationale de Savoie te Chambéry, 9 October 1890; 12°. W. H. WESLEY, Bibliothecaris van de royal astronomical Society te Londen, 30 September 1890; 13°. R. COPELAND, Bibliothecaris van de royal Observatory te Edinburg, 19 Augustus 1890; 14°. J. B. BALFOUR, Secretaris van de royal botanical Society te Edinburg, 9 October 1890; 15°. M. STENTA, Bibliothecaris van de Societá Adriatica di Scienze naturali te Triëst, 5 October 1890; 16°. VON WIESER, Directeur van het Tiroler Ferdinandeum te Innsbrück, 22 Augustus 1890; 17°. MOMMSEN, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, 29 September 1890; 18°. A. GRUBER, Secretaris van de Naturforschende Gesellschaft te Freiburg i/B., 29 September 1890; 19°. W. BLASIUS, Voorzitter van het Verein für Naturwissenschaft te Brunswijk, 30 September 1890; 20°. LAUBMANN, Directeur van de kön. Hof- und Staatsbibliothek te München, 1 October 1890; 21°. C. F. W. PETERS, Directeur van de kön. Universitäts-Sternwarte te Koningsbergen, 7 October 1890; 22°. J. VON SACHS, te Würzburg, 18 October 1890; 23°. A. RILLIET, Secretaris van de Société de Physique et d'Histoire naturelle te Genève, 1890; 24°. E. BETTI, Directeur van de real Scuola normale superiore te Pisa, 29 September 1890; 25°. J. GONZALEZ, Secretaris van de real Academia de la Historia te Madrid, 6 October 1890; 26°. S. MULLER, Secretaris van de Société royale des Antiquaires du Nord te Kopenhagen, 1890; 27°. F. MALMBERG, Directeur van het Nautisk-meteorologiska Byran te Stockholm, 29 September 1890: 28°. R. THALEN, Bibliothecaris van de Société royale des Sciences te Upsala, 4 Juni 1890; 29°. A. PAVLOW, Secretaris van de Société impériale des Naturalistes te Moscou, 22 September 1890; 30°. BONOLA, Secrctaris van de Société Khédiviale de Géo-

graphie te Caïro, 19 September 1890; 31°. W. H. Browne, Bibliothecaris van John Hopkins University te Baltimore, 9 October 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 30 September 1890; 2°. Curtius, Secretaris van de kön. Akademie der Wissenschaften te Berlijn, Juli 1890; 3°. G. Limpricht, Bibliothecaris van de Schlesisshe Gesellschaft für vaterländische Cultur te Breslau, 30 Juli 1890; 4°. den Secretaris van het historischer Verein für Unterfranken und Aschaffenburg te Würzburg, 1 Juni 1890; 5°. H. Hildebrand, Secretaris van de kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien te Stockholm, 24 September 1890; 6°. R. Thalen, Secretaris van de Société royale des Sciences te Upsala, Juni 1890; 7°. Th. Lincoln Caley, Directeur van het Office of Engineers, U. S. Army te Washington, 21 Juni 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren J. A. C. Oudemans, Schoute en A. C. Oudemans jr., dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2° eene missive van den Heer C. J. van Schelle (Zuid-Flores, 14 Augustus 1890), waarin hij zijn dank betuigt voor zijne benoeming tot Correspondent;

3°. een brief van den Heer Schoute, ter begeleiding van eene verhandeling van den Hoogleeraar Dr. F. de Boer: »Toepassing van de methode Darbaux op de differentiaalvergelijking $s = f(r\ t)$", waarvoor eene plaats verzocht wordt in de werken der Akademie. — De Heeren Bierens de Haan en Grinwis verklaren zich, op het verzoek des Voorzitters, bereid, daarover verslag uit te brengen in de November-vergadering.

— De Heeren Behrens en Martin brengen een gunstig

verslag uit over de verhandeling van den Heer Dr. VAN CAPPELLE. Zij stellen voor, haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen, doch den schrijver eerst nog in de gelegenheid te stellen, daarin eenige bekortingen in te voeren.

— De Heeren SURINGAR, MARTIN, WEBER en PEKELHARING brengen advies uit in zake de missive van den Minister van Binnenlendsche Zaken van 20 September 1890, waarin het gevoelen der Akademie gevraagd wordt over een advies van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië, inhoudende een verzoek om subsidie voor wetenschappelijke natuurkundige onderzoekingen in die gewesten. Aan de missive des Ministers waren toegevoegd: een gunstig advies omtrent die aanvrage van den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid, en een brief van den Minister van Koloniën, ter toelichting van de wijze, waarop het natuurwetenschappelijk onderzoek van den Indischen Archipel tegenwoordig plaats heeft.

De Commissie stelt voor, warme adhaesie te betuigen omtrent het verzoek aan den Minister van Binnenlandsche Zaken gericht door het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Zij steunt de argumenten, door den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid voor eene gunstige beschikking aangevoerd, en voegt daaraan eenige ter zake dienende beschouwingen toe; zij betoogt dat eene samenwerking van de beide Departementen van Koloniën en Binnenlandsche Zaken, zooals nu ten aanzien van het ondersteunen van wetenschappelijk onderzoek in Nederlandsch-Indië wordt voorgesteld, zeer gewenscht is; oppert den wensch, dat West-Indië niet in beginsel van het natuurkundig onderzoek worde uitgesloten, doch dat de Minister zijne bescherming aan onze Koloniën in haar geheel moge verleenen, en eindigt met de verklaring, dat de Akademie niet anders dan gevoelig kan zijn voor het bewijs van vertrouwen, haar geschonken in het voorstel, dat de subsidie, die gevraagd wordt, niet zal worden toegekend dan aan personen, die de onderscheiding ten volle

waard zijn en omtrent welke advies is ingewonnen bij de Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

Daar het uitgebrachte rapport geene aanleiding geeft tot discussie, stelt de Voorzitter voor, het bestuur der Letterkundige Afdeeling daarmeê in kennis te stellen, daar in de bijlage, door den Minister van Koloniën ingezonden, eene zinsnede over anthropologisch-ethnographische onderzoekingen voorkomt.

Aldus wordt besloten.

— De Heer VAN DIESEN doet, met herinnering aan zijne mededeeling van 27 Januari 1872, over den toestand van de Maas langs Noordbrabant bij hoogen waterstand, het thans in volle uitvoering zijnde plan zien van verlegging van de uitmonding der Maas van Woudrichem naar den Amer, waardoor die toestand zal worden verbeterd.

Bij het schetsen der hoofdtrekken van dat plan treedt hij tevens in eene vergelijking met het onderwerp van den generaal KRAYENHOFF, die het eerst, in 1822, het denkbeeld opperde van eene scheiding van Waal en Maas, welk denkbeeld thans op meer volledige wijze zal worden verwezenlijkt dan toen werd beoogd.

Een paar opmerkingen van de Heeren PLACE, MICHAËLIS en VAN DE SANDE BAKHUYZEN worden door den spreker beantwoord.

— De Heer MULDER biedt voor de Verslagen en Mededeelingen een opstel aan, getiteld: »Over de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride".

— De Heer FRANCHIMONT biedt voor de boekerij der Akademie aan de dissertatie van den Heer E. A. KLOBBIE, getiteld: *De werking van salpeterigzuur op stikstofhoudende lichamen*, en licht die met eenige woorden toe.

De Heer KLOBBIE beschouwt de werking van salpeterigzuur op waterstofverbindingen in 't algemeen als te beginnen met additie van een waterstofatoom aan de dubbel gebonden

zuurstof van het salpeterigzuur, waarna op de eene of andere wijze vorming van water kan plaats vinden.

Uit een overzicht van hetgeen er bekend is omtrent de werking van salpeterigzuur op stikstofverbindingen, die waterstof aan de stikstof gebonden bevatten, blijkt het, dat die waterstof onder zekere omstandigheden met salpeterigzuur in werking kan treden, dat de grootere of geringere gemakkelijkheid, waarmede zij dit doet, althans voor een gedeelte, afhangt van de atoomgroepen, die tegelijk met haar aan de stikstof gebonden zijn, en eindelijk, dat soms door die atoomgroepen de bedoelde werking zelfs belet kan worden.

Zijn eigen onderzoekingen betreffen de urethanen en hunne derivaten. De urethanen zelve worden door salpeterigzuur ontleed onder ontwikkeling van stikstof en koolzuurgas. Uit de mono-alkylurethanen verkreeg hij nitrosoderivaten; acetylurethaan gaf weer stikstof en koolzuurgas, terwijl carboxymethylurethaan niet werd aangegrepen. Dimethylurethaan en merkwaardigerwijze ook methylacetylurethaan bleven onveranderd.

Op onaangename wijze maakte hij kennis met de werking der nitroso-alkylurethanen op het menschelijk organisme.

Ammoniak werkt op deze nitrosoverbindingen niet dan tenzij er water aanwezig is. Hierbij ontstaat wel urethaan, maar in de plaats van het verwachte nitrosamine of zijne verbinding met ammoniak, treden slechts de ontledingsproducten — stikstof en alcohol — op. Hetzelfde geldt voor de werking van aminen en voor die van alkaliën of basen. Door sterke zuren worden zij ontleed op de wijze zooals bij nitrosaminen plaats heeft. Bij de reductie ontstaan, behalve de hydrazinen, welke niet afgezonderd konden worden, in kleine hoeveelheid, tetrazoverbindingen, welke eveneens uit de hydrazinen door broomwater gevormd konden worden.

Tot de gevolgtrekkingen, die hij uit zijne resultaten maakt, behooren deze: 1° dat aan waterstof, die met stikstof verbonden is, het vermogen om met salpeterigzuur in werking te treden, ontnomen kan worden door de nabijheid van twee sterk negatieve groepen, zooals carboxymethyl; 2° dat de groep NO en een H-atoom niet tegelijk aan een

N-atoom gebonden kunnen zijn, evenmin als dit bij de koolstof het geval schijnt te wezen.

— De Heer VAN RIEMSDIJK biedt, uit naam van Dr. J. LORIÉ voor dezelfde boekerij aan een exemplaar van diens: »Contributions à la géologie des Pays-Bas; IV. Les deux derniers forages d'Amsterdam".

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de vergadering.

RAPPORT

OVER DE VERHANDELING VAN Dr. H. VAN CAPPELLE:

GEOLOGISCHE RESULTATEN VAN EENIGE IN WEST-DRENTHE EN IN HET OOSTELIJK DEEL VAN OVERIJSSEL VERRICHTE GRONDBORINGEN.

EENE BIJDRAGE

TOT DE KENNIS DER ONTWIKKELINGSGESCHIEDENIS VAN HET NEDERLANDSCH DILUVIUM.

(Voorgedragen in de Vergadering van 25 October 1890).



De tweeledige titel is in overeenstemming met de splitsing van den inhoud der verhandeling. Het eerste gedeelte is van tabellarisch-beschrijvenden aard. Het geeft vrij uitvoerig de beschrijving van grondmonsters, verzameld bij gelegenheid van boringen, die de waterverzorging van Meppel en Almelo tot doel hadden. Zeven boringen werden aan den *Bisschopsberg* bij *Meppel* uitgevoerd, negen ten Westen en ten Oosten van Almelo en vijf te Ootmarssum. Ofschoon geene dezer boringen dieper dan 29 meters is doorgedrongen, zijn zij toch voor de geologie van Nederland belangrijk, omdat de boorpunten aan weerszijden en op geringen afstand van de grenslijn tusschen het Skandinaafsch en het gemengd diluvium gelegen zijn.

In de tweede, redeneerende, helft zijner verhandeling heeft de schrijver getracht, van deze ligging der boorpunten partij te trekken om de vraag te beantwoorden, of ook in Nederland, evenals in Noord-Duitschland, twee ijstijden kunnen aangetoond worden, gescheiden door eene interglaciale periode. Hij vond in de boorprofielen de bekende onderaf-

deelingen van het Nederlandsch diluvium terug: het praeglaciale, het gelaagde en niet gelaagde glaciale en het postglaciale diluvium, echter van zeer ongelijke dikte en op zeer verschillende hoogten gelegen. Hij meent de heuvelachtigheid van het diluvium aan opheffingen van daaronder liggende tertiaire gronden te moeten toeschrijven, eerder dan aan dislocatie van rivierbezinkselen uit lateren tijd afkomstig.

Te Ootmarssum vond hij in de onderste lagen veel glaukoniet, hetgeen volgens hem door de Vecht uit de krijtformatie in Westfalen moet aangevoerd zijn. Reeds in de onderste lagen van het glaciale diluvium worden de Westfaalsche gesteenten door meer zuidelijke, Rijnsche, verdrongen, die in de hooger gelegene wederom voor zand en grint van Noordsche gesteenten plaats maken. Deze opvolging van gesteenten werd nu in een der boorgaten te Meppel *tweemaal* aangetroffen, en daartusschen een laagje *veen* met overblijfselen van riet en grassen. De Heer VAN CAPPELLE meent dezelfde tweemalige afwisseling van Skandinaafsche en zuidelijke gesteenten ook in de profielen der diepe boring in de boterfabriek te Sneek te herkennen, en ziet daarin het bewijs eener uitgebreide oscillatie van het ijs, met andere woorden voor de veronderstelling eener interglaciale periode, gedurende welk tijdvak de Rijn en de Vecht de heerschappij boven de gletscherbeken zouden herkregen hebben.

Overigens stelt de Heer VAN CAPPELLE zich voor, dat onder het inkrimpen der ijsmassa's de gletscherbeken de moraines veelvuldig doorgroefd en gesloopt hebben, zoodat slechts stukken van grondmoraines overgebleven zijn, als bijv. de Bisschopsberg bij Meppel en het Mirdumerklif in Friesland. Voorts, dat om dienzelfden tijd de rivieren, tot den voormaligen loop terugkeerende, in de meer zuidelijke streken van Nederland dit werk gingen voortzetten, waarbij een gemengd en tevens gelaagd diluvium gevormd werd, terwijl in het Noorden vorming van gelaagd Skandinaafsch diluvium plaats had.

De Commissie is van oordeel, dat de verhandeling van den Heer VAN CAPPELLE niet zonder belang is als eene bijdrage tot de kennis der geologische gesteldheid van Nederland. Hoewel wat al te uitvoerig, en te veel met hypothesen werkende, waarvan soms de eene op de andere steunt, mag zij toch voor publikatie aanbevolen worden. Met het oog op meerdere overzichtelijkheid zou het overweging verdienen, de lijsten, bij de boorprofielen behoorende, achteraan te plaatsen en voor de beschouwingen eene meer beknopte, ineengedrongen redactie te zoeken.

TH. H. BEHRENS.
K. MARTIN.

RAPPORT

AAN DE

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

(Voorgedragen in de Vergadering van 25 October 1890).

De ondergeteekenden, in dato 30 Sept. ll. uitgenoodigd om rapport uit te brengen aangaande eene in hunne handen gestelde Missieve van Z. Excell. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 20 Sept. 1890 N°. 2074, Afdeeling K. W. met drie hiernevens teruggaande bijlagen, en betreffende natuurkundige onderzoekingen in Ned. Indië, hebben de eer, der Afdeeling het volgende in overweging te geven: allereerst, wat de hoofdzaak betreft, in haar antwoord aan Z. Excell. den Minister van Binnenlandsche Zaken warme adhaesie te betuigen aan het verzoek van het Bestuur der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Ned. Indië, in dato 31 Maart 1890 van uit Batavia tot Z. E. gericht, en uitvoerig toegelicht en ondersteund door den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid, in zijne missieve van 23 Juni 1890 N°. 5921 aan Zijne Excellentie den Gouverneur-Generaal van Nederlandsch-Indië.

Het verzoek heeft de strekking, dat jaarlijks op de Begrooting van Binnenlandsche Zaken eene bepaalde som worde gebracht ter subsidiëering van wetenschappelijke reizen naar Nederlandsch-Indië, onder bepaling dat het subsidie niet zal worden toegekend dan na inwinning van het advies der Koninklijke Academie van Wetenschappen, als waarborg

voor de toekenning daarvan aan personen, die deze onderscheiding ten volle waardig zijn.

Uwe commissie zou een overbodig werk verrichten, wanneer zij in eene herhaling trad van de argumenten, waarmede het subsidiëeren van wetenschappelijke onderzoekingsreizen naar Ned. Indië, ook door Binnenlandsche Zaken, in de aangehaalde brieven op zoo uitstekende wijze wordt aanbevolen.

Het zij haar veroorloofd, alleen de hoofdpunten hier aan te stippen. Zij betreffen:

1º de eer van Nederland, die met het grondig wetenschappelijk onderzoek zijner koloniën door Nederlanders, gemoeid is. Dit argument zou alleen reeds voldoende zijn om elke ondersteuning van staatswege met ingenomenheid te begroeten.

2º wordt een goede invloed verwacht op het universitaire onderwijs, wanneer Hoogleeraren van Nederlandsche Universiteiten in staat gesteld worden, de schatten der tropische natuur door eigen aanschouwing te leeren kennen.

Wij stemmen dit van ganscher harte toe, en meenen bovendien, dat, wanneer eens vaststaat, dat dergelijke onderzoekingen van staatswege worden op prijs gesteld en gesteund, dit een krachtige aansporing zijn zal voor de aankomende natuuronderzoekers van Nederland, om in dezelfde richting werkzaam te zijn, en het voorbeeld van hunne voorgangers te volgen.

3º wordt gewezen op de voordeelen, die de wetenschappelijke kennis der koloniën voor de exploitatie harer natuurschatten moet opleveren, al zijn die voordeelen doorgaans niet van te voren bepaaldelijk aan te wijzen. De Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid wijst hierop, naar aanleiding van aanmerkingen op dit punt, het vorig jaar in de tweede kamer der Staten-generaal te berde gebracht.

Uwe commissie meende, dat thans wel algemeen erkend was, dat de wetenschap steeds vruchten draagt voor de maatschappij, en meer en rijker vruchten, naarmate men haar meer den vrijen loop laat, en niet naar de bepaalde voordeelen vraagt, die van elk onderzoek in het bizonder te wachten zijn.

Voor zoover het echter noodig mocht wezen, hieromtrent nog argumenten aan te voeren, stelt uwe commissie voor, den afdruk van eene redevoering van een harer leden over te leggen, waarin (p. 1—25) dit thema voor de botanie behandeld en met voorbeelden toegelicht is, terwijl uit den aard der zaak ook lichtelijk dergelijke voorbeelden uit andere vakken van natuuronderzoek zouden kunnen worden aangehaald.

4⁰ De aanvraag van een subsidie aan Binnenlandsche Zaken, terwijl reeds een subsidie van wege Koloniën bestaat, heeft aanleiding gegeven, dat in de reeds aangehaalde brieven eensdeels de belangen van Nederland, anderendeels de belangen van de koloniën, bij natuurwetenschappelijk onderzoek van deze, zijn in het licht gesteld. Die scheiding is slechts van administratieven aard, en aan de Kon. Academie van Wetenschappen, als wetenschappelijk lichaam, moet het op zich zelf geheel onverschillig zijn, of de gelden tot ondersteuning van wetenschappelijke onderzoekingen door het Departement van Koloniën, of door dat van Binnenlandsche Zaken, of door beide worden vestrekt, wanneer het gezamenlijk bedrag maar voldoende is om aan billijke verlangens te gemoet te komen.

Toch acht Uwe Commissie het van belang, er op te wijzen, dat die zuiver administratieve scheiding wel eens eene breede opvatting in den weg schijnt te staan.

Allicht wordt gezegd, dat b.v. eene verrijking onzer Musea met voorwerpen uit de koloniën een belang is van het moederland; terwijl toch die verrijking op zich zelve niets beteekent, wanneer zij niet strekt tot bevestiging, verspreiding en vermeerdering van onze kennis betreffende de koloniën. Ook de omvang en de richting van het universitair onderwijs in Nederland is voor onze koloniën geenszins onverschillig. Omgekeerd zijn de belangen der kolonie tevens die van het moederland. Beide, moederland en kolonie, staan niet tegenover, of als vreemden naast elkander, maar zijn nauw aaneengesloten deelen van eenzelfde geheel.

Eene samenwerking van de beide Departementen van

Koloniën en Binnenlandsche Zaken, gelijk nu ten aanzien van het ondersteunen van wetenschappelijk onderzoek in Ned. Indië wordt voorgesteld, komt ons voor, ook ten opzichte van het veldwinnen en bevestigen dier opvatting, niet van gewicht ontbloot te zijn.

5⁰ Waarschijnlijk geheel onwillekeurig, is in het voorstel alleen aan wetenschappelijke reizen naar Nederlandsch-Oost-Indië gedacht, en, voorzoover subsidiën uit de koloniale begrooting worden verleend, is dit zeker ook niet anders mogelijk. Toch heeft West-Indië de hulp van wetenschappelijk onderzoek van uit het moederland ongetwijfeld niet minder noodig, en verdient dit gedeelte onzer koloniën niet minder belangstelling.

Nu er sprake is van een subsidie, van wege het Departement van Binnenlandsche Zaken te verstrekken, stelt Uwe Commissie voor, aan Z. E. den Minister in bedenking te geven, hierbij onze koloniën in haar geheel te gedenken en dus West-Indië niet in beginsel uit te sluiten.

6⁰ Wat eindelijk het voorstel betreft, om, als waarborg voor de toekenning van subsidie aan personen die deze onderscheiding ten volle waardig zijn, tot de toekenning niet te besluiten dan na inwinning van het advies der Kon. Academie v. Wetenschappen, zoo kan de Academie, onzes inziens, niet anders dan gevoelig zijn voor dit bewijs van vertrouwen en stellen wij voor, aan Z. Excell. den Minister te berichten, dat zij tot het geven van zoodanig advies, des verlangd, gaarne bereid zal zijn.

Over de wijze, waarop zoodanig advies alsdan het best zal kunnen worden voorbereid, zal o. i. gevoegelijk kunnen worden beraadslaagd, wanneer het subsidie toegekend zal zijn, en wij hieromtrent nader bericht van Z. Excell. den Minister zullen hebben ontvangen.

Leiden, Amsterdam, Utrecht.
25 October 1890.

W. F. R. SURINGAR.
K. MARTIN.
MAX WEBER.
C. A. PEKELHARING.

VERLEGGING

VAN DE

UITMONDING DER MAAS, VAN WOUDRICHEM NAAR DEN AMER.

DOOR

G. VAN DIESEN.

In de mededeeling, die ik den 27sten Januari 1872 deed over den toestand van de Maas langs Noord-Brabant bij hoogen waterstand (*Versl. en Meded.*, 2de Reeks, Deel VI), vestigde ik de aandacht der Vergadering op de stoornis, die de geregelde loop der rivier ondervond door het werken der drie overlaten: de zoogenaaamde Beerssche Maas, den overlaat van Heerewaarden en den Bokhovenschen overlaat. Ik deed de wenschelijkheid uitkomen van eene sluiting dier drie overlaten en gaf mijne verwachting te kennen, dat de *Maas* door verruiming van haar winterbed en met eenige verzwaring harer dijken zou zijn in te richten tot het doorlaten van al het water, dat bij de hoogste standen, mits van haar alleen, kwam afstroomen.

Meer dan hetgeen ik voor 18 jaar als wenschelijk voorstelde is thans in volle uitvoering; dank hebbe de volharding van den toenmaligen hoofdingenieur, later inspecteur van den waterstaat H. S. J. Rose en van den Minister Jhr. G. J. G. Klerck, beiden overleden spoedig na den aanvang van het werk.

Bij de wet van 26 Januari 1883 werd besloten tot verwezenlijking van het denkbeeld eener volledige scheiding

van Maas en Waal; het eerst ontwikkeld in 1823 door den luitenant-generaal Baron KRAYENHOFF, onder meer lid van de 1ste Klasse van het Kon. Ned. Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten. (*Proeve van een ontwerp tot scheiding der rivieren de Whaal en de Boven Maas*, uitgegeven te Nijmegen bij de Wed. J. C. VIEWEG en ZOON. 1823).

De volledige scheiding der Maas van de Waal is veel meer dienstig voor den afvoer van hoog opperwater en ijs langs beide rivieren dan wanneer men zich bepaalde bij de sluiting der drie overlaten met verruiming van de uiterwaarden en verzwaring der dijken. Te Woudrichem, waar dan al het Maaswater, dat tot 2700 M^3 per secunde stijgen kan, zich op de Merwede zou storten, zou dan eene, voor den afvoer van de Waal nadeelige, verhoogde waterstand veroorzaakt worden.

Thans zal, na voltooiing der scheiding, de Waal aldaar eene verlaging in den waterstand aantreffen, die aan het gemis van afvoer over den overlaat van Heerewaarden ten goede zal komen.

Het steilere verhang zal den stroom op de Waal doen versnellen en dus den afvoer van water en ijs bevorderen.

De Maas zal bij hare nieuwe uitmonding aan het Keizersveer een waterstand aantreffen, die, volgens de gemiddelde jaarlijksche standen van 1871 tot 1880, 2.38 M. lager zal zijn dan te Woudrichem.

Ofschoon het hoofddenkbeeld van den Generaal KRAYENHOFF wordt gevolgd, zal het werk, dat nu in uitvoering is, toch in menig opzicht daarvan afwijken.

1°. De overlaat van Heerewaarden zou volgens zijn ontwerp nog tot ontlasting van de Waal bij hoogen waterstand blijven dienen.

Die overlaat zou daartoe over zekere lengte niet hooger dan tot 4.96 boven A.P., te St. Andries, worden opgehoogd; welke hoogte, volgens waarnemingen van dien tijd, zou overeenkomen met den waterstand op de rivier, waarbij de overlaat van den Ouden Rijnmond, bij Lobith, op het punt stond van te gaan werken.

Het nadeel van zijdelingsche afleidingen is in den loop van deze eeuw in Nederland meer en meer ingezien, en heeft aanleiding gegeven tot de bepaling, die bij amendement in de wet is gebracht, dat met de verlegging van den Maasmond een volkomen afsluiting van den aanvoer van Waalwater ook bij hoogen stand van deze rivier moet gepaard gaan. Naarmate het werk der verlegging vordert, wordt de overlaat van Heerewaarden opgehoogd, om eindelijk tot bandijkshoogte te worden afgesloten.

Met November van dit jaar zal eene hoogte van 7.50 boven A.P. te St. Andries, opklimmende met het verhang der rivier, worden bereikt.

2°. Volgens beide plannen vangt de verlegging aan bij Hedikhuizen. KRAYENHOFF richtte het nieuwe rivierbed vandaar ten zuiden van Heusden, tusschen die stad en het dorp Oud Heusden, door den Elshoutschen dijk naar het kasteel van Ganzoijen, om verder het Oud-Maasje, dat nog den vroegeren loop der rivier aanwijst, tot beneden toe te volgen. Bij het thans in uitvoering zijnde werk zal de Maas niet ten zuiden maar ten noorden langs de wallen van Heusden loopen, en voorts wel het stroomgebied van het Oude Maasje volgen, maar niet al zijn kronkelingen. Met ruime bochten zal de nieuwe rivier genoemd riviertje eerst rechts en vervolgens links laten liggen om er zich eerst bij het Keizersveer in den grooten weg tusschen Breda en Gorinchem mede te vereenigen. De vereeniging moet in dezen zin worden opgevat dat, gerekend van het Keizersveer, de weg van het Oude Maasje wordt gevolgd; want in het plan ligt: het Oude Maasje boven dat veer af te dammen en door een schutsluis voor de scheepvaart toegankelijk te maken.

Beneden het Keizersveer wordt de oude weg verruimd en verbreed, en ook de Amer tot bij Lage Zwaluwe door verdieping en normaliseering, met de noodige afdamming van de ten noorden gelegen killen van het Bergsche veld, tot bed voor de nieuwe rivier gereed gemaakt.

3°. Het gedeelte van de Maas van Hedikhuizen tot Woudrichem, dat door de verlegging moest onttrokken worden aan de doorstrooming van Maaswater, en waarin ook geen

toestrooming van Waalwater door den mond bij Woudrichem meer kon worden toegelaten, wilde men eene volledige scheiding van Waal en Maas tot stand brengen, moest worden afgedamd.

Krayenhoff wilde dat doen door twee dammen: een aan het boven- en een aan het benedeneind, voorzien van schutsluizen, en dus het riviervak in een kanaal herscheppen, lang, volgens zijn opgaaf, 18.84 kilom., dat uit de Waal gevoed zou moeten worden.

Volgens het tegenwoordige plan blijft het riviervak nabij het boveneind open, wordt het nabij den benedenmond afgedamd en wordt daar eene schutsluis gebouwd. Het afsluiten aan beide einden zou het voordeel opleveren van een standvastigen waterstand en van afwending van hoogen waterstand, zij deze ook lager dan tot nu toe, van de dijken, die daardoor nog minder aan onderhoud en aan verdediging zouden kosten, dan volgens het tegenwoordig plan reeds het geval zal zijn. Tegenover deze voordeelen levert het gekozen plan dat van minder tijdverlies van doorschutten; hetgeen vooral voor de stoomvaart een belang is, waarmede in den tijd van Krayenhoff's ontwerp geen rekening behoefde te worden gehouden. Het nadeel van den op- en neergang van het water, en van stroom verbonden aan het plan, dat nu in uitvoering is, wordt opgewogen door de aanslibbing van de uiterwaarden bij hooge waterstanden, waarop door de eigenaren hooge prijs wordt gesteld, en door krachtige waterloozing door de sluizen van de Bommelerwaarden, tijdens lage ebben.

4°. Van groot belang was de bepaling der breedte, die aan het zomerbed en aan het winterbed van de rivier moest worden gegeven.

Aan het zomerbed moest volgens het ontwerp van Krayenhoff eene breedte worden gegeven van 145 M. aan het boveneind der nieuwe rivier, bij het Heleind, en eene van 165 M. bij het Keizersveer, zijnde eene verwijding van 20 M. over eene lengte, bedragende volgens zijn opgaaf 21510 M.

Van normaliseering van den Amer is in het ontwerp van Krayenhoff geen sprake, evenmin als van eene breedte, die voor den afvoer van hoog opperwater noodig kon zijn: voor het zoogenaamd winterbed. Beneden de Waspiksche

vaart zou, volgens hem, de bestaande bedijking met eene verhooging en verbetering misschien kunnen behouden blijven. Hiermede zal hij waarschijnlijk bedoeld hebben de zomerdijken, die aan genoemd vak langs het Oude Maasje, volgens de kaart bij zijn werk gevoegd, op 200 tot 300 M. onderlingen afstand, het water uit den buitenpolder keerden.

Zoo ver eene rivier buiten den invloed is van de getijden in zee, is het niet moeielijk de afmetingen te berekenen, die zij voor haar bed behoeft, om bij lagen stand een geschikte vaargeul voor de scheepvaart op te leveren en bij hoogen stand al het water door te laten, dat haar uit haar stroomgebied wordt toegevoerd, zoo men slechts de hoeveelheid kent, die bij de hooge en bij de lage standen moet worden doorgelaten. Krayenhoff deelt slechts de uitkomst mede van waarnemingen, die hij ten aanzien van geringen afvoer gedaan heeft, en geeft dus alleen de breedte op, die hij voor het zomerbed noodig acht.

Zooals boven werd medegedeeld, vermeerdert die breedte bij het ontwerp van Krayenhoff met ongeveer 1 meter voor iederen kilometer.

Vermeerdering van breedte heeft op een rivier, die geen toevoer verkrijgt door zijrivieren en geen bijzondere vermindering van verhang ondervindt, geen reden van bestaan. Bij geringen afvoer blijft het water tusschen de evenwijdige wanden van het zomerbed met dezelfde snelheid afstroomen; het hooge opperwater stroomt over de oevers en kan eveneens besloten blijven tusschen hooge terreinen of dijken, die, onder de bovengenoemde omstandigheden, benedenwaarts geen vermeerdering van breedte voor afstrooming behoeven aan te bieden. De aangenomen normale breedte van den Rijn neemt van Coblentz tot aan onze grens, d. i. over 271 kilom. toe van 320 tot 360 M. en dus met nog geen 0.15 M. per kilom.

Bij het afdalen van den stroom in het gebied van de zee, wordt het verhang al flauwer en flauwer, om geleidelijk in den horizontalen waterspiegel uit te loopen. Blijft men dan de rivier tusschen weinig of niet verwijdende oeverlijnen afvoeren, dan moet het gemis aan snelheid worden vergoed

door grooter profiel, dat eensdeels door verheffing van den waterspiegel en anderdeels in verband met dit laatste, door verhooging van oevers of bedijking moet gevonden worden.

KRAYENHOFF ging bij zijn ontwerp van dit stelsel uit; blijkbaar met het oog op het belang van de scheepvaart, die op de Maas bovenwaarts belemmering zou ondervinden van de verlaging van den waterstand, zoo lang de bodem niet was uitgeschuurd door de werking van het steiler geworden verhang. Hij bracht dus geene verwijding van eenige beteekenis in het bed voor de nieuwe rivier.

Bij de uitwerking van het tegenwoordige plan werd die moeielijkheid wel gevoeld, maar deed zich eene andere voor van tegenovergestelden aard, namelijk de vrees door landeigenaars geuit, dat de uitwatering op de nieuwe rivier een hoogeren waterstand zou aantreffen dan tot nog toe op het Oude Maasje en den Amer werd gevonden. Om aan die vrees te gemoet te komen, moesten de oevers zeewaarts zich van elkander verwijderen, ten einde den waterstand in de rivier te verlagen, zonder daartoe uitschuring af te wachten.

Ter bevrediging van de beide tegenstrijdige belangen heeft men bij het boveneind van de nieuwe rivier, waarop meest voor de scheepvaart moest worden gezorgd, op het zomerbed de minste verwijding toegepast en deze benedenwaarts geleidelijk toenemende ontworpen.

Over de bovenste 11000 M. lengte wordt overgegaan van de breedte van 160 M. in die van 200 M. (bij Drongelen); over de volgende 10,800 M. van 200 M. in 250 M. (bij Keizersveer) en over de laatste 3200 M. van 250 in 300 M.

Met de 85 M. grootere wijdte dan KRAYENHOFF bij het Keizersveer wilde geven aan den nieuwen mond, wordt een voor de uitwatering niet nadeelige waterstand verwacht.

De afstand, waarop de dijken worden aangelegd, die het winterbed zullen begrenzen, zal eveneens grooter zijn dan die welke KRAYENHOFF vermoedelijk dacht aan te nemen, bij het gemis aan gegevens omtrent den grootsten afvoer van de Maas.

Aannemende een afvoer van 2700 M_3. per secunde als

den grootsten, die verwacht kan worden, is voor den onderlingen afstand der dijken, dus voor de breedte van het winterbed, 500 M. bepaald.

De afvoer van 2700 M^3. is door den hoofdingenieur SCHNEBBELIE, die aan het hoofd staat der uitvoering van het werk, op grond van snelheidsmetingen, berekend voor den hoogsten waterstand, die te Maastricht in deze eeuw in December 1880, werd waargenomen. Die waterstand bedroeg den 22 December aan de brug te Maastricht 47.07 M. + A.P. en dus 0.42 M. meer dan die van 2 Februari 1862, waarvan ik, volgens mijne in den aanvang genoemde mededeeling, eene hoeveelheid van 2532 M^3. heb berekend.

Beneden Keizersveer houdt de aan te leggen bedijking op, en loopen winter- en zomerbed ineen, door versmalling van het eerste en verbreeding van het laatste. Het gemeenschappelijk bed loopt door den Amer, die daartoe zooveel noodig verbreed, versmald en verdiept is, langzaam verwijdende van 300 M. tot 495 M. bij Ruigteplaat tegenover Lage Zwaluwe, op 35 kilometer van den aanvang van het werk.

Omtrent de helling, die aan den bodem der nieuwe rivier zal worden gegeven, bestaat volkomen overeenstemming met KRAYENHOFF, voor zoo ver zijn ontwerp zich uitstrekt.

Tusschen Bokhoven, waar hij een middelbaren rivierstand van 2.645 M. boven en Keizersveer, waar hij een gewonen ebstand van 0.896 M. beneden A.P, aannam, wilde hij den bodem evenveel t. w. 3. 541 M. doen hellen, zijnde over 25 kilom. 0.14 M. per K.M.

Bij het onderhanden werk wordt de bodem bij het beginpunt op 1 M., op 25 kilom. benedenwaarts op 4.50 M. beneden A.P , dus eveneens onder een helling van 0 14 M. per kilom. aangelegd, en 10 kilom. benedenwaarts, aan het uiteinde, op 7.50 beneden A.P. gerekend ; zoodat voor het beneden gedeelte eene helling van 0.30 per kilom. is ondersteld.

Voor de hand ligt de vraag naar het bedrag van de verlaging van den waterspiegel : het hoofddoel van het werk voor tijden van gevaar.

Hierbij komt vergelijking met de door KRAYENHOFF opgegeven cijfers niet te pas; om twee redenen. KRAYENHOFF heeft zich niet begeven in beschouwingen van den invloed bij zeer hooge waterstanden. Hij kende blijkbaar den afvoer niet waartoe, na hem, de Maas gebleken is in staat te zijn. In de tweede plaats is een gedeelte van het door hem ontworpen werk, namelijk de sluiting van het kanaal van St. Andries, reeds in 1856 uitgevoerd, krachtens de wet van 9 September 1853 (Staatsblad. N⁰. 99), en daarmede een belangrijke toevoer van Waalwater naar de Maas afgesneden, en die toevoer beperkt tot standen op de Waal, hooger dan 7.00 M. + A.P., waarbij de kaden van Heerewaarden overliepen.

De vraag naar den invloed der verlegging wordt uitvoerig beantwoord in eene nota, die het wetsontwerp vergezelde, dat in de tweede zitting der Tweede Kamer van 1884 op 1885 is aangeboden, voor de verklaring dat het algemeen nut de onteigening vorderde, noodig voor de uitvoering van het werk, (Wet van 11 December 1885, Staatsblad N⁰ 234).

Volgens die nota mag in de ongunstige onderstelling, dat een waterstand op de Waal, zoo als de hoogst bekende van 5 Januari 1883, samenvalt met een afvoer van de Maas ten bedrage van 2700 M³, door het keeren van het Waalwater, eene verlaging van 1.14 M. worden verwacht te Hedikhuizen; welke verlaging rivieropwaarts natuurlijk vermindert. Bij minder aanzienlijken afvoer van de Maas, waarbij de invloed van den toevoer uit de Waal grooter moest zijn, wordt ook voor de verlaging een grooter cijfer zelfs tot 1.78 M. verkregen, doch waren ook de waterhoogte en het gevaar minder.

De verlaging bij den genoemden afvoer bedraagt te Oyen slechts 0.10 M., volgens de berekening, en van een werkeloos worden van de Beerssche Maas boven Grave is dus geen sprake.

Daartoe zal eene geleidelijke beteugeling moeten medewerken.

Bij den Bokhovenschen overlaat mag men van de verlaging een belangrijk mindere werking, in de meeste gevallen staking, verwachten.

De wijze van berekening en vele andere zaken, die wor-

den behandeld in de uitvoerige memoriën van toelichting bij de ontwerpen van de genoemde wetten, zullen onderwerpen van wetenschappelijke behandeling kunnen uitmaken.

Het doel van deze mededeeling is: slechts in hoofdtrekken het belangrijke werk te schetsen, aan welks uitvoering, met inbegrip van bijkomende werken, tot bevrediging van velerlei belangen, die er door geraakt werden, een som van ruim vijftien millioen gulden wordt te kost gelegd.

Het werk is voor de helft gereed en ondervond tot nog toe geen tegenspoed van beteekenis, zoodat men zich mag vleien in 1894 de rivier door den nieuwen mond te zullen zien uitstroomen.

'*s Hage*, Oct. 1890.

WATERSTANDEN BETREKKELIJK A.P.

1887.

	MOERDIJK.		KEIZERSVEER.		GORINCHEM.		WOUDRICHEM.		HEDIKHUIZEN.		HEDEL.	St. ANDRIES.
	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.	HW.	LW.		
Gemidd. 6 zomermaanden	1.43	—0.58	1 27	—0.50	1.65	0.92	1.74	1.12	1.97	1.72	1.98	2.52
〃 6 wintermaanden	1.31	—0.78	1.15	—0.57	1.73	1.12	1.83	1.34	2.56	2.49	2.80	3.66
〃 het jaar	1.37	—0.68	1.21	—0.54	1.69	1.02	1.78	1.23	2.26	2.11	2.39	3.09
Hoogste	2.94 30 Oct.	0.66 25 Oct.	2.30 30 Oct.	0.71 25 Oct.	3.50 1 April	3.37 1 April	3.75 1 April	3.66 1 April	4.50 24 Dec.	4.50 24 Dec.	4.98	6.19
Laagste	0.57 18 Jan.	—1.45 18 Jan.	0.20 18 Jan.	—1.01 20 Maart 2 Mei	0.99 17 Maart	0 20 2 Nov.	1.05 26 Oct.	0.40 3 Nov.	1.33 9 Sept.	1 02 16 Aug.	1.22	1.58

1871—1880.

	MOERDIJK HW.	MOERDIJK LW.	KEIZERSVEER HW.	KEIZERSVEER LW.	GORINCHEM HW.	GORINCHEM LW.	WOUDRICHEM HW.	WOUDRICHEM LW.	HEDIKHUIZEN HW.	HEDIKHUIZEN LW.	Crévecoeur.	St. ANDRIES.
Gemd. 6 zomermaanden	1.38	—0.65	1.32	—0.50	1.85	1.45	1.98	1.70	2.26	2.13	2.34	2.89
〃 6 wintermaanden	1.38	—0.74	1.30	—0.33	2.26	1.97	2.45	2.24	3.30	2.25	3.61	4.54
Jaar	1.38	—0.70	1.31	—0.41	2.06	1.71	2.22	1.97	2.78	2.69	2.98	3.71
Hoogste	2.97	1.54	2.63	1.97	4.73	4.69	5.09	5.07	6.26	6.24	6.46	8.40
Laagste	—0.04	—1.84	—0.05	—1.13	0.55	0.18	0.71	0.42	0.97	0.93	1.15	1.73

OVER DE OMZETTING VAN DINATRIUM-WIJNSTEENZUUR AETHYL

ONDER DEN

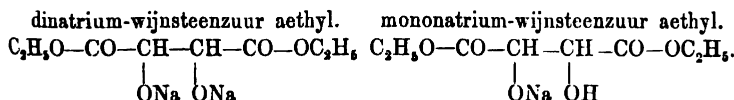
INVLOED VAN AETHYLCHLORIDE.

DOOR

E. MULDER.



Men wenschte te weten, waardoor het komt, dat mono- en di-natrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride niet schijnen te vormen mono- en di-aethyl-wijnsteenzuur aethyl, een reactie, die niets bevreemdends zou hebben. Vooral is dit het geval met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, want dit is symmetrisch samengesteld, hetgeen de moleculen in 't algemeen standvastiger maakt (noodwendig in het voordeel dezer reactie), niet het geval met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl:



Ook bevat mononatrium-wijnsteenzuur aethyl eenmaal den rest OH, en van daar een betrekkelijk mindere mate van standvastigheid (reeds vroeger waargenomen *)), dat trouwens met genoegzame waarschijnlijkheid volgt uit de hoeveelheid afgeleiden van wijnsteenzuur (en eenigen zijner zouten), ont-

*) Zie *Rec. d. Trav. Ch.* T. 8, 361.

staan als gevolg van oxydatie en herleiding door middel der resten hydroxyl van dit zuur (evenwel bij verhoogde temperatuur). Om die reden werd uitgegaan van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (ook met 't oog op een synthese van erythriet), en wel van dit tartraat zooveel mogelijk *bevrijd van alcohol*, om de grootste standvastigheid te geven aan het molecuul, met het doel gemelde reactie te bevorderen, te weten de vorming van diaethyl-wijnsteenzuur aethyl. Zelfs bij verwarming schijnt deze reactie niet plaats te hebben (zie later); men ziet geen chloornatrium gevormd worden, daarentegen wordt de massa meer en meer gekleurd. Dit is vooral het geval (ook met mononatrium-wijnsteenzuur aethyl) bij aanwezigheid van alcohol, waarbij de oplossing aanvangt met geel te worden gekleurd, dan geelrood, roodbruin en vervolgens bruin (zoo mede zonder alcohol). Mono- en dipotassium-wijnsteenzuur aethyl doen nog gemakkelijker gekleurde produkten ontstaan bij verwarmen met aethylchloride, vooral bij aanwezigheid van alcohol, en zelfs dan bij gewone temperatuur, tevens het geval met mono- en dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, alhoewel in mindere mate (altijd werkende in buizen, daarna toegesmolten). Ook bij bewaren van deze verbindingen bij gewone temperatuur in bijzijn van alcohol zonder bijvoeging van aethylchloride, worden ten slotte gekleurde stoffen gemaakt, wederom vooral het geval met die van kalium. Met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, in tegenwoordigheid van alcohol (zonder en met aethylchloride), ontstaat somwijlen een massa met *helder gele kleur*, ook wel geleiachtig, nog meer het geval uitgaande van een hoeveelheid natriumaethylaat en ester van 3 Na op 1 mol. wijnsteenzuur aethyl. Alcohol, dit blijkt genoegzaam uit het medegedeelde, moet zooveel mogelijk worden verwijderd.

In het volgende zullen de proeven worden gegeven in de volgorde waarin zij werden genomen, te beginnen met de vermelding van eenige eigenschappen van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, nagegaan met het doel, om dat lichaam nog meer te leeren kennen in zijne standvastigheid, daar het in de volgende onderzoekingen de eerste plaats inneemt.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bij verhoogde temperatuur. Men had bij de bereiding reeds dit tartraat verhit bij ongeveer 62°, ten einde genoegzaam zeker te zijn, dat het zou bevrijd zijn van alcohol, en dit product geeft met zuiveren alcohol een geleiachtige massa, is oplosbaar in aethylchloride, en gedraagt zich in één woord als dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat niet is verhit en ontdaan is van alcohol. Toch volgen hier nog twee proeven onder deze omstandigheden genomen, en anderen gedaan bij een nog hoogere temperatuur. Het doel dezer bepalingen was tevens, om na te gaan, of aldus ook een geschikte methode te vinden zou zijn ier omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in een chinon. De onderzoekingen in die richting gedaan, leidden tot deze uitkomsten.

Hoeveelheid natrium genomen voor het maken van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl:	Hoeveelheid wijnsteenzuur aethyl:	Zuivere alcohol:	Temperatuur en tijd:	Gewicht van het eindproduct, enz.:
I. 0,29 gr.	1,314 gr.	6 gr.	61°—62° gedurende 3 uur	1,5745 gr.; tint zeer licht geel.
II. 0,29 »	1,3175 »	6 »	60° gedurende 3 uur	1,512 gr.; zeer weinig gekleurd.
III. 0,29 »	1,3175 »	6 »	100° gedurende 3 uur	1,3965 gr.; helder geel gekleurd.
IV. 0,29 »	1,317 »	6 »	121° gedurende 3 uur	1,295 gr.; kleur geelbruin.
hetzelfde product			142° gedurende 3 uur	1,156 gr.; kleur bruin; ontwikkeling van gas.
»	»		160° gedurende 3 uur	1,121 gr.; kleur bruin.

Ter vorming van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl wordt voor 0,29 gr. natrium theoretisch een hoeveelheid wijnsteenzuur aethyl vereischt van 1,315 gr., terwijl aan eindproduct moet ontstaan 1,575 gr.

Het product na verhitten bij ongeveer 160^0 kon vooral van eenig belang wezen, in zooverre namelijk, als er een betrekkelijk groote hoeveelheid van een chinon zou kunnen gevormd zijn. De massa bleek zeer oplosbaar te zijn in water en wel met roodbruine kleur (en alkalische reactie), en nam een gele kleur aan bij toevoegen van zoutzuur. De waterige oplossing geeft met ferridchloride een kersroode verkleuring, tevens het geval, indien de oplossing zwak zuur is gemaakt met zoutzuur.

De waterige oplossing wordt neêrgeslagen met alcohol, terwijl een vloeibaar afzetsel met roodbruine kleur ontstaat; wordt fractionnair neêrgeslagen, dan zet zich ten slotte een kleine hoeveelheid af van een vaste kleurlooze verbinding. Het gekleurde neêrslag geeft, na weder oplossen in water en opnieuw neêrslaan met alcohol, een vloeibaar afzetsel met een eenigzins oranje kleur. Dit laatste neêrslag bezit in waterige oplossing een alkalische reactie, en neemt met zoutzuur een gele kleur aan onder vrijkomen van eenig gas. De watervrije oplossing laat, na plaatsen onder een exsiccator, een geleiachtige gekleurde massa terug, die na oplossen in water nog dezelfde reactie vertoont met ferridchloride.

Het product verkregen na verhitten bij 100^0 is veel minder oplosbaar in aethylchloride dan het geval is met dinatrium-wijnsteenzuur aethyl verhit bij ongeveer 60^0. De massa bezit een *helder gele* kleur. Zij lost gemakkelijk op in water; alcohol slaat er uit neder een vloeibaar lichaam, dat weldra krystalliseert (wijnsteenzuur dinatrium verhoudt zich op overeenkomstige wijze). Uitgaande van 0,29 gr. natrium, werd 0,911 gr. van deze krystallijne stof erlangd, die bij nader onderzoek bleek te zijn wijnsteenzuur dinatrium (zoo met betrekking tot de reactie met calciumchloride). Het filtraat geeft met ferridchloride de kersroode verkleuring, het vormt geen noemenswaardig afzetsel meer met alcohol, na alvorens eenigen tijd onder een exsiccator te hebben gestaan.

Men zou op 't oogenblik niet kunnen zeggen, welke de reden mag zijn, dat gezegd product zoo weing oplosbaar is in aethylchloride, terwijl het toch voor verreweg het grootste gedeelte moet wezen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, waarvan het wijnsteenzuur dinatrium een afgeleide is. Zelfs gedurende eenige weken in aanraking met aethylchloride (als altijd in een toegesmolten buis), en nu en dan geschud, werd betrekkelijk weinig van dit lichaam opgelost.

Wordt dinatrium-wijnsteenzuur aethyl geruimen tijd verhit bij ongeveer 60°, b. v. 8 uur, dan bezit het product een licht gele kleur, en geeft in waterige oplossing met ferridchloride zeer duidelijk de meer genoemde reactie, zonder nochtans noemenswaardig in gewicht te hebben verloren, integendeel soms een weinig te veel in gewicht bedragende van hetgeen door de theorie wordt geeischt (uitgaande b.v. van 0,29 gr. natrium).

Aangezien het ontstaan van een chinon zou kunnen bevorderd worden door aanwezigheid van natriumaethylaat, werd uitgegaan van de helft van wijnsteenzuur aethyl op dezelfde hoeveelheid natrium (en zuiveren alcohol), bijgevolg was de verhouding die uitgedrukt door 4 Na op 1 mol. wijnsteenzuur aethyl. De bewerkingen waren overigens dezelfden als bij de bereiding van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (dus werd ook gedurende 3 uur verhit bij ongeveer 62° in het waterstofledig). Er ontstond een *helder geel* gekleurde massa; daarna verhit bij 100° (gedurende 3 uur) nam de gele kleur in sterkte toe. Het lichaam is gemakkelijk oplosbaar in 5 c.c. water (uitgaande van 0,29 gr. natrium); alcohol doet hieruit een vloeibaar afzetsel ontstaan dat niet kristalliseert. Afgezonderd en opnieuw opgelost in water, geeft alcohol nogmaals een vloeibaar afzetsel, dat evenmin aanschiet in krystallen. Zoowel dit vloeibare product (in watervrije oplossing) als de moederloog, doen met ferridchloride de kersroode verkleuring ontstaan.

Maar veeleer dan dezen weg en dergelijke wegen in te slaan, had men meer vertrouwen in het *aethylchloride*, en wel vooral wat aangaat de vorming van een chinon, als gevolg eener *primaire* en nagenoeg overeenstemmende *secundaire*

reactie (van het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl), en daarmede een chinon, dat zoo samengesteld mogelijk is onder de gegeven omstandigheden; een chinon, dat een rol zou kunnen vervullen in de synthese van gewoon inosiet (of van een stof daarmede geometrisch isomeer), en in meer dan één opzicht van belang.

Over de omzetting van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl door aethylchloride. In den beginnne werd dinatrium-wijnsteenzuur aethyl voor onoplosbaar gehouden in aethylchloride, maar geleid door beschouwingen van meer of min theoretischen aard, werd dit tartraat geruimen tijd geschud met aethylchloride (in een toegesmolten buis), en inderdaad werd er iets van opgelost, maar uiterst weinig. Na langer schuddende, werd nog meer opgelost. Maar ten slotte kwam men tot de ontdekking, dat de *tijd* hier de voornaamste factor is, en men deze twee lichamen slechts geruimen tijd met elkander heeft in aanraking te laten (als altijd in een toegesmolten glazen buis), om het tartraat in een betrekkelijk groote hoeveelheid te zien oplossen, zoo 1,5 gr. tartraat in 4 gr. van het chloride (en daarmede is het maximum nog lang niet bereikt; zie later), waartoe evenwel eenige dagen worden vereischt.

De theoretische beschouwingen, waarvan werd uitgegaan, hadden ten grondslag, dat de scheikundige neiging die *aethylchloride* wel zal moeten uitoefenen op dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (aangezien de resten van natrium zich bevinden in het alcoholisch gedeelte van het molecuul), zich niet openbarende in den vorm eener reactie, die het ontstaan van chloornatrium (en diaethyl-wijnsteenzuur aethyl) tengevolge heeft, zich wel zou kunnen doen gelden door het tartraat op te lossen, een eigenschap, welke meer of min een scheikundig of physisch-scheikundig karakter vertoont, en als 't ware een zekere mate van (dus geheeten) aantrekking aankondigt.

In geval dinatrium-wijnsteenzuur aethyl eenigen alcohol bevat (evenwel minder dan zou overeenkomen met een verbinding in een gelijk aantal mol.), wordt het veel gemakkelijker opgelost in aethylchloride. Wordt het tartraat (in een betrekkelijk groote hoeveelheid) geruimen tijd verhit (b.v. nagenoeg 5 uur) bij ongeveer 60^0 (als altijd veronder-

steld in het gedeeltelijk waterstof-ledig), dan kan het gebeuren, dat het in aanraking met aethylchloride gedurende dagen niet merkbaar verandert, om dan in een betrekkelijk korten tijd te worden opgelost. Verondersteld, dat de aanwezigheid van een weinig alcohol de oplosbaarheid bevordert van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, zoo laat het zich vrij duidelijk verklaren, dat, als de reactie eenmaal is aangevangen, de alcohol, ontstaan bij de omzetting, het opgelost worden steeds sneller en sneller doet plaats hebben.

Merken we daarenboven op, dat de drukking bij het maken van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, betrekkelijk laag moet zijn (gemiddeld 10^{mm} en minder), anders kan het voorkomen, dat de massa, in plaats van geleiachtig te blijven, in den aanvang alvorens vast te worden, vloeibaar wordt, onder gelijktijdig afzetten van een geelgekleurde stof; met andere woorden, de reactie schijnt onder deze omstandigheden een ander verloop te hebben. Dit kan vooral dan het geval zijn, wanneer met een betrekkelijk groote hoeveelheid wordt gewerkt (stel uitgaande van 0,29 $\times$ 9 $=$ 2,61 gr. natrium), onder welke omstandigheden ook de alcohol moeilijker is te verwijderen, vooral, wanneer het geheel in een sterk samenhangende massa is omgezet.

Zooals later zal blijken, wordt de grootste hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl onder den invloed van aethylchloride omgezet, maar schijnt een gedeelte somwijlen onaangetast te blijven. Vormt zich onder deze omstandigheden een systeem van evenwicht? Later zal dit punt ter sprake komen. Voor het oogenblik mogen eenige feiten worden vermeld, die betrekking hebben op de wijze van ontstaan van gemelde oplossing en eenigen harer eigenschappen, en tevens van het product na verdampen van het aethylchloride terugblijvende.

Alvorens dinatrium-wijnsteenzuur aethyl wordt opgelost, ontstaat een *geleiachtige* massa, die een groot deel der buis vult, wanneer men uitgaat van de vroeger vermelde verhouding tusschen dit tartraat en aethylchloride. Om evenwel dit verschijnsel te kunnen waarnemen, is het noodig, van een betrekkelijk groote hoeveelheid dezer stoffen uit te

gaan, want eenmaal gevormd, wordt deze geleiachtige massa gemakkelijk opgelost. De oplossing vangt aan met zeer licht geel te zijn gekleurd, om na eenigen tijd te hebben gestaan, wat donkerder van kleur te worden. Laat men de overmaat (zie later) aan aethylchloride verdampen onder een exsiccator, dan doet zich eerst een geleiachtige massa voor, die geel is gekleurd, later overgaande in een gomachtig product, in het gedeeltelijk ledig vormende een gemakkelijk te verdeelen glasachtige massa, die licht geel is gekleurd. Als dinatriumwijnsteenzuur aethyl, is ook dit lichaam hygroscopisch, maar geplaatst in de vochtige lucht ontstaat er veelal geen krystallijne verbinding (wijnsteenzuur di-natrium) in merkbare hoeveelheid, en slechts een geleiachtige massa, die niet vervloeit.

I. Het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl werd gemaakt volgens de vroeger gegeven methode *), te weten 0,29 gr. natrium opgelost in 6 gr. zuiveren alcohol en 1,3165 gr. wijnsteenzuur aethyl (aan het einde der bewerkingen werd bij ongeveer 62^0 gedurende 3 uren verhit in het waterstofledig), opleverende 1,586 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (bevrijd van alcohol), terwijl de theorie eischt 1,575 gr.. Deze hoeveelheid werd opgelost in 3,901 gr. aethylchloride (dit laatste met veel zorg gezuiverd; tevens het geval met dat, in later te vermelden proeven gebruikt), in een glazen buis, daarna digtgesmolten. Na verdamping van het overtollige aethylchloride, bleef terug 1,7565 gr.; na plaatsen in het gedeeltelijk waterstof-ledig (en daarna vullen der buis met waterstof, als gewoonlijk) herleid tot 1,742 gr.. Bijgevolg had er een vermeerdering plaats in gewicht van 1,742—1,586 = 0,156 gr.. Dit product wordt opgelost in 10 c.c. water. De glasachtige massa begint met geleiachtig te worden. De oplossing is nauwelijks geel gekleurd, en bevat in suspensie druppeltjes van een stof, die men voorloopig zal bestempelen met *lichaam B*. Aan de oplossing, die sterk alkalisch reageert, werd tijd gelaten tot verzeepen, en daarna neêrgeslagen met alcohol. Hierdoor ontstond

---

*) Rec. d. Trav. Ch. T. 8, 374.

een vloeibaar afzetsel (lichaam *B* daarentegen werd opgelost), dat weldra krystallijn werd, op de wijze zooals veelal geschiedt bij neêrslaan eener waterige oplossing van wijnsteenzuur di-natrium met alcohol. De hoeveelheid bedroeg die van 0,33 gr., terwijl 1,575 gr dinatrium-wijnsteenzuur aethyl vordert 1,222 gr. wijnsteenzuur di-natrium (ongerekend het krystalwater, dat werd verwijderd); zie II.

De moederloog gaf met ferridchloride een *kersroode* verkleuring, die zoowel verdween door een overmaat van zoutzuur als van potassa.

II. De proef werd herhaald met 0,29 gr. natrium, 6 gr. zuiveren alcohol en 1,316 gr. wijnsteenzuur aethyl; het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, opgelost in 4 gr. aethylchloride, werd behandeld met 5 c.c. water (bijgevolg met de helft van I), dat eenige uren vereischt (het doel hiervan was om de verzeeping te bevorderen, aangezien dan de concentratie grooter is). Ook ditmaal deed zich een kleine hoeveelheid voor van lichaam *B*. Er werd alcohol bijgedaan; men liet de massa eenigen tijd staan, totdat de oplossing niet meer merkbaar troebel werd bij opnieuw toevoegen van alcohol, en bepaalde daarna de hoeveelheid wijnsteenzuur di-natrium gevormd, die bleek te zijn 0,428 gr. (ook werd op deze stof gereageerd met calciumchloride), afkomstig van het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat door het aethylchloride niet was veranderd. De moederloog gaf daarenboven dezelfde reactie met ferridchloride. Onder een exsiccator geplaatst, bleef terug 1,117 gr.; dit gaf na behandeling met alcohol aan daarin onoplosbare deelen 0,278, terwijl het alcoholisch filtraat terugliet 0,741 gr. van een *glasachtige* stof met lichtgele kleur, oplosbaar in water met alkalische reactie, met ferridchloride een kersroode verkleuring gevende. Noemen we voorloopig dit product *lichaam A* (zie later).

III. De verhouding der stoffen, waarvan werd uitgegaan, was genoegzaam dezelfde. Het product van 1,568 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl werd opgelost in 4 gr. aethylchloride, na verdamping van aethylchloride gevende 1.745 gr. van een lichaam, dat in het gedeeltelijk ledig van waterstof werd herleid tot 1,73 gr., bijgevolg een vermeerdering

in gewicht aanbiedende van 1,73—1,563 = 0,167 gr.. Na oplossing in water en een paar dagen te hebben gestaan, werd de oplossing neêrgeslagen met alcohol, waardoor een afzetsel ontstond van 0,475 gr. wijnsteenzuur di-natrium (waarop werd gereageerd met calcium-chloride, enz.). De moederloog werd geplaatst onder een exsiccator, het terugblijvende behandeld met alcohol, gefiltreerd, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator, gevende 0,645 gr. van lichaam *A* (nog nader te zuiveren).

IV. Van genoegzaam dezelfde verhouding der eerste stoffen uitgaande, gaf 1,58 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl na behandeling met aethylchloride 1,809 gr..

Bij gevolg is in drie proeven gevonden:

	Natrium gebruikt;	Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl gevormd:	Product na behandeling met aethylchloride:	Verschil:
I.	0,29 gr.	1,586 gr.	1,742 gr.	0,156 gr.
III.	» »	1,563 »	1,73 »	0,167 »
IV.	» »	1,58 »	1,809 »	0,229 »

Verhit met kalk, bleek het product chloor te bevatten. Volgens de medegedeelde wijze te werk gaande, is dit product een mengsel, zooals later zal blijken, van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, van de ontstane verbinding met aethylchloride, en wellicht tevens van alcohol. Later is gevonden, dat na lang staan der oplossing van aethylchloride, er zich een *afzetsel* vormt, en dat onder deze omstandigheden de oplossing geen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl meer schijnt te bevatten, dat dan tevens niet aanwezig is in het product na verwijdering der overmaat van aethylchloride. Uitgaande van een versche oplossing, zou men, de hoeveelheid wijnsteenzuur di-natrium bepalende door behandeling met water, kunnen berekenen de hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl dat onaangetast bleef, en uit de aanvankelijk bepaalde toename in gewicht kunnen besluiten tot de door de ontstane verbinding hoeveelheid opgenomen aethylchloride (of nog beter door een chloorbepaling). Maar de bepaling van het wijnsteenzure di-natrium laat te wenschen over, ook verbindt zich het aethylchloride waarschijnlijk zoowel met het dina-

trium-wijnsteenzuur aethyl als met de ontstane verbinding, om niet te spreken van den alcohol (zie een weinig later). Men moet alzoo werken met een product, dat geen dinatrium-wijnsteenzuur aethyl bevat, door de oplossing zoolang te laten staan, dat zich geen afzetsel meer vormt. Voegen we er nog aan toe, dat 1,575 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl een toename in gewicht zou eischen van 0,365 gr., aannemende, dat één mol. hiervan zich verbindt met één mol. aethylchloride, maar hoogst waarschijnlijk komt er alcohol vrij, die verdampt.

Ten einde op meer afdoende wijze den omzettenden invloed van aethylchloride op dinatrium-wijnsteenzuur aethyl te leeren kennen, is een contrôle-proef gedaan door dit tartraat te ontleden met water zonder tusschenkomst van het chloride. Er werd uitgegaan van een hoeveelheid dinatrium-wijnsteenzuur aethyl afkomstig van 0,29 gr. natrium, dit zij 1,575 gr. van het tartraat, opgelost in 5 c.c. water, en deze oplossing werd, na eenigen tijd te hebben gestaan, met alcohol neêrgeslagen Na filtratie, werd het filtraat eenigen tijd gelaten onder een exsiccator, en opnieuw met alcohol behandeld, dat nog een weinig wijnsteenzuur di-natrium gaf. Alles te zamen werd 0,952 gr. wijnsteenzuur di-natrium erlangd in plaats van 1,222 gr., zooals de theorie eischt, bijgevolg is er een tekort van 1,222—0,952 = 0,27 gr.. Hierbij dient er evenwel aan te worden herinnerd, dat het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl gedurende drie uur bij ongeveer 62^0 was verhit, als gevolg waarvan eenige omzetting plaats heeft.

Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl tegenover aethylchloride bij verwarming. Bij 50^0 in een toegesmolten buis gedurende 1 uur verhit, veranderde de kleur der oplossing niet merkbaar; na 3 uur was deze eenigermate in sterkte toegenomen, in meerdere mate het geval na 24 uur. Na 72 uur in 't geheel te zijn verwarmd, was de kleur geel-rood geworden, en eenig afzetsel ontstaan. Er werd 1,5 gew.-d. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl genomen op 4 gew.-d. aethylchloride.

Lichamen A en B nader beschouwd. De producten van I en II, te weten 0,741 en 0,645 gr. werden opgelost in ge-

wonen abs. alcohol, de oplossing gefiltreerd van eenig afzetsel, en het filtraat geplaatst onder een exsiccator. Het terugblijvende lichaam *A* werd vervolgens opgelost in een weinig water, en gefiltreerd van een weinig van lichaam *B* (zie vroeger). Het filtraat werd gezet onder een exsiccator en de terugblijvende massa vervolgens behandeld met eenigen alcohol (en gefiltreerd van eenig krijstallijn lichaam). Na verdamping bleef 0,665 gr. terug van lichaam *A*, meer of min gezuiverd. Dit product is vervloeibaar in vochtige lucht geplaatst, te gelijker tijd iets van een krystallijne stof afzettende, namelijk van wijnsteenzuur di-natrium, waaruit volgt, dat het product nog niet geheel zuiver is. Het is *onoplosbaar* in aethylchloride en zoo ook in abs. aether. De waterige oplossing kan worden verhit bij het kookpunt en na bekoelen toch nog de reactie geven met ferridchloride. Met verdund zoutzuur doet lichaam *A* afzetten van een olieachtige vloeistof, dus wel van lichaam *B* (zie vroeger).

In geval het oorspronkelijk product, behalve de ontstane verbinding bevat dinatrium-wijnsteenzunr aethyl, kunnen vele reacties intreden onder den invloed van water, tevens door de aanwezigheid van aethylchloride. Het zou wel eenigermate ontijdig zijn, om thans deze reacties te willen behandelen. Maar het is duidelijk, dat lichaam *A* een natrium-afgeleide zal zijn van de verbinding nagenoeg of geheel in zijn oorspronkelijken vorm, en dat lichaam *B* zal wezen de aethylester van dit lichaam (hetzij de zure, of de neutrale), of dit lichaam in vrijen staat.

Om den aethylester der gevormde verbinding te erlangen, werd uitgegaan van 1,58 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dit opgelost in 4 gr. aethylchloride; terugbleef (na het waterstof-ledig) 1,809 gr. (zie p. 180), dat werd behandeld met verdund zoutzuur. Lichaam *B* liet niet op zich wachten, maar ook de oplossing gaf de reactie met ferridchloride (lichaam *B* is eenigermate oplosbaar in water, zie iets later). Geplaatst onder een exsiccator bleef 1,871 gr. terug; behandeld met alcohol bleek 0,85 gr. onoplosbaar te zijn, terwijl de alcoholische oplossing na verdamping terug liet 0,963 gr. van een syropig lichaam (er was water toege-

voegd aan de alcoholische oplossing om een estervorming van mogelijk aanwezig wijnsteenzuur te voorkomen), dat werd behandeld met abs. aether, na verdampen hetzelfde product teruglatende. Een weinig water doet een olieachtige vloeistof ontstaan, wel lichaam *B*, dat weinig oplosbaar is in water. Dit lichaam *B* zal bij gevolg niets anders zijn dan gemeld siropig product na opname wellicht van water. Beiden bezitten een zeer licht gele kleur, door toevoeging van eenig alkali in intensiteit toenemende. Opgelost in water en schuddende met aether, gaat alle stof over in den aether, waarvan men zich kan overtuigen door de reactie met ferridchloride (altijd na toevoegen van alcohol bij de aetherische oplossing).

Gaat men uit van lichaam *A*, lost dit op in water, behandelt dit met Na O H (onder verwarming op een waterbad) tot blijvende alkalische reactie, maakt de oplossing zuur met verdund zwavelzuur, en schudt vervolgens uit met aether, dan werd betrekkelijk weinig van een siropige massa verkregen; reden waarom het wenschelijk werd geacht, om een anderen weg te volgen, en wel dezen, van veeleer te trachten de oorspronkelijke verbinding af te zonderen.

Het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride (na verwijdering der overmaat van dit chloride) tegenover abs. aether. Ter afzondering der oorspronkelijke verbinding werd deze massa behandeld met abs. aether. Ondersteld, dat daarin dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (onaangetast gebleven) aanwezig is, dan zou dit onoplosbaar kunnen zijn (in verbinding met alcohol of aethylchloride of beiden). Wordt aether gedaan bij gemeld product, dan wordt de glasachtige massa veranderd, en blijft terug een kleurloos lichaam (zie later). Bij plaatsen der oplossing onder een exsiccator, blijft opnieuw een glasachtige *geel* gekleurde massa terug. Dit lichaam is volkomen oplosbaar in abs. aether. en doet aanvankelijk een *geleiachtige* massa ontstaan (tevens het geval met het oorspronkelijk product). Geplaatst aan vochtige lucht, wordt het omgezet in een *geleiachtige* massa, fluoresceerende in blauw (zoo ook in aetherische oplossing).

Zelfs na vele dagen te zijn blootgesteld aan vochtige lucht, vervloeit de massa niet (noch vertoonen zich krystallen van wijnsteenzuur di-natrium). De aetherische oplossing geeft met ferridchloride de *kersroode* verkleuring na toevoeging van alcohol.

Later zal blijken, dat, ingeval de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride lang genoeg heeft gestaan om niets meer te doen afzetten, de overblijvende oplossing een product geeft, dat genoegzaam geheel oplosbaar is in abs. aether.

Over het gebruik van abs. aether met aethylchloride ter vermeerdering der opbrengst aan de verbinding en ter verkrijging van een genoegzaam zuiver product. Men wilde weten, of het eenig voordeel zou aanbieden, om aether toe te voegen, alvorens het vrije aethylchloride is verdampt.

Wordt aether gedaan bij een versche oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride, dan wordt niets afgezet, hoeveel aether men er ook bijvoegt. Geplaatst onder een exsiccator, verdampt noodwendig het grootste deel van het aethylchloride het eerst; nochtans wordt geen afzetsel gevormd, en evenmin, wanneer bijkans al de aether is verdampt. Ten slotte blijft een geleiachtige massa terug, overgaande in een *glasachtig* product. Na oplossing in water en neêrslaan met alcohol (onder reeds vroeger opgegeven omstandigheden), werd 0,149 gr. wijnsteenzuur di-natrium erlangd van 1,5 gr. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl (aanvankelijk opgelost in 4 gr. aethylchloride), bijgevolg minder dan in den regel het geval was (zonder de oorspronkelijke oplossing in aethylchloride te hebben laten staan). Zooals reeds vroeger werd medegedeeld, bedraagt de theoretische hoeveelheid die van 1,222 gr. wijnsteenzuur di-natrium; zie ook pag. 187.

Laat men het aethylchloride in die mate verdampen, dat er een siropige massa terugblijft, dan nog lost deze zich op in abs. aether, maar deze oplossing bevat evenzoo eenig dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat niet in het lichaam was omgezet.

Over de kleinste hoeveelheid aethylchloride vereischt ter oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en ter omzetting in de verbinding. Zonder eenig bezwaar werd deze hoeveelheid herleid van 4 gew.-d (zooals vroeger geschiedde en ook later nog wel zal worden gedaan) tot 3 gew.-d. op 1,5 gew.-d. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl. Alvorens op te lossen, wordt bijkans de geheele massa geleiachtig. Bij toevoegen van abs. aether aan de oplossing daarna gevormd, ontstond geen afzetsel. Bij vermindering nogmaals der hoeveelheid aethylchloride, b.v. tot 2 gew.-d., veranderde het geheel in een geleiachtige massa, die in dezen toestand scheen te volharden. Dientengevolge werd het als aangewezen beschouwd, om bij het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl eerst aether te doen en vervolgens aethylchloride, uitgaande van de verhouding van 1,5 gew.-d. dinatrium wijnsteenzuur aethyl, 4 gew.-d. abs. aether ($M = 105,76$), en vervolgens 2 gew.-d. aethylchloride ($M = 64,31$); het geheel gedaan in een buis, daarna toegesmolten. Het dinatrium-wijnsteenzunr aethyl scheen echter onaangetast te zijn, na eenige dagen met aethylchloride en aether te zijn in aanraking geweest. De verklaring van dit verschijnsel kan wel geen andere wezen dan deze, dat de aether zich meester maakt van het aethylchloride, en bij gevolg het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl niet kan worden omgezet in de nieuwe verbinding. Eenmaal verbonden met aethylchloride, schijnt het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl dit chloride niet af te staan aan aether. In ieder geval is nog mogelijk, dat een aanraking gedurende een langeren tijd tusschen dit tartraat en aethylchloride met aether, niet zonder invloed zou geweest zijn op de uitkomst.

Scheiding der oorspronkelijke verbinding van het product, ontstaan door dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride. Nog in de meening verkeerende, van gebruik te kunnen maken van de eigenschap, die aether schijnt te hebben, om zich van het vrije aethylchloride meester te maken, had men in een proef aether gedaan bij de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride. Het eindproduct is evenwel oplosbaar in aether, dus ook het dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, dat onaangetast was gebleken. De

glasachtige massa, na verdampen van den aether terugblijvende, geeft bij staan aan vochtige lucht wel een geleiachtige massa (fluoresceerende in blauw), maar weldra vertoonen zich krystallen van wijnsteenzuur di-natrium. Dit product beantwoordt bijgevolg niet aan de vereischte zuiverheid. Verwijdert men daarentegen dadelijk zooveel mogelijk het aethylchloride in een waterstof-ledig, en behandelt het terugblijvende met abs. aether, dan zou na filtratie en verdampen van den aether een betrekkelijk zuiver product kunnen erlangd worden. Geplaatst in vochtige lucht wordt ook dit geleiachtig, echter zonder krystallen te geven van wijnsteenzuur di-natrium. Men liet de oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride lang genoeg staan, om geen afzetsel meer te vormen.

I. Een hoeveelheid van 0,725 gr. van gemeld product, tamelijk innig vermengd met de chromaten van lood en kalium, gaf 0,9201 gr. kooldioxyde en 0,3009 gr. water;

0,6524 gr. van dezelfde stof, niet innig vermengd, gaf 0,8564 gr. kooldioxyde en 0,2741 gr. water;

0,7166 gr. van hetzelfde product, innig vermengd, gaf 0,9022 gr. kooldioxyde en 0,2834 gr. water;

0,4976 gr van de stof, innig vermengd met kalk, leverde op 0,2091 gr. chloorzilver, bevattende 0,0507 gr. chloor;

0,6876 gr. van dit lichaam gaf 0,2933 gr. chloorzilver, inhoudende 0,07246 gr. chloor. Het werd niet innig vermengd met de kalk.

De samenstelling van dit product is bijgevolg, berekend op 100 gew.-d.:

koolstof.	34,6	34,2	34,3
waterstof	4,6	4,5	4,4
chloor	10,4	10,5	—.

Werkende onder genoegzaam dezelfde omstandigheden, wordt nu en dan een product verkregen, dat veel minder oplosbaar schijnt te zijn in aether (zie later). Om die reden werd in de volgende proef geen gebruik gemaakt van aether, daarentegen liet men de oplossing van dinatrium-

wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride betrekkelijk geruimen tijd staan, om daarna de heldere oplossing af te hevelen van een afzetsel gevormd. Bij verdampen van het aethylchloride ontstaat ook hier aanvankelijk een geleiachtige massa, die dan een gomachtig aanzien verkrijgt en ten slotte een glasachtig product vormt, in het gedeeltelijk waterstofledig. In vochtige lucht geplaatst, wordt de vaste stof (met gele kleur) geleiachtig, zonder vorming van krystallen van wijnsteenzuur di-natrium; het fluoresceert in blauw (geheel zooals het lichaam met aether bereid),

De analyse gaf de volgende uitkomsten.

II. Een hoeveelheid van 0,9181 gr. dezer stof, niet innig vermengd met de chromaten van lood en kalium, gaf 1,1493 gr. kooldioxyde en 0,3723 gr. water;

0,8665 gr. van dit lichaam, niet innig vermengd met kalk, gaf 0,3661 gr. chloorzilver, bevattende 0,09053 gr. chloor;

0,8391 gr. van het product gaf na verbranding 0.3463 gr. stof, na behandeling met zoutzuur gevende 0,366 gr. chloornatrium, bevattende 0,14406 gr. natrium, (bepaling verricht door den Heer L. E. O, de Visser).

Bijgevolg is gevonden berekend, op 100 gew.-d.:

koolstof	34,1
waterstof	4,5
chloor.	10,4
natrium	17,2

In de volgende bereiding werd tevens geen aether gebruikt, en overigens op dezelfde wijze te werk gegaan.

III. *a*. Een hoeveelheid van 1,2534 gr. van dit product gaf met kalk 0,5449 gr. chloorzilver, bevattende 0,1347 gr. chloor.

b. Deze bepaling werd naar een geheel andere methode uitgevoerd. Een hoeveelheid van 1,1101 gr. van hetzelfde product werd opgelost in 5 c.c. water, terwijl de oplossing eenigen tijd aan zich zelve werd overgelaten, om daarna te filtreeren (ter afzondering eener kleine hoeveelheid van lichaam *B*). De oplossing werd zuur opgemaakt met salpeterzuur, en neêrgeslagen met zilvernitraat.

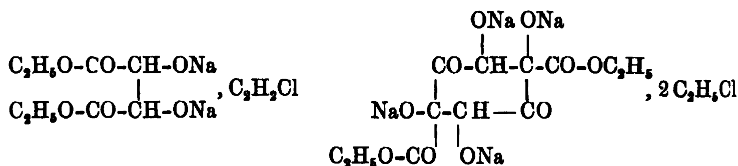
Er werd verkregen 0,48 gr. chloorzilver, bevattende 0,1186 gr. chloor.

Berekend op 100 gew.-d. geeft dit eenzelfde gehalte aan chloor, te weten:

	a	*b*
chloor	10,7	10,7.

De producten der bereidingen I, II en III verhouden zich op overeenkomstige wijze bij plaatsing in vochtige lucht (zie vroeger). Opgelost in water, geeft alcohol geen neêrslag van wijnsteenzuur di-natrium.

Het product gemaakt zonder of met aether is wel waarschijnlijk een verbinding van het gevormde lichaam met aethylchloride. Laten we hieronder volgen de samenstelling (op 100 gew.-d.) van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl op 1 mol. verbonden met 1 mol. aethylchloride; en van het chinon op 1 mol. vereenigd met 2 mol. van dit chloride:



	vereischt:	vordert:
koolstof. . .	37,3	35,7
waterstof . .	5,4	4,1
chloor. . . .	11,3	13,2
natrium. . .	14,6	17,1.

Het gevonden gehalte aan chloor beantwoordt wel niet aan deze formule van het chinon vereenigd met aethylchloride. Maar men zou kunnen opmerken, dat het *vaste* product aanvankelijk gevormd door dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride, van dit chloride verliest (zie later) in het gedeeltelijk (waterstof) ledig, en dat bijgevolg het eindproduet zou kunnen zijn een mengsel van verbindingen van het chinon met dit chloride. Veronderstellende, dat dit mengsel bevat 1½ mol. chloride op 1 mol. chinon, heeft men:

	gevonden. I.			II.	III.		berekend.
koolstof. .	34,6	34,2	34,3	34,1	—	—	35,6
waterstof. .	4,6	4,5	4,4	4,5	—	—	3,9
chloor. . .	10,4	10,5	—	10,4	10,7	10,7	10,5
natrium . .	—	—	—	17,2	—	—	18,2.

Het geanalyseerde product is hygroscopisch, en een betrekkelijk kleine hoeveelhèid water oefent een tamelijk merkbaren invloed uit op het gehalte aan koolstof en waterstof, maar betrekkelijk weinig invloed op dat van chloor. Een lichaam onder zulke omstandigheden ontstaan, waar wel secondaire reacties niet zullen ontbreken, kan toch ook wel bezwaarlijk zuiver zijn. Maar in ieder geval is opmerkingswaardig de overeenkomst in samenstelling, vooral der producten I en II, met het oog op verschillen in de wijze van bereiding.

Melden we nog, dat het eenmaal is voorgekomen, dat een product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride, hetwelk weinig oplosbaar was in abs. aether, na verdampen, in betrekkelijk geringe hoeveelheid gaf van een lichaam (overigens genoegzaam dezelfde eigenschappen vertoonende van het vroegere product), dat niet meer bevatte dan ongeveer 2 p.c. chloor; bijgevolg hield deze stof als 't ware geen chloor in als integreerend bestanddeel. Men zou derhalve een mengsel kunnen hebben (zie vroeger) van de oorspronkelijke verbinding zonder en met 1 of 2 mol. aethylchloride.

In geval dit chloride zich bevindt in de (gesloten) keten, waar de resten O Na zich bevinden, zou het zich ongeveer kunnen verhouden als in den regel het geval is met krystalwater; en de waargenomen feiten zouden dan niets bijzonders aanbieden (zie later).

Neemt men het gemiddelde der analysen van I, II en III, berekent vervolgens koolstof- en waterstof-gehalte behoorende tot het chinon (?) en het aethylchloride, dan wordt gevonden voor de samenstelling van het lichaam zonder chloride:

Gemiddelde van I, II en III:		Verdeeling:	Samenstelling van het lichaam zonder chloride:
koolstof. .	34,3	27,1 van het chinon (?)	27,1
		7,2 van het chloride	
waterstof .	4,5	3,0 van het chinon (?)	3,0
		1,5 van het chloride	
chloor. . .	10,5		
natrium. .	17,2		17,2
zuurstof. .	33,5		33,5
	100,0		80,8.

Op 100 gew.-d. berekend, is bij gevolg de samenstelling van het chinon? (te weten, in dat geval van tetra-natrium-aethylester):

```
                  ONa ONa
                   |   |
               CO-CH—C-CO.OC₂H₅(chinon)   C₂H₅O-CO-CH-ONa
         NaO\    |   |                             |
  C₂H₅O-CO/C—CH—CO                          C₂H₅O-CO-CH-ONa
            |
           NaO                              (dinatrium-wijnsteenzuur
```

gevonden:		vereischt:	aethyl) vordert:
koolstof. . .	33,5	35,2	38,3
waterstof. .	3,6	2,9	4,8
natrium . .	21,3	22,5	18,4.

Zie hieonder over de samenstelling van het in ether onoplosbare gedeelte.

Samenstelling van het afzetsel. Na oplossen van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride, en verdrijven zooveel mogelijk van dit chloride (zonder afzetsel en oplossing te hebben gescheiden), behandelen vervolgens van het terugblijvende met abs. aether, blijft een gedeelte onopgelost. Laat men dit laatste staan met abs. aether, om dezen daarna te decanteeren, en herhaalt men deze bewerking, tot geen noemenswaardige hoeveelheid aan vaste stof meer oplost, dan blijft een bleekgele bijkans kleurlooze verbinding terug. De waterige oplossing is lichtgeel van kleur en bezit een alkalische reactie, terwijl deze door ferridchloride sterk *kersrood* wordt gekleurd. Geplaatst aan vochtige lucht, vormt dit lichaam een geleiachtige massa. In een woord, deze stof verhoudt zich over 't algemeen, zoools het geval is met het

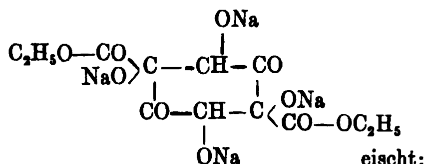
in aether oplosbare product. Een hoeveelheid van 0,7308 gr. gaf 0,9312 gr. kooldioxyde en 0,2436 gr. water;

1,0018 gr. van dezelfde stof gaf 0,0516 gr. chloorzilver (bepaald langs den natten weg, zie vroeger), bevattende 0,01276 gr. chloor.

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met (zie p. 189):

			Samenstelling zonder chloride:
koolstof	34,7	33,8 van het chinon (?) 0,9 van het aethylchloride	33,8
waterstof	3,7	3,5 van het chinon (?) 0,2 van het chloride	3,5
chloor	1,3		
natrium en zuurstof.	60,3		60,3
	100,0		97,6.

Voor de samenstelling der verbinding zonder chloride heeft men bij gevolg op 100 gew.-d.:



gevonden:		eischt:
koolstof . .	34,6	35,2
waterstof .	3,6	2,9.

De samenstelling is dus ongeveer dezelfde als die van het in aether oplosbare product zonder chloride.

Men is geneigd, om het verschil tusschen de uitkomsten der analyse en hetgeen de formule eischt ten deele toe te schrijven aan de eigenschap der stof van hygroscopisch te zijn, terwijl de betrekkelijk groote hoeveelheid aether, waarmede deze te behandelen is, met hoeveel voorzichtigheid ook te werk gegaan, al ligt eenig water doet opnemen uit de dampkringslucht Uit het medegedeelde volgt wel met genoegzame zekerheid, dat deze verbinding het afzetsel vormt, ontstaan uit de oplossing van het dinatrium-wijnsteenzuur

aethyl in aethylchloride; toch kan hiervan wat in oplossing blijven. Later zal men moeten nagaan, hoe het komt, dat een deel dezer stof niet is verbonden met aethylchloride, wel het geval naar 't schijnt met een andere hoeveelheid. Wellicht vervult de alcohol, vrij gekomen als gevolg der reactie, hier eenige rol. Zooveel schijnt zeker, dat de massa van afzetsel en oplossing, na onder een exsiccator (met zwavelzuur) te hebben gestaan, en vervolgens in het gedeeltelijk ledig, alcohol verliest, zooals wel blijkt uit de vermeerdering in maat van het zwavelzuur der U-buis, want aethylchloride wordt niet in een noemenswaardige hoeveelheid door zwavelzuur opgenomen.

Analyse van het afzetsel, meer onmiddelijk afgezonderd. Het vloeibaar gedeelte werd zooveel mogelijk afgeheveld, en daarna het afzetsel gewasschen met abs aether.

a. Een hoeveelheid van 0,7644 gr. stof gaf 0,9737 gr. kooldioxyde en 0,2584 gr. water (er werd tamelijk innig vermengd met de chromaten).

b. 0,6329 gr. stof gaf 0,8069 gr. kooldioxyde en 0,2121 gr. water (er werd niet innig vermengd met de chromaten).

c. 0,3323 gr. stof gaf 0,0115 gr. chloorzilver, bevattende 0,00284 gr. chloor of 0,8 p.c, dat (berekend als aethylchloride, zie vroeger), geen noemenswaardigen invloed uitoefent op koolstof- en waterstofgehalte.

Berekend op 100 gew.-d. volgt uit *a* en *b*.:

	a	*b*	Dinatrium-wijnsteenzuur aethyl vordert:
koolstof	34,7	34,8	38,3
waterstof	3,7	3,7	4,8.

Het lichaam is genoegzaam kleurloos. Overigens bezit het dezelfde reacties als dat naar een eenigzins gewijzigde methode gemaakt (zie vroeger). De hoeveelheid verkregen product is evenwel blijkbaar minder, toch is de samenstelling genoegzaam dezelfde, ongerekend eenig verschil in gehalte aan chloor (aethylchloride).

Deelen wij nogmaals mede, dat dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in vochtige lucht geplaatst begint met vloeibaar te

worden, om vervolgens krystallen af te zetten van wijnsteenzuur di-natrium; niet het geval met gemelde produkten (zie vroeger).

Zooals reeds vroeger werd opgemerkt, gebeurt het somwijlen, dat het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl en aethylchloride veel minder oplosbaar is in abs. aether. Bij een dusdanig mengsel werd een weinig aethylchloride gevoegd, terwijl men de massa (bij gevolg aether bevattende) gedurende vele weken liet staan, nu en dan schuddende. Bijkans alles werd opgelost (behalve een weinig eener stof). Uit deze proef zou men kunnen afleiden, dat onder gemelde omstandigheden de aanwezigheid van aether de inwerking van het aethylchloride niet tegengaat (zie vroeger); maar het is wenschelijk, om wat voorzichtig te zijn met het trekken van eenig besluit, want een zoo langdurig contact had niet plaats in vroegere proeven.

Een hoeveelheid van 0,7914 gr. van dit product, niet innig vermengd met lood- en kalium-chromaat gaf 0,9642 gr. kooldioxyde en 0,3033 gr. water;

0.9756 gr. van dezelfde stof, innig vermengd, gaf 1,2008 gr. kooldioxyde en 0,3724 gr. water. Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof	33,2	33,6
waterstof	4,2	4,2.

Hieruit volgt wel, dat men in hoofdzaak met dezelfde verbinding heeft te doen.

In bereiding III van het product van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl met aethylchloride (bevattende 10,4 p.c. chloor), bleef na verdrijven der overmaat van aethylchloride (bij gewone temp.) een gomachtige massa terug van 9,318 gr., in het gedeeltelijk waterstof-ledig herleid tot 7,897 gr. (bij gewone temp.), dus verliezende 1.421 gr. van het chloride. Verondersteld, dat dit laatste op 1 mol. chinon bevat 1½ mol. aethylchloride (zie vroeger), dan zouden deze 7,897 gr. bevatten 1,512 gr. chloride, dat met het vervluchtigde, zijnde 1,421 gr., uitmaakt de som van 2,933 gr.. Berekend op het mol.-gew. van het chinon ($M = 407,08$), vindt men

187 gew.-d. aethyl-chloride, terwijl de theorie voor 3 C_2H_5Cl vordert 192,93 gew.-d. (= 3 × 64,31; *M* van C_2H_5Cl is 64,31).

In bereiding III (bevattende 10,7 p.c. chloor), bleef na behandeling in het gedeeltelijk ledig 7,968 gr. over van de oorspronkelijke hoeveelheid 9,155 gr., dus een verschil gevende van 1,187 gr.. Als boven berekend, bevatten deze 7,968 gr. aan aethylchloride 1,526 gr., dat de som uitmaakt van 1,187 + 1,526 = 2,713 gr.. Op 1 mol. chinon heeft men bij gevolg 171 gew.-d. chloride, terwijl, als gezegd, de theorie voor 3 C_2H_5Cl eischt 192,93 gew.-d.. In de laatste proef was de massa van den aanvang af een weinig gedissocieerd, als gevolg van het verdrijven van het vrije chloride, in den toestel aanwezig, door droge lucht (de gomachtige massa vertoonde toen barsten, en werd ten deele ondoorschijnend); de hoeveelheid van 171 gew.-d. zal dus wat te laag zijn. In de eerste proef daarentegen was geen droge lucht doorgelaten, en bij gevolg zal 1,421 gr. wat te groot zijn, en de uitkomst van 187 gew.-d. dus ook eenigermate te hoog zijn.

Over de standvastigheid der verbindeng. Men wenschte te weten, of het aethylchloride is te scheiden van het lichaam. Bij verhitten in het gedeeltelijk ledig (van waterstof) bij 60°, schijnt het lichaam niet merkbaar te worden veranderd, wel het geval tusschen 60°—90° en bij 90°, in welk geval van eenig gas vrijkomt (met 't oog op de analyse wellicht aethylen C_2H_4). Een hoeveelheid van ongeveer 6 gr. der oorspronkelijke stof werd herleid tot 5,4 gr., derhalve had een verlies plaats van 0,6 gr.. Het product was een weinig van kleur veranderd, die van geel veeleer rood-bruin was geworden, daarentegen was het oorspronkelijk karakter bewaard gebleven, oplosbaarheid in abs. aether, enz.. Bij analyse verkreeg men de volgende uitkomsten:

Een hoeveelheid van 0,9043 gr. gaf 1,1097 gr. kooldioxyde en 0,3208 gr. water (de stof werd niet innig vermengd met de chromaten van lood en kalium);

0,8153 gr. van hetzelfde product (innig vermengd) gaf 1,0143 gr. kooldioxyde en 0,3025 gr. water;

1,4536 gr. der stof (niet innig vermengd met kalk) leverde op 0,6744 gr. chloorzilver, bevattende 0,1667 gr. chloor;

0,4565 gr. vormde 0,2127 gr. Na Cl (na behandeling met verdund zoutzuur van het na gloeiing terugblijvende, zijnde 0,2012 gr.), een bepaling verricht door den Heer L. E. O. d. V..

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

koolstof	33,5	33,9
waterstof	3,9	4,1
chloor	11,5	—
natrium	18,3	—

Het resultaat is bij gevolg, dat aethylchloride onder deze omstandigheden niet is te verwijderen.

Product van inwerking van chloorwaterstofgas op de oorspronkelijke verbinding in aetherische oplossing. Er werd uitgegaan van de verbinding die 33,2 en 33,6 proc. koolstof gaf (zie pag. 193); deze was volkomen oplosbaar in abs. aether. De oplossing vormt bij behandeling met zoutzuurgas (in overmaat) een meer of min geleiachtige massa, zonder een ontstaan van chloornatrium Cl Na te vertoonen. Geplaatst onder een exsiccator (met SO_4H_2 en Ca O), bleef een *gomachtig* product terug (doorschijnend), bij ongeveer 20° veeleer tusschen vast en vloeibaar in, met licht gele kleur en fluoresceerende.

Een hoeveelheid van 0,9452 gr. dezer stof werd behandeld met water, gefiltreerd van eenig olieachtig lichaam (*B*; zie vroeger), de oplossing zuur gemaakt met salpeterzuur, en neêrgeslagen met zilvernitraat; er werd verkregen 0,9847 gr. chloorzilver, bevattende 0,2435 gr, chloor.

0,8791 gr. dezer stof gaf 0,9401 gr. kooldioxyde en 0,3177 gr. water.

Berekend op 100 gew.-d. komt dit overeen met:

		1 mol. van het (diaethyltetranatrium-)chinon $+ 1\frac{1}{2}\ C_2H_5Cl + 3\ HCl$. eischt:
koolstof	29,2	29,3
waterstof.	4,0	3,7
chloor.	25,8	25,9.

Hieruit zou dan kunnen volgen, dat zoutzuurgas aethylchloride niet uitdrijft. De overeenstemming dezer cijfers met de formule is opmerkingswaardig, maar niet afdoende. Ook zou met recht mogen verwacht worden, dat in plaats van 3 H Cl zouden zijn vastgelegd 4 H Cl.

Opmerkingswaardig is, dat de verhouding tusschen koolstof en waterstof ongeveer die is vereischt voor 1 mol. dinatrium-wijnsteenzuur aethyl + 2 H Cl, waarvan de samenstelling de volgende is (zie lager):

koolstof	29,4
waterstof	4,3
chloor	21,6.

De waterige oplossing bezit slechts een zeer zwak zure reactie, en er zet zich een zware vloeistof af (lichaam *B*). Behandeld met zuiveren alcohol, blijft een geleiachtige massa terug, terwijl na filtratie en verdamping een lijvige zwak roodbruin gekleurde vloeistof overblijft (bevattende 1,2 p.c. chloor). Met gewonen abs. alkohol geeft het (oorspronkelijk) product een massa, die eerst na toevoeging van een weinig water helder is te filtreeren. Geplaatst onder een exsiccator, blijft evenzoo een siropige massa terug. 0,7781 gr. dezer stof leverde 1,3215 gr. kooldioxyde en 0,4534 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

		wijnsteenzuur aethyl vordert:	de ester van het chinon eischt:
koolstof . , .	46,3	46,6	45,0
waterstof. . .	6,5	6,8	5,0.

Bij uittrekken van het (oorspronkelijk) product met abs. aether, wordt na filtratie en verdamping een lijvige vloeistof erlangd. Een hoeveelheid van 0,7125 gr. gaf 1,2596 gr. kooldioxyde en 0,417 gr. water, op 100 gew.-d. beantwoordende aan:

koolstof	48,2
waterstof	6,5.

Ook deze lichamen doen met water een zware vloeistof

afzetten, die na eenigen tijd wordt opgelost, en met ferridchloride een kersroode verkleuring geeft.

Het oorspronkelijk product (der reactie met chloorwaterstofgas) laat na behandeling met aether een geleiachtige massa terug, zonder eenig afzetsel van gekrystalliseerd chloornatrium, ook behoudt de massa nagenoeg den oorspronkelijken vorm. Na verdampen van den aether blijft een amorphe kleurlooze massa terug, die zeer gemakkelijk vervloeit. Een hoeveelheid van 0,647 gr. dezer stof gaf 0,0632 gr. kooldioxyde en 0,0388 gr. water, op 100 gew.-d. overeenkomende met:

koolstof.	2,7
waterstof	0,7

De siropige massa met aether afgezonderd, werd in het gedeeltelijk luchtledig verhit. Nabij ongeveer 100^0 ging van een kleurlooze vloeistof over. Geanalyseerd werd hetgeen overging bij 110°—120° (*a*), bij 120°—130° (*b*), en bij 120°—130° (*c*); ten slotte ging nog wat over bij 130°—140°, maar tusschen 140°—150° geen noemenswaardige hoeveelheid meer.

a. 0,7467 gr. gaf 1,325 gr. kooldioxyde en 0,4712 gr. water.

b. 0,9444 gr. leverde 1,707 gr. kooldioxyde en 0,5999 gr. water.

c. 0,6919 gr. gaf 1,2722 gr. kooldioxyde en 0,4711 gr. water. Op 100 gew.-d. overeenkomende met:

	a	*b*	*c*
koolstof . .	48,4	49.3	50,1
waterstof . . .	7,0	7,0	7,5.

Wijnsteenzunr aethyl destilleerde niet. Het vloeibare product is eerst na eenigen tijd oplosbaar in water; met ferridchloride geeft het een roode verkleuring. In de retort blijft een gekleurde siropige massa terug, oplosbaar in aether en alcohol, onoplosbaar in water.

Uitgaande van 17 gr. van het oorspronkelijk dikvloeibare lichaam, destilleerde in het gedeeltelijk luchtledig, alles te

zamen genomen, ongeveer 4 gr. van de kleurlooze vloeistof, terwijl zich eenig gas ontwikkelde. Dit gas zal wel zijn kooldioxyde, en bij behandeling van het eerste product met chloorwaterstofgas schijnt ook van dit gas vrij te komen, lettende op de analytische gegevens van het lichaam voor en na behandeling met chloorwaterstof, en op de analysen van het dikvloeibare product met aether afgezonderd. Op 't oogenblik kan nog niet worden gezegd, of dit ontledingsproduct brandigdruivenzuur aethyl is of eenige andere verbinding. Het is bijna ondoenlijk, om een dusdanige hoeveelheid te ontleden van het product van uitgang, met chloorwaterstofgas, dat men in staat zou zijn, van de vloeistof genoeg te bekomen ter nadere zuivering, zooveel tijd vorderen daartoe de vereischte bereidingen.

Verzeeping van het in aether oplosbare product. Er werd uitgegaan van een product dat 10,6 p. c. chloor bevat en dit gedaan bij een waterige oplossing van bijtende soda in een dusdanige verhouding, dat er op 1 Cl voorhanden waren 2 Na OH (0,806 gr- natrium werd opgelost in 12 c.c. water, en hierhij gevoegd 5,55 gr. van gezegd product). Aanvankelijk ontstaat een geleiachtige massa, die geheel wordt opgelost (gekleurd door ferridchloride), om na eenigen tijd een weinig van een krystallyne stof af te zetten. Na decanteeren, doet alcohol er een vloeibaar lichaam uit afzetten, dat niet in krystallynen staat overgaat. De moederloog werd afgeschonken, en het afzetsel na oplossen in water geplaatst onder een exsiccator, waarbij een gomachtige massa terugbleef.

BESLUIT.

1. De oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in aethylchloride doet na eenigen tijd een afzetsel ontstaan. Na decanteeren der oplossing geplaatst onder een exsiccator, en daarna in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), blijft een amorph product (*a*) terug met gele kleur, *oplosbaar*

in abs. aether. De aetherische oplossing laat na verdampen van den aether een product terug van dezelfde samenstelling *) als het oorspronkelijk product (*a*) Het bevat chloor (ongeveer 10 p.c.), en wel onder den vorm van aethylchloride; ook komt van dit chloride vrij uit de massa in vacuo, na onder den exsiccator te zijn vast geworden. Geplaatst in vochtige lucht, wordt product *a* geleiachtig, en in waterige of in alcoholische oplossing door ferridchloride kersrood gekleurd.

Verhit in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), doet product *a* geen aethylchloride vrijkomen (in noemenswaardige hoeveelheid), maar van een ander chloorvrij gas, zooals wel schijnt te volgen uit de analyse †) (zie later 6.).

2. Wordt oplossing en afzetsel aanvankelijk geplaatst onder een exsiccator, vervolgens in het gedeeltelijk ledig (van waterstof), en daarna de terugblijvende massa behandeld met abs. aether, dan blijft een genoegzaam kleurloos lichaam terug §) (bij gevolg onoplosbaar in aether), dat zeer weinig chloor bevat (in den vorm van aethylchloride), en als verontreiniging is te beschouwen.

Aan vochtige lucht blootgesteld, vormt ook dit product een geleiachtige massa, terwijl de waterige oplossing door ferridchloride eveneens kersrood wordt gekleurd.

Men bekomt eenzelfde product **) door de oplossing te decanteeren van het afzetsel, en dan dit laatste met abs. aether te wasschen. De samenstelling dezer producten is wel dezelfde als die van het lichaam in oplossing gebleven (namelijk in aethylchloride), ongerekend het gehalte van chloor in den vorm van aethylchloride ††. Hieruit zou men kunnen besluiten, dat het mechanisme der reactie betrekkelijk eenvoudig zal wezen.

3. De oplossing van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl in

---

*) Zie deze Verhandeling p. 186, 187.

†) l. c. p. 194.

§) l. c. p. 190.

**) l. c. p. 192.

††) l. c. p. 190.

aethylchloride wordt niet neêrgeslagen door abs. aether. Maar vangt men aan met het toevoegen van aether, en doet er vervolgens aethylchloride bij, dan wordt dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *niet* opgelost, De aether schijnt zich dus meester te maken van het aethylchloride; of, anders uitgedrukt, de verbindingspanning van den aether wint het van die van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl *).

4. Wordt een aetherische oplossing van product *a* behandeld met chloorwaterstofgas, dan wordt het geheel meer of min geleiachtig. Geplaatst onder een exsiccator (met zwavelzuur en kalk) blijft een eenigzins geleiachtige doorschijnende massa terug. Abs. aether zondert er een dikvloeibaar lichaam uit af; dit werd geanalyseerd, *terwijl chloornatrium amorph* terugblijft in den vorm der oorspronkelijke massa, nog een kleine hoeveelheid van een andere stof bevattende †).

5. Voegt men aethylchloride bij dinatrium-wijnsteenzuur aethyl, alvorens den alcohol te verwijderen, dan is de uitkomst genoegzaam dezelfde. als ware geen aethylchloride aanwezig (overigens denzelfden weg volgende als bij de bereiding van dinatrium-wijnsteenzuur aethyl).

6. Men moet bijgevolg aannemen, dat er een systeem van evenwicht bestaat tusschen

dinatrium-wijnsteenzuur aethyl,
aethylchloride,
de ontstane verbinding en
alcohol,

hetwelk in 't algemeen de bekende regels zal volgen. De aanwezigheid van alcohol gaat de reactie tegen, als die van aethylchloride haar bevordert.

Men stelt zich voor, om deze onderzoekingen te vervolgen, en te trachten het scheikundig mechanisme der reactie meer

*) l. c. 185.
†) l. c. 195.

te leeren kennen in een volgende verhandeling, terwijl in deze bladzijden veeleer analytische gegevens zijn medegedeeld. Het onderwerp is betrekkelijk nieuw, en de hoeveelheid verbindingen, die zouden kunnen optreden, zóó groot, dat ook de voorzichtigheid gebiedt, om het theoretisch gedeelte nog wat te laten rusten.

Utrecht, 25 October 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 29 November 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, VAN DIESEN, VAN RIEMSDIJK, SCHOUTE, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, WEBER, VAN DER WAALS, MARTIN, VAN BEMMELEN, PEKELHARING, KORTEWEG, ZEEMAN, STOKVIS, MOLL, HOEK, SCHOLS, BAEHR, LORENTZ, BIERENS DE HAAN, KOSTER, MICHAËLIS, MAC GILLAVRY, BAKHUIS ROOZEBOOM, ZAAIJER en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— De Voorzitter opent de Vergadering.

— De Secretaris leest den brief van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken (23 November 1890), waarin der Academie wordt kennis gegeven van het overlijden van Zijne Majesteit Willem III, onzen geëerbiedigden en geliefden Koning, op den 23en November j.l.

De Voorzitter rijst van zijn zetel op en richt tot de Vergadering, die hem staande aanhoort, het volgende woord:

»Mijne Heeren! Er zijn dagen van rouw, waarin men behoefte gevoelt te spreken en elkander te wijzen op de grootte van het geleden verlies, maar er zijn ook rouwdagen,

waarin dat verlies zoo sterk, zoo algemeen wordt gevoeld, dat het onnoodig is zijn omvang te schetsen en in plaats daarvan een eerbiedig zwijgen passend is.

Dit is zeker thans het geval, nu de Akademie den dood te betreuren heeft van hem, die haar door zijn koninklijk woord in het leven riep; nu wij Nederlanders den Vorst zagen heengaan, onder wiens ruim 40-jarige regeering ons Vaderland op zoo menig gebied, zeker niet het minst op dat der wetenschappen, zich krachtig heeft kunnen ontwikkelen; nu wij den laatsten mannelijken afstammeling uit het geslacht der Oranjes, waarmeê ons geheele volksbestaan zoo nauw verbonden is, welhaast zullen zien ten grave dalen bij den grooten Zwijger.

Doch bij die droeve klachte kan zich gelukkig een opgewekte toon voegen, als wij, met een hoopvollen blik in de toekomst, denken aan de jeugdige Vorstin, op wier schouderen thans reeds het koninklijke kleed rust; op haar, die door het geheele Nederlandsche volk vol liefde en eerbied als Koningin begroet wordt.

Moge het onzer koningin Wilhelmina, aanvankelijk geleid en gesteund door hare edele moeder, gegeven zijn, lange jaren de gelukkige Vorstin van ons volk te wezen, en hare regeering zich kenmerken door een krachtig wetenschappelijk leven in Nederland en een vruchtbaren arbeid onzer Akademie".

De Voorzitter verklaart, dat heden enkel eenige zaken zullen worden afgedaan, die geen uitstel gedoogen, en dat de zitting daarna zal worden opgeheven.

Een antwoord aan Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken is reeds opgezonden en een brief van rouwbeklag voor H. M. de Koningin-weduwe wordt door het Bestuur ontworpen.

— De Heer Michaëlis leest het rapport, 't welk strekken moet als antwoord op den brief des Ministers van Binnenlandsche Zaken van 15 Aug. ll., waarin gehandeld wordt over een internationaal congres te Parijs, ter vaststelling

van een eersten meridiaan, liefst dien van Jeruzalem. De Commissie, waarvan de heer MICHAËLIS voorzitter is, stelt, op nader ontwikkelde gronden, voor, aan den Minister te antwoorden. dat het der Afdeeling wenschelijk voorkomt, aan de Italiaansche Regeering te kennen te geven, dat het min verkieslijk schijnt om, hangende de quaestie van de keuze van den eersten meridiaan, bij de twee, waarvan thans sprake is, nog een derden voor te stellen en daardoor de kans op spoedige overeenstemming nog te verminderen. — De conclusie van het rapport wordt aangenomen.

Een tweede rapport, door dezelfde Commissie uitgebracht, heeft betrekking op twee missiven van den Minister van Binnenlandsche Zaken: ééne van 31 Oct 1890, »*over eene nieuwe tijdregeling van bepaalde gedeelten van Europa*", en eene andere van 18 Nov. 1890 „*over de invoering van eenheid van tijd bij de spoorwegadministratiën*": onderwerpen dus van ongeveer gelijksoortige strekking. — Op nader ontwikkelde gronden stelt de Commissie voor, dat de Afdeeling den Minister verzoeke het daarheen te leiden, dat:

1°. aan den Belgischen Gezant geantwoord worde dat de Nederlandsche Regeering voornemens is machtiging te geven tot het invoeren van de nieuwe tijdsregeling, bijaldien dit door België en Duitschland gedaan wordt;

2°. dat de Maatschappij tot exploitatie van Staatsspoorwegen worde gemachtigd om toe te treden tot de regeling, voorgesteld door het Verein der Deutschen Eisenbahnverwaltungen; en

3°. dat, bij eventueele invoering der nieuwe regeling, deze ook worde toegepast bij de telegraphie en bij de uurwerken der verschillende gemeenten.

Het voorstel der Commissie wordt zonder discussie aangenomen.

De Secretaris deelt mede, dat bij hem is ingekomen een schrijven van den Heer J. A. C. OUDEMANS, ter begeleiding van eene verhandeling van den Heer E. ENGELENBURG,

Civiel-Ingenieur te Utrecht, getiteld: „Hyetographie van Nederland", ter plaatsing in de werken der Akademie. De Voorzitter verzoekt de Heeren J. A. C. OUDEMANS en VAN DIESEN daarover in de in de volgende vergadering rapport uit te brengen.

— De vergadering wordt gesloten.

Door den Heer VAN DER WAALS wordt, na het sluiten van de Vergadering, aan den Secretaris overhandigd de volgende:

Mededeeling van den Hr. Dr. W. H. JULIUS *te Utrecht.*

Volgens de spectrobolometrische methode *) werd de selectieve absorptie van warmtestralen door verschillende vloeistoffen nagegaan †). Het onderzoek strekte zich uit over stralen, wier golflengte 1 tot 20 μ bedraagt, en had hoofdzakelijk ten doel, eenig verband op te sporen tusschen de kenmerkende trillingsperioden en de chemische samenstelling der moleculen.

De vloeistoffen bevonden zich in een absorptievat, vervaardigd uit één stuk klipzout en zóó ingericht, dat men door het inbrengen van zoutplaten lagen van verschillende dikte aan de proef kon onderwerpen. Voor het onderzoek van water diende een vat met wanden en inzetstukken van vloeispaat, welk materiaal voor stralen van 0 tot 11 μ beschouwd kan worden als volkomen diathermaan.

Van de volgende lichamen werd het absorptiespectrum bepaald:

*) De gebruikte toestellen waren, behoudens kleine wijzigingen, die welke men beschreven vindt in: W. H. JULIUS, „Die Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase". Leipzig 1890, LEONHARD SIMION.

†) KNUT ÅNGSTRÖM heeft in een onlangs verschenen verhandeling over de warmteabsorptie van eenige gassen en dampen (*Öfersigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* 1890 No. 7, Stockholm) aangetoond, dat aether, benzol en zwavelkoolstof in vloeibaren toestand absorptiespectra bezitten, welke met die der bijbehoorende dampen in hoofdzaak overeenstemmen, hoewel sommige maxima een weinig verschoven zijn.

water,
verzadigde oplossing van keukenzout in water,
methylalcohol,
aethylalcohol,
propylalcohol,
butylalcohol (normaal),
» (iso-),
amylalcohol,
aethylmercaptaan,
aethylaether,
hexaan (normaal dipropyl),
benzol,

zwavelkoolstof,
verzadigde oplossing van zwavel in zwavelkoolstof,
tetrachloorkoolstof,
chloroform,
tetrachloorsilicium,
siliciumchloroform,
bromoform,
chloorzwavel (verzadigd met zwavel),
phosphortrichloride.
—
koolstof (diamant).

Bij al deze stoffen vertoont het warmtespectrum twee of meer duidelijke absorptiebanden, in tegenstelling met de vroeger onderzochte emissiespectra van gloeiende gassen, waar steeds een enkel maximum sterk op den voorgrond trad.

Verder bleek, dat de gedaante der absorptiekrommen (welke ontstaan als men de deviatie als abscis, de in procenten uitgedrukte absorptie als ordinaat kiest) niet alleen afhangt van den aard der elementen, waaruit de verbinding is opgebouwd, maar evenzeer van de wijze, waarop de atomen in het molecuul gerangschikt zijn, van de structuur.

Zoo vertoonen de eerste vijf alcoholen der vetzuurreeks. die uit dezelfde elementen zijn opgebouwd en bovendien groote overeenkomst in constitutie bezitten, absorptiekrommen wier gedaante slechts weinig uiteenloopt. Bij alle vindt men een zeer sterk maximum, waarvan de golflengte omstreeks 3,47 μ bedraagt, terwijl (door een laag van 0,2 mM. dikte) de golven $> 9\ \mu$ nagenoeg geheel worden teruggehouden. Duidelijk merkbare verschillen bestaan echter bij deze alcoholen in de plaats en de intensiteit van zwakkere absorptiebanden, die tusschen de genoemde gelegen zijn.

Het spectrum van aethylmercaptaan wijkt van dat van aethylalcohol aanmerkelijk af, hoewel in sommige opzichten

overeenkomst behouden blijft. Het invoeren van een ander element, bij behoud van gelijke structuur, heeft dus hier grooteren invloed op den aard der moleculaire bewegingen dan bijv. de overgang van $C_2 H_5 . OH$ op $C_5 H_{11} . OH$, hoewel daarbij het aantal atomen in het molecuul verdubbelt.

Maar ook ten gevolge van verschil in structuur bij verbindingen, wier empirische formulen niet of slechts weinig van elkaar verschillen, kan de absorptiekromme een geheel ander aanzien verkrijgen. Dit blijkt bij de beschouwing der spectra van butylalcohol en aethylaether, van hexaan en benzol.

Intusschen schijnt een bepaald maximum ($\lambda = 3,47 \mu$) in meer of minder sterke mate bij alle lichamen, die $C_x H_y$ bevatten, voor te komen en bij alle andere te ontbreken. Bij benzol, chloroform en bromoform is het echter een weinig verschoven.

De sterke absorptieband van diamant, gelegen bij $\lambda = 5,1 \mu$, was in het spectrum van geen der onderzochte koolstofverbindingen terug te vinden.

Uit de in vorm zeer uiteenloopende absorptiekrommen der overige vloeistoffen (die alle eenige scherpgeteekende maxima bezitten, waarvan enkele aan verschillende spectra gemeen zijn) kunnen nog niet met eenige zekerheid algemeene gevolgtrekkingen worden afgeleid. Omtrent de bijzonderheden moeten wij dus verwijzen naar het uitvoerig verslag der waarnemingen, dat binnen korten tijd aan de Akademie zal worden aangeboden.

RAPPORT

OVER HET

AAN DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN TE GEVEN ANTWOORD OP Z. EXCs. BRIEF VAN 15 AUGUSTUS 1890,

WAARIN GEHANDELD WORDT

OVER HET KIEZEN VAN EEN EERSTEN MERIDIAAN.



De Koninklijke Academie van Wetenschappen te Bologna heeft in overweging gegeven om als aanvangpunt voor de bepaling van de lengten, in overeenstemming met het begin der tijdrekening, bij alle beschaafde volken in gebruik, aan te nemen den meridiaan van Jerusalem.

Het gronddenkbeeld dier Academie wordt in het »Exposé des raisons appuyant la transaction proposée" aldus weêrgegeven:

»Partant, l'Académie des Sciences de Bologne suggère, »de fait, *qu'on n'innove rien de ce qui se pratique aujour-»d'hui, mais qu'on se borne à ajouter, sur les dépêches télé-»graphiques* à côté de l'heure locale de la station, soit du »départ, soit de l'arrivée, l'heure du méridien de Jérusalem."

In de vergadering van 24 Februari 1883 had de Commissie, door de Academie benoemd, de eer te adviseeren, de lengten op de zeekaarten en de tijdsopgaven in de zeevaartkundige almanakken naar eenzelfden meridiaan te regelen.

De conferentie te Washington heeft zich in het algemeen voor de invoering van den meridiaan van Greenwich als

eersten meridiaan verklaard en de Nederlandsche Gemachtigde ter conferentie heeft zich met dit votum vereenigd. De Fransche afgevaardigden hadden daartegen bezwaar en onthielden zich met dien van Brazilië van stemming, terwijl alleen de afgevaardigde van San Domingo tegenstemde. Het voorstel, dat nu van de Academie van Bologna uitgaat, heeft blijkbaar in hoofdzaak ten doel, den twistappel weg te nemen, doch door den omvang, waartoe dit voorstel beperkt is, schijnt het zeer twijfelachtig of dit doel wel zal worden bereikt.

Aan de wenschelijkheid van het aannemen van eenzelfden meridiaan wordt niet meer getwijfeld, en het oogenblik zal eenmaal aanbreken dat daartoe ook voor andere aangelegenheden dan die der telegraphie wordt overgegaan. Indien echter het voorstel van Bologna werd aangenomen, zou daarvan geen ander gevolg te wachten zijn, dan dat men, wanneer dat oogenblik dáár zal zijn, het aantal meridianen, waartusschen gekozen moet worden, met één vermeerderd, en dus de zaak, wel verre van haar te vereenvoudigen, nog ingewikkelder heeft gemaakt.

Op dien grond zoude de Commissie der Afdeeling in overweging willen geven, den minister voor te stellen, aan de Italiaansche Regeering te antwoorden, dat het min verkieslijk schijnt om, hangende de quaestie van de keuze van den eersten meridiaan, aan de twee, waarvan thans sprake is, nog een derden toe te voegen, en daardoor de kans op spoedige overeenstemming nog te verminderen.

MICHAËLIS.
CH. M. SCHOLS.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

RAPPORT

OVER HET

AAN DEN MINISTER VAN BINNENLANDSCHE ZAKEN TE GEVEN ANTWOORD OP Z. EXCs. BRIEVEN VAN 31 OCTOBER EN 18 NOVEMBER 1890,

WAARIN GEHANDELD WORDT

OVER HET INVOEREN VAN EENE NIEUWE TIJDREGELING VOOR BEPAALDE GEDEELTEN VAN EUROPA EN OVER DE INVOERING VAN EENHEID VAN TIJD BIJ DE SPOORWEG-ADMINISTRATIËN.

Bij brieven van den Minister van Binnenlandsche Zaken van 31 October en 18 November jl., N°s. 2334 en 2478, afd. Kunsten en Wetenschappen, werd de Academie uitgenoodigd haar gevoelen mede te deelen betreffende voorstellen tot invoering eener nieuwe tijdregeling voor bepaalde gedeelten van Europa en tot invoering van eenheid van tijd bij de spoorwegadministratiën.

Aangezien beide vragen op geheel gelijksoortige onderwerpen betrekking hebben, kwam het ons wenschelijk voor die gelijktijdig te behandelen, en hebben wij de eer daarop te antwoorden.

Het is wenschelijk dat in een Rijk, vooral van zoo geringen omvang als Nederland, niet naar meer dan één spoorwegtijd worde gerekend, en uit Art. 3 van het Algemeene Reglement voor den dienst op de spoorwegen blijkt, dat ook de Regeering daarvan overtuigd is.

Ontegenzeggelijk behooren de uurwerken voor den telegraaf hetzelfde uur aan te wijzen als die der spoorwegen, en hoogst wenschelijk is het, dat die der gemeenten, en dus ook die van het dagelijksch leven, naar denzelfden tijd geregeld worden.

Welke de meridiaan is, waarnaar het uur bepaald wordt, is, binnen zekere grenzen, tamelijk onverschillig. Regelde men zich tot nu toe volgens den meridiaan van Amsterdam, niets belet om zich in het vervolg te regelen naar dien van Greenwich, daar het verschil in tijd zich tot ongeveer 20 minuten bepaalt; maar er kan geene andere reden zijn om tot die wijziging over te gaan dan deze, dat men daardoor gelijke tijdsaanwijzing verkrijgt als de naburige volken. Wanneer dus België en Duitschland hun spoorwegtijd naar den meridiaan van Greenwich regelen, brengt het belang van Nederland mede, dit eveneens te doen; maar zoo lang die Staten, en vooral Duitschland, niet tot dien maatregel overgaan, bestaat daartoe ook hier geen grond.

De Afdeeling geeft mitsdien in overweging, den Minister te adviseeren om het daarheen te leiden:

1°. dat aan den Belgischen gezant geantwoord worde, dat de Nederlandsche Regeering voornemens is machtiging te geven tot het invoeren van de nieuwe tijdsregeling, bijaldien hetzelfde door België en Duitschland gedaan wordt;

2°. dat de Maatschappij tot exploitatie van Staatsspoorwegen worde gemachtigd om toe te treden tot de regeling, voorgesteld door het Verein der Deutschen Eisenbahnverwaltungen; en

3°. dat, bij eene eventueele invoering van de nieuwe regeling, deze ook worde toegepast bij de telegrafie en bij de uurwerken der verschillende gemeenten.

MICHAËLIS.
CH. M. SCHOLS.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

VERSLAG

AAN DE

NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN,

OMTRENT DE

VERHANDELING VAN DEN INGENIEUR VAN DE WATERSTAAT

J. C. RAMAER.

DE OMVANG VAN HET HAARLEMMERMEER EN DE MEREN WAARUIT HET ONTSTAAN IS.

Deze verhandeling bevat eene uitvoerige kritische studie over de geschiedenis van het Haarlemmermeer.

Bij de beoordeeling daarvan moet de opmerking vooraf gaan, dat omtrent: den tijd waarin de drie oorspronkelijke meren (Spiering—Haarlemmer – Leidsche) vereenigd zijn — de uitgestrektheid van het verzwolgen land — de oorzaken van het landverlies — het aantal der verdwenen dorpen enz. enz. — tot nog toe veel onzekers was overgebleven.

De schrijver heeft door zijn onderzoek bewezen, dat vele dwalingen en verkeerde voorstellingen hetzij door de overlevering zijn overgebracht, hetzij door vroegere kaartenteekenaars en schrijvers uit gebrekkige gegevens waren afgeleid.

Hij heeft daarvoor in de eerste plaats al de voorhanden kaarten opgespoord en aan een nauwkeurig kritisch onderzoek onderworpen, ten opzichte van derzelver oorspronkelijkheid, ouderdom en vertrouwbaarheid. (H. III—VI.) Voorts heeft hij alle historische verklaringen en getuigenissen verzameld en onderzocht, die omtrent den toestand van de

meren en van hunne oevers in de archieven van het Rijk, Rhijnland, Delfland, Haarlem, Leiden, Amsterdam en de kaartenverzameling Bodel Nijenhuis te vinden waren (H. VII—VIII).

Daarop laat hij eene algemeene beschouwing volgen over de oorzaken, die landverlies aan de oevers der veen-meren kunnen voortbrengen of wel verhoeden, voor zoover die uit de waarnemingen op verschillende plaatsen in het Hollandsche veengebied kunnen afgeleid worden (H. IX).

Die beschouwingen past hij kritisch toe op de geschiedenis van het Haarlemmermeer, zooals hij die uit al de door hem verzamelde gegevens heeft samengesteld, wat betreft: de afgesleten of weggeslagen stukken, de oevers, de vereeniging der drie meren, en de uitbreiding van het gansche meer (H. X--XV). Ten slotte stelt hij een onderzoek in naar den toestand van Rhijnland in de middeleeuwen, en naar de oorzaken waardoor de Leidsche Rhijn in haar tegenwoordig bed is gekomen, gedurende het tijdvak dat door den Romeinschen tijd en de verstopping des Rhijnmonds begrensd wordt (H. XVI—XVII).

Uit de grafelijke rekeningen, uit de Informaciën en Enquesten van 1494 en 1514, uit de oude lijsten (Blaffers) van de goederen van Utrecht's bisdom, Egmond's klooster enz. enz. betreffende de ambachten en hunne grenzen in de middeleeuwen en tot in de 17e eeuw, heeft hij het vraagstuk trachten op te lossen, hoe het met de bewoning gesteld is geweest, zoowel van de omstreken der drie meren, als met die van het later verdwenen land.

Al deze gegevens, historische en physische heeft de schrijver met elkander in verband gebracht, en daaruit uitvoerig betoogd:

1e. dat de oude overlevering zeer overdreven is;

2e. dat de oeverlijnen, zooals die op de kaart van Bolstra in het verloop der zestiende eeuw zijn opgegeven, geheel foutief zijn;

3e. dat de geheele vereeniging der meren allengs heeft plaats gehad, en vooral verhaast is na de doorbraken der tusschengelegen strooken lands, welke op 1472 en 1509 moeten gesteld worden;

4e. dat geene andere dorpen verdwenen zijn dan Rietwijk en Nieuwerkerk na 1500;

5e. dat het verdwenen land zeer schaarsch bewoond is geweest, en behalve tot wei- en hooiland vooral tot verveening gediend heeft, welk verveenen het geheele verlies bevorderd en verhaast heeft. Op eene kaart heeft de schrijver een tal van oeverlijnen uit het tijdperk van 1250—1850 geconstrueerd, waaruit tevens de grootte van het verdwenen land, de omvang der drie meren en later van het vereenigde meer blijkt, en in bunders berekend wordt.

Een tal van kaarten is ter toelichting bijgevoegd.

Het lijdt geen twijfel, dat deze uitvoerige kritische studie, omtrent de veranderingen die een deel van Hollands bodem (het eigenlijke Holland) heeft ondergaan in historischen tijd, van groot belang is, en ook voor de geschiedenis der vervormingen van de gansche laagveen-vorming in Nederland eene algemeene beteekenis heeft. Bovendien mag het onze sympathie en toejuiching verdienen, dat na den arbeid van Acker Stratingh, Venema, Westerhoff, Mr. H. J. Andreae, Mr. G. de Vries, en anderen, de geschiedenis van den bodem onzes lands opnieuw ter hand genomen is door een onzer Waterstaats-ingenieurs, die aan het hydrographisch onderzoek een historischen arbeid heeft verbonden, en zich daarvoor eene uitvoerige en tijdroovende bronnenstudie getroost.

Over de wijze, waarop de schrijver dezen arbeid heeft uitgevoerd, mag ons oordeel gunstig luiden.

Het komt ons voor, dat de kritiek der verschillende oude kaarten zeer goed is, en dat het den schrijver is gelukt de oorzaken en den gang van het landverlies in bijzonderheden op te sporen. Wat het historische gedeelte betreft, zoo hebben wij gemeend ons niet op ons eigen oordeel te mogen verlaten, en daarom het advies te moeten inwinnen van ons medelid der letterkundige Afdeeling Prof. Fruin, die ons dit, nevens eenige belangrijke historische aanwijzingen, met de meeste welwillendheid heeft geschonken. Zijn oordeel is gunstig. Hij betuigt zijne instemming met des schrijvers kritiek van de kaarten, en

oordeelt de historische bescheiden en getuigenissen belangrijk en goedgekozen. Hij acht de geschiedenis van het Meer door dezen arbeid thans voor het eerst in de bijzonderheden vastgesteld, al blijven er naar zijn inzien enkele twijfelachtige punten over. Zoo bijv. schijnt schrijvers meening, dat voor het afdammen van het Spaarne de afslag van het meer gering zoude geweest zijn, in strijd met het aanleggen van den Wendeldijk en met het aanleggen van dien dijk vóór 1297. Zoo wordt ook niet verklaard uit welke oorzaak tijdens Karel den Stoute de strook lands tusschen de Haarl. en Leidsche Meren zoo snel weggeslagen werd, terwijl de oorzaak van het verdwijnen van het land tusschen Spiering- en Haarlemmermeer bevredigend verklaard wordt. Ook zou het wenschelijk zijn te beproeven om den juisten tijd van het verdwijnen van het land tusschen Haarl. en Leidsche meer nog stelliger te bepalen uit de Grafelijkheidsrekeningen. Tot 1345 vinden wij in de gedrukte stukken (die niet verder gaan) vermeld de beden van Burggravenveen en Vennep, en de tienden van een blok daar ter plaatse. Waarschijnlijk zal dit in de ongedrukte stukken op het Rijksarchief zoo voortgaan, totdat deze landen ophouden te bestaan.

Uit de gedrukte rekeningen heeft de schrijver met nauwkeurigheid geput wat daarin voor zijn onderwerp voorkomt, evenwel niet alles. Tot bevestiging van zijn betoog kan hij nog gebruik maken van de reiswegen daarin vermeld. Vooreerst: hoe weinig gebaand en hoe weinig bereden de weg tusschen Amsterdam en Haarlem over de later weggeslagen reep gronds, den Heerweg, omstreeks 1345 was, blijkt uit dezen post II bldz. 406:

»Item (N. N.) dat hi reit met 's Graven gezin van
»Haarlem tot Amsterdam, *om den wech te wisen*".

De gewone weg van Amsterdam naar 's Gravenhage leidt dan ook over het meer naar Heemstede en vandaar te land. Op deze wijze wordt een misdadiger vervoerd, zooals blijkt uit het volgende (I. 290):

»Eerst van 1 scepe, daar men voerde van Amsterdam
»bi Heemstede . . . . . Item van 1 waghen, daar
»men mede vervoerde van Heemstede in die Hage".

Men zou geneigd zijn hieruit af te leiden, dat de waterweg van Amsterdam naar Leiden niet gebruikt werd wegens de ondiepte van de geul of de geulen door de Vennep. Doch die gissing wordt weersproken door I. 336, waar het vervoeren van bier te scheep wordt vermeld van Amsterdam naar Leiden. Ook reeds veel vroeger werd die waterweg, van Haarlem uit, gebruikt. Tijdens den oorlog tusschen WILLEM I en LODEWIJK VAN LOON, omstreeks 1200, komen de Kennemers te scheep naar Leiden, blijkbaar van Haarlem over de meren en door de geulen.

De beschouwingen over de plaatsen in de oude goederenlijsten van Utrecht en Egmond laten nog veel twijfelachtigs over. Het ware gewenscht dat de schrijver dit twijfelachtige nog beter liet uitkomen.

De schrijver geeft op bldz. 172 sqq. eenige algemeene beschouwingen over de veenvorming, aan STARING onleend, en bovendien eenige hypothesen over de vorming van de verschillende oorspronkelijke veenlagen en plaatselijk tusschenliggende kleilagen, in het Haarlemmermeer en het IJ. Wij zouden hem in bedenking willen geven om dit gedeelte te besnoeien. De voorgestelde hypothesen berusten naar ons inzien op te weinig onderzoek en te geringe gegevens. Ook heeft de schrijver meer gegeven dan zijn titel belooft, bijv. over den loop van den Rhijn door Utrecht en Holland. Naar onze meening zoude zijn arbeid winnen, indien hij dit gedeelte grootendeels terughield, om het wellicht later tot een zelfstandig stuk te verwerken.

De volgorde der hoofdstukken is niet overal gelukkig gekozen. Met name wijzen wij er op dat het betoog in hoofdstuk XXII over de kaarten van BRUIJNS en BEELDSNIJDER eene betere plaatsing erlangt, als het aan hoofdstuk VII voorafgaat.

Wegens het groot aantal biographische bijzonderheden, omtrent landmeters en kaarten-snijders, zouden wij schrijver voorstellen daarop een alphabetischen klapper te maken. Ook eene chronologische lijst der behandelde kaarten ware gewenscht.

Op grond van al het aangevoerde hebben wij de eer aan de Akademie voor te stellen deze verhandeling in hare werken op te nemen.

Mochten de kosten, die aan het graveeren en drukken der bijgevoegde kaarten verbonden zijn, een bezwaar geacht worden, zoo maken wij U opmerkzaam, dat er tegenwoordig methoden bestaan, om zulke kaarten — bij welke het toch meer om de duidelijke omtrekken dan om een hoogen graad van nauwkeurigheid en om fraaie bewerking te doen is — op eene weinig kostbare wijze te vermenigvuldigen.

J. M. VAN BEMMELEN.
D. BIERENS DE HAAN.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING VAN **Dr. F. DE BOER:**

TOEPASSING VAN DE METHODE DARBOUX

OP DE DIFFERENTIAALVERGELIJKING $s = f(r, t)$.

(Uitgebracht in de Vergadering van 25 November 1890.)

In deze verhandeling, waarvan ons het verslag is opgedragen in Uwe vergadering van 25 October jl., begint schrijver met de beide vergelijkingen op te schrijven, waarvan volgens de methode van S. DARBOUX de gemeenschappelijke integralen moeten worden opgespoord, en waarvan de tweede, overeenkomende met de *karakteristieke* vergelijking, eene tweedemachts-vergelijking in eene grootheid m is, die men ook in de eerste vergelijking van het stelsel terugvindt, met dien verstande echter, dat in ieder dezer beide vergelijkingen een andere wortel m_1 of m_2 der *karakteristieke* voorkomt. Hij maakt nu een dubbel hulpstelsel van differentiaalvergelijkingen op. Geven deze aanleiding tot twee stel van twee integralen, dus tot twee vormen $w_1 = \varphi(w_2)$, en bevatten deze de r, s, t, dan kunnen uit deze beiden en de oorspronkelijke vergelijking, die r, s, t worden opgelost, en leveren alzoo de drie betrekkingen

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + rdy, \quad dr = pdx + qdy,$$

een integreerbaar stelsel van gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen.

Vooreerst beproeft schrijver bij deze integratie, zulke herleidingen toe te passen, dat de voorwaarden der oplos-

baarheid als het ware op het oog te ontdekken zijn. Eerst vindt hij twee functiën, die of geen r of geen t bevatten, en deze opvatting brengt hem tot zijn doel. Vervolgens stelt hij den teller van zoodanige functiën gelijk aan nul, zoo dat aan de voorwaarde voldaan wordt. Ten derde neemt hij aan, dat van een zekere differentiaalvergelijking $dr = m_1^2\, dt$ de m_2 een integraal is, en omgekeerd bij verwisseling der beide m; en eindelijk stelt hij, dat beide m integralen zijn van de pas genoemde differentiaalvergelijking; hierbij vallen dan drie verschillende gevallen te onderscheiden: dat de beide m of onderling gelijk, of beide standvastig zijn, of dat één van beiden nul is.

Bij dit onderzoek zijn er meer of mindere herleidingen noodig, om alles onder geschikten vorm te brengen.

Thans gaat schrijver over om door middel van het kenmerk van JACOBI alle mogelijke oplossingen rechtstreeks op te sporen, en komt alzoo tot een derde vergelijking bij de twee vorigen.

Voor het geval $m_1 = m_2$, waarmede de differentiaalbetrekking $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt} = 0$ zamenhangt, vindt hij zes oplossingen, waarvan er drie reeds vroeger gevonden werden. Voor $m_1 \gtrless m_2$, maar de andere differentiaalbetrekking gelijk aan nul, komt er weder eene nieuwe voorwaarde bij, en dan kunnen of m_1 en m_2 standvastig zijn, hetgeen weder tot twee der reeds behandelde oplossingen aanleiding geeft, of een zekere differentiaalvorm wordt nul, hetgeen weder tot twee reeds bekende oplossingen voert.

Is echter $\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt} \gtrless 0$, dan voert schrijver behalve eenige verkortingen de symbolische bewerking Δ in. Is nu $\Delta m_1 = 0$, dan komt hij, zooals hier natuurlijk volgt, tot twee der vorige uitkomsten terug. En nu zijn ook alle die oplossingen van het eerste gedeelte teruggevonden. Er blijft nu slechts over de voorwaarde $\Delta K_1 - \Delta m_1 = 0$ te onderzoeken, en hierbij moet worden onderscheiden, of $K_1 - m_1$ standvastig is of niet.

Bij het eerste geval komt schrijver tot een nieuwe gedeeltelijke differentiaalvergelijking, met eeu nieuwe karakteristieke vergelijking en door het kenmerk van JACOBI tot eene derde vergelijking. Langs tal van herleidingen verkrijgt men eindelijk een integraal, die door substitutie ook uit het vroeger gevondene zou kunnen worden afgeleid.

Denzelfden weg volgt schrijver bij het tweede geval, en uit de uitkomst, gevonden bij een paar bijzondere gevallen, leidt schrijver een hypothetischen vorm af voor het meer algemeene geval. Deze hypothese blijkt dadelijk aan één der vergelijkingen te voldoen. Bij de verdere herleiding maakt schrijver onderscheid, naarmate een paar verkorte uitdrukkingen M_1 en M_2 gelijk zijn, of niet.

De overeenkomstige behandeling van het tweede geval, waarbij de $K_1—m_1$ niet meer standvastig wordt ondersteld, is aan schrijver niet gelukt, maar toch brengt hij het daarbij een eind weegs.

Dewijl schrijver de oorspronkelijke vergelijking stelde in den vorm $s = f(r, t)$, was bij de behandeling het geval uitgesloten, dat de differentiaalvergelijking geen s bevat. In dit gebrek komt schrijver in zijn laatste deel tegemoet. En daarna eindigt hij met eene vergelijking van deze methode met die van LEGENDRE.

Eene verdeeling in paragrafen zoude het overzicht veel gemakkelijker maken.

Uit dit verslag moge genoegzaam zijn op te maken, dat de schrijver blijken gegeven heeft met zijn onderwerp vertrouwd te zijn, en genoegzaam analytische hulpmiddelen tot zijn dienst te hebben. Wij stellen dan ook gerustelijk aan Uwe vergadering voor, deze verhandeling in Uwe *Verslagen en Mededeelingen* op te nemen.

Leiden en *Utrecht*,
November 1890.

D. BIERENS DE HAAN.
C. H. C. GRINWIS.

TOEPASSING

VAN DE

METHODE DARBOUX OP DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKING $s = f(r,t)$

DOOR

Dr. F. DE BOER



Onder de opgaven van het Wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" komt onder N°. 200, Deel IV, de volgende vraag voor:

„Een weg te vinden ter integratie van de vergelijking

$$s = f(r, t), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waar r, s en t de gewone beteekenis hebben:

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}."$$

Dit vraagstuk gaf mij aanleiding te onderzoeken, wat de in het opschrift genoemde methode voor de integratie van de vergelijking (1) kan opleveren. De volgende bladzijden bevatten het resultaat van dat onderzoek. De publicatie van dat resultaat komt mij gewenscht voor, daar het naar mijne overtuiging geschikt is, om de voortreffelijkheid te doen uitkomen van deze methode, die mij toeschijnt nog te weinig bekend te zijn.

Onder de methode Darboux voor het integreeren eener

partieele differentiaalvergelijking van de tweede orde verstaan wij de methode, die bestaat in het opsporen der gemeenschappelijke integralen van het stelsel vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{dw}{dx}\right)+m_2\left(\frac{dw}{dy}\right)=\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\frac{df}{dr}}\frac{dw}{dr}+m_2\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\frac{df}{dt}}\frac{dw}{dt},\,.\,.\\ \\ \frac{dw}{dr}m_1^2-\frac{dw}{ds}m_1+\frac{dw}{dt}=0.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\end{array}\right\}(2)$$

waarin

$$f=f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$$

de te integreeren differentiaalvergelijking voorstelt, en $\left(\frac{df}{dx}\right)$ en $\left(\frac{df}{dy}\right)$ de afgeleiden, genomen in dien zin, dat z, p en q als functien van x en y worden beschouwd maar r, s en t niet, zoodat bijv.

$$\left(\frac{df}{dx}\right)=\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}+r\frac{df}{dp}+s\frac{df}{dy},$$

terwijl m_1 en m_2 de wortels zijn van de zoogenaamde karakteristieke vergelijking

$$\frac{df}{dr}m^2-\frac{df}{ds}m+\frac{df}{dt}=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(3)$$

Iedere integraal van het stelsel (2) is tevens eene integraal van de gegeven differentiaalvergelijking, als men het begrip integraal in zooverre uitbreidt, dat de integralen van (1) ook afgeleiden van de tweede (of zelfs van hoogere) orde mogen bevatten, terwijl, als $w_1=c_1$, $w_2=c_2$ integralen van (2) zijn, dit ook het geval zal zijn met $w_1=\varphi(w_2)$

Door verwisseling van m_1 met m_2 ontstaat een tweede stelsel analoog met (2), dat ook ter opsporing van integralen van de gegeven differentiaalvergelijking kan dienen.

Ter integratie van (2) heeft men het hulpstelsel

$$\frac{dx}{\frac{df}{dr}}=\frac{dr+m_1dx}{\frac{df}{ds}}=\frac{m_1dy}{\frac{df}{dt}}=\frac{dz}{\frac{df}{dr}(p+m_2q)}=\frac{dp}{\frac{df}{dr}(r+m_2s)}=$$

$$=\frac{dq}{\frac{df}{dr}(s+m_2t)}=\frac{dr+m_1ds}{\left(\frac{df}{dx}\right)}=\frac{ds+m_1dt}{\left(\frac{df}{dy}\right)} \quad \ldots (4)$$

Heeft dit hulpstelsel twee integralen $w_1=c_1$ en $w_2=c_2$, dan is eene eerste integraal van de gegeven vergelijking, in den zin waarin dat begrip hier wordt opgevat, $w_1=\varphi(w_2)$.

Doet zich bij het tweede hulpstelsel hetzelfde geval voor, dan verschaft dit eene tweede integraal, bijv.

$$w_1'=\varphi\,(w_2').$$

Bevatten deze vergelijkingen r, s en t, dan kunnen die grootheden hieruit en uit de gegeven vergelijking worden opgelost, en de gevonden waarden zullen, gesubstitueerd in

$$dp=rdx+sdy, \quad dy=sdx+tdy, \quad dz=pdx+qdy$$

deze drie vergelijkingen tot een integreerbaar stelsel van gelijktijdige differentiaalvergelijkingen maken.

Met deze korte beschrijving der methode meenen wij hier te kunnen volstaan. Den lezer, wien zij niet voldoende mocht bekend zijn, verwijzen wij naar de verhandeling van Darboux Annales de l'Ecole superieur 1870, die van Hamburger, Journal van Kronecker Bd. 93 en in het bijzonder naar Speckman „Integratie van de partieele differentiaalvergelijkingen van hoogere orde" Groningen 1889, waar men pag 75 sqq. de methode uiteengezet vindt.

In het geval van verg. (1) gaat (2) over in

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)+m_2\left(\frac{dw}{dy}\right)=0, \quad \frac{dw}{dr}m_1^2-\frac{dw}{ds}m_1+\frac{dw}{dt}=0, \quad (5)$$

en, als men $\frac{df}{dr}=R$, $\frac{df}{dt}=T$ stelt, (4) in

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy + m_1 dx}{-1} = \frac{m_1 dy}{T} = \frac{dz}{R(p + m_2 q)} = \frac{dp}{R(r + m_2 s)} =$$
$$= \frac{dy}{R(s + m_2 t)} = \frac{dr + m_1 ds}{0} = \frac{ds + m_1 dt}{0}, \quad \ldots (6)$$

welk stelsel ook aldus kan worden geschreven

$$dz = pdx + q\,dy, \qquad dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy,$$
$$dr + m_1 ds = 0, \qquad ds + m_1 dt = 0, \qquad dy - m_2 dx = 0,$$
$$R m_1^2 + m_1 + T = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Stelt men

$$u = p - rx - sy, \quad v = q - sx - ty,$$

dan kan eene der vergelijkingen (7) worden vervangen door

$$du + m_1 dv = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Men heeft dan namelijk

$$du = -xdr - yds, \quad dv = -xds - ydt,$$

en dus

$$du + m_1 dv = -x(dr + m_1 ds) - y(ds + m_1 dt) = 0.$$

Hier, waar m_1 en m_2 uitsluitend van r en t afhangen, heeft men steeds eene integreerbare vergelijking, namelijk

$$dr = m_1^2 dt, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

die men vindt door ds te elimineeren. Bovendien is, zooals altijd, eene integraal van (7)

$$f = c,$$

maar deze kan natuurlijk bij de integratie van (1) geen dienst doen. Afgezien van deze laatste heeft men nu in de eerste plaats nog eene tweede integraal als $m_1 = c$ de integraal van (10) is. Men heeft dan

$$\frac{dm_1}{dt} + m_1^2 \frac{dm_1}{dr} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Zal bij het tweede hulpstelsel zich hetzelfde geval voordoen, dan moet ook

$$\frac{dm_2}{dt} + m_2^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

zijn.

Door optelling van deze vergelijkingen heeft men

$$\frac{d\,(m_1 + m_2)}{dt} + {}^1/_2\, \frac{d(m_1^3 + m_2^3)}{dr} = 0.$$

Voegt men hierin de waarden

$$(m_1 + m_2) = -\frac{1}{R}, \quad m_1 m_2 = \frac{T}{R} \; . \; . \; . \; . \; , (13)$$

in, dan vindt men na herleiding

$$2\,R^2 \frac{dR}{dt} + (1 - 2\,RT)\frac{dR}{dr} = 0.$$

Telt men nog (11) en (12) bij elkaar op, na de eerste door m_1^2 en de tweede door m_2^2 gedeeld te hebben, dan komt er

$$-\frac{dt}{d}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + \frac{d}{dr}(m_1 + m_2) = 0,$$

of

$$R^2 \frac{dT}{dt} = T^2 \frac{dR}{dr}.$$

Deze beide vergelijkingen laten zich samenvatten in

$$\frac{\frac{dT}{dt}}{T^2} = \frac{\frac{dR}{dr}}{R^2} = \frac{2\,\frac{dT}{dr}}{2\,RT - 1} = \frac{2\,\frac{dR}{dt}}{2\,RT - 1} \, , \; . \; . \; . \; (14)$$

waaruit zich laat afleiden

$$\frac{d\left(\frac{1-4\,RT}{R^2}\right)}{dr}=\frac{d\left(\frac{1-4\,RT}{T^2}\right)}{dt}=0,\ \ldots\ (15)$$

zoodat $\frac{1-4\,RT}{R^2}$ eene functie van t alleen, en $\frac{1-4\,RT}{T^2}$ eens functie van r alleen is; de eerste stellen wij door τ^4, de tweede deer ϱ^4 voor. Door oplossing vindt men dan

$$R=\frac{\varrho}{\tau\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}},\quad T=\frac{\tau}{\varrho\sqrt{(4+\varrho^2\tau^2)}}.$$

Verder moet nu $\frac{dR}{dt}=\frac{dT}{dr}$ zijn, waardoor men vindt

$$\frac{\frac{d\varrho}{dr}}{\varrho^3}=\frac{\frac{d\tau}{dt}}{\tau^3}.$$

Beide leden moeten natuurlijk gelijk zijn aan eene zelfde constante, zoodat $\frac{d}{dr}\frac{1}{\varrho^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{\tau^2}=c$ of

$$\varrho=\frac{1}{\sqrt{(cr+c_1)}},\quad \tau=\frac{1}{\sqrt{(ct+c_2)}}.$$

Hieruit volgt

$$R=\frac{ct+c_2}{\sqrt{(4\,c_1c_2+1+4\,cc_2r+4\,cc_1t+4\,c^2ri)}},$$

derhalve

$$s=f(r,t)=\int\frac{(ct+c_2)\,dr}{\sqrt{(4\,c_1c_2+1+4\,cc_2r+4\,cc_1t+4\,c^2rt)}}.$$

Voert men nieuwe constanten in door te stellen

$$\frac{c_1c_2+{}^1/_4}{c^2}=a,\quad \frac{c_2}{c}=b,\quad \frac{c_1}{c}=e,$$

en noemt dan $-{}^1/_2 c$ de aan s toe te voegen constante, dan heeft men

$$s - {}^1/_2 c = \sqrt{(a + br + et + rt)},$$

of

$$a + br + es + ct - (s^2 - rt) = {}^1/_4 c^2.$$

De vergelijking van Ampère met constante coefficienten is dus de eenige, waarbij zich het beschouwde geval voordoet.

Het eene hulpstelsel heeft nu de integralen

$$m_1 = C_1, \quad u + m_1 v = C_1',$$

het andere

$$m_2 = C_3, \quad u + m_2 v = C_2'.$$

Eerste integralen van de gegeven vergelijking zijn dus

$$u + m_1 v = \varphi(m_1), \quad u + m_2 v = \psi(m_2).$$

Hieruit volgt

$$u = \frac{m_1\psi - m_2\varphi}{m_1 - m_2}, \quad v = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}.$$

Daar verder

$$- du = xdr + yds = (x + Ry)\,dr + Tydt,$$
$$- dv = xds + ydt = xRdr + (xT + y)\,dt$$

is, heeft men

$$x = -\frac{\frac{dv}{dr}}{R}, \quad y = -\frac{\frac{du}{dt}}{T}.$$

Daar m_1 en m_2 functien van r en t zijn, heeft men hiermede x en y in r en t uitgedrukt. Doelmatiger is het echter omgekeerd r en t in m_1 en m_2 uit te drukken door middel van de vergelijkingen (13).

Daar blijkens de eerste vergelijking (15) $m_1 - m_2$ eene functie van t is, is t ook omgekeerd eene functie van $m_1 - m_2$, zoodat

$$\frac{dt}{dm_1} + \frac{dt}{dm_2} = 0 .$$

Dit in aanmerking nemende, vindt men uit

$$\frac{dv}{dm_1} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dm_1} + \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dm_1}, \quad \frac{dv}{dm_2} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dm_2} + \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dm_2}$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\dfrac{dv}{dm_1} + \dfrac{dv}{dm_2}}{\dfrac{dr}{dm_1} + \dfrac{dr}{dm_2}} .$$

Op dergelijke wijze vindt men

$$\frac{du}{dt} = \frac{m_1^2 \dfrac{du}{dm_1} + m_2^2 \dfrac{du}{dm_2}}{(m_1^2 - m_2^2)\dfrac{dt}{dm_1}} .$$

Verder is uit (13)

$$r + e = \frac{2\, m_1 m_2}{m_1 - m_2} \sqrt{(a - be)}, \quad t + b = \frac{2}{m_1 - m_2} \sqrt{(a - be)},$$

en

$$s - {}^1/_2\, c = - \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} \sqrt{(a - be)}.$$

Dit alles invoerende vindt men

$$x = \frac{\varphi' - \psi'}{2\sqrt{(a - be)}}, \quad y = \frac{m_1\varphi' - m_2\psi' - \varphi + \psi}{2\sqrt{(a - be)}},$$

$$p = u + xr + ys = {}^1/_2(\varphi + \psi - m_1\varphi' - m_2\psi') - ex + {}^1/_2 cy,$$

$$q = v + xs + yt = {}^1/_2(\varphi' + \psi') + {}^1/_2 cx - by,$$

en eindelijk

$$z+{}^1/_2(ex^2-cxy+by^2)=\frac{(m_1-m_2)\,\varphi'\psi'-\int\varphi'^2dm_1+\int\psi'^2dm_2.}{4\sqrt{(a-be)}}$$

Eenvoudiger uitdrukkingen, vrij van integraalteekens bekomt men door te stellen

$$\frac{\varphi'(m_1)}{2\sqrt{(a-be)}}=\alpha,\ m_1=\chi''(\alpha),\ \frac{\psi'(m_2)}{2\sqrt{(a-be)}}=\beta,\ m_2=\omega''(\beta).$$

Men vindt dan

$$x=\alpha-\beta,\qquad y=\chi'(\alpha)-\omega'(\beta),$$
$$z+{}^1/_2(ex^2-cxy+by^2)=\{2\omega-2\chi-(\alpha+\beta)(\omega'-\chi')\}\sqrt{(a-be)}.$$

In dezen laatsten vorm vindt men de integraal onmiddellijk door de methode van AMPÈRE.

Aan de vergelijkingen (15) kan nog op eene andere wijze worden voldaan, namelijk door dat

$$RT={}^1/_4,\ \text{dus}\ m_1=m_2=m$$

is. In dat geval is slechts één hulpstelsel aanwezig, maar daarvan laten zich hier dadelijk drie integreerbare combinatiën aanwijzen, namelijk

$$dr-m^2dt=0,\quad dy-mdx=0,\quad du+mdv=0,$$

waarvan de integralen zijn

$$m=c,\quad y-mx=c',\quad u+mv=c''.$$

Integralen van (1) zijn dan

$$y-mx=\varphi(m),\quad u+mv=\psi(m).\;.\;.\;.\;.\;(16)$$

De laatste vergelijking differentieerende hebben wij

$$-x\,dr-yds-m\,(xds+ydt)=(\psi'(m)-v)\,dm.$$

Maar, daar $R=-\dfrac{1}{2m}$, $T=-{}^1/_2\,m$ is, heeft men

$$dr + mds = dr(1 + mR) + mTdt = {}^1/_2(dr - m^2dt),$$

en evenzoo

$$ds + mdt = -\frac{1}{2m}(dr - m^2dt),$$

dus

$$(v - \psi'(m))\left(\frac{dm}{dr}dr + \frac{dm}{dt}dt\right) = -\frac{\varphi}{2m}(dr - m^2dt)$$

hetwelk, daar

$$\frac{dm}{dt} = -m^2\frac{dm}{dr}$$

is, zich vereenvoudigt tot

$$v = \psi'(m) - \frac{\varphi(m)}{2m\dfrac{dm}{dr}}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

of

$$q - xs - yt = \psi'(m) - \frac{\varphi(m)}{\dfrac{d(m^2)}{dr}}.$$

Nogmaals differentieerende heeft men hieruit

$$-xds - ydt = \psi''(m)dm - \frac{\varphi'(m)dm}{\dfrac{d(m^2)}{dr}} + \varphi(m)\frac{\dfrac{d^2(m^2)}{dr^2}dr + \dfrac{d^2(m^2)}{drdt}dt}{\left(\dfrac{d(m^2)}{dr}\right)^2}.$$

Dus is

$$xR = -\psi''(m)\frac{dm}{dr} + \frac{\varphi'(m)}{2m} - \varphi(m)\frac{\dfrac{d^2(m^2)}{dr^2}}{\left(\dfrac{d(m^2)}{dr}\right)^2}$$

of

$$x = \psi''(m)\frac{d(m^2)}{dr} - \varphi'(m) + 2m\varphi(m)\frac{\dfrac{d^2(m^2)}{dr^2}}{\left(\dfrac{d(m^2)}{dr}\right)^2}$$

Hierdoor zijn x en y in r en t uitgedrukt. Uit (17) vindt men dan v en uit (16)

$$u = \psi(m) - m\,\psi'(m) + \frac{m\,\varphi(m)}{\frac{d(m^2)}{dr}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Uit (17) en (18) berekent men p en q, en eindelijk z uit

$$dz = pdx + qdy.$$

De gegeven vergelijking moet hier den vorm hebben

$$s = -\,{}^1\!/_2\, mt - \frac{1}{2\,m}\, r + \chi(m), \quad . \; . \; . \; . \; . \; (19)$$

waarin χ eene willekeurige functie is, en m bepaald wordt door

$$m^2t - r = 2\,m^2\,\chi'(m), \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

zooals de integratie van de vergelijking $RT = {}^1\!/_4$, als differentiaalvergelijking van de eerste orde in f, r en t opgevat, leert.

Men overtuigt zich gemakkelijk, dat m in (19) en (20) dezelfde beteekenis heeft als in het voorgaande. Men kan nu alles in m en bijv. s uitdrukken. Uit (19) en (20) vindt men dan

$$r = m(\chi - m\,\chi' - s), \qquad t = \frac{\chi + m\,\chi' - s}{m},$$

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2\chi - 2m\chi' - 2m^2\chi'' - 2s}, \quad \frac{d(m^2)}{dr} = \frac{m}{\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s},$$

$$\frac{d^2(m^2)}{dr^2} = \frac{m^3\,(3\chi'' + m\chi''')}{(\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s)^3}.$$

Zoodoende vindt men voor x

$$x = \frac{m\{\psi'' - 2m\varphi\,(3\chi'' + m\chi''')\}}{(\chi - m\chi' - m^2\chi'' - s)} - \varphi'\,,$$

of, als men de breuk door k voorstelt,

$$x = k - \varphi', \text{ en } y = mk - m\varphi' + \varphi\,.$$

Verder is

$$p = u + rx + sy = \psi - m\psi' + \varphi\,(\chi - m\chi' - m^2\chi'') -$$
$$- \varphi'(m\chi - m^2\chi') + k(m\chi - m^2\chi') = A + (m\chi - m^2\chi')k,$$

$$q = v + sx + ty = \psi' + \varphi\,(2\chi' + m\chi'') - \varphi'(\chi + m\chi') +$$
$$+ (\chi + m\chi')\,k = B + (\chi + m\chi')k,$$

waarin A en B hierdoor bepaalde verkortingen zijn.
Hieruit is

$$\frac{dz}{dk} = p\frac{dx}{dk} + q\frac{dy}{dk} = p + mq = A + mB + 2m\chi k,$$

dus

$$z = (A + mB)\,k + m\chi k^2 + U,$$

waarin U eene nader te bepalen functie van m is. Differentieerende heeft men

$$\frac{dz}{dm} = \left(\frac{dA}{dm} + m\frac{dB}{dm} + B\right)k + (m\chi' + \chi)\,k^2 + \frac{dU}{dm}.$$

Maar aan den anderen kant is

$$\frac{dz}{dm} = p\frac{dx}{dm} + q\frac{dy}{dm} = -(A + Bm)\varphi'' + (B - 2m\chi\varphi'')k + (m\chi' + \chi)k^2,$$

zoodat

$$\frac{dU}{dm} = -(A + Bm)\varphi'' = \varphi''\{-\psi - \varphi\,(\chi + m\chi') + 2m\varphi'\chi\},$$

en dus

$$U = \int \varphi'' \{ -\psi - \varphi(\chi + m\chi') + 2m\varphi'\chi \} \, dm.$$

Zoodoende hebben wij de uitkomst

$$z = m\chi k^2 + \{\psi + \varphi(\chi + w\chi') + 2m\varphi'\chi\} k -$$
$$- \int \{ \psi + \varphi(\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi \} \varphi'' \, dm.$$

Voeren wij ten slotte eene nieuwe functie in door de betrekking

$$\omega'(m) = \varphi'' \{\psi + \varphi(\chi + m\chi') - 2m\varphi'\chi\},$$

en elimineeren k, dan hebben wij de integraal in den vorm

$$\left.\begin{aligned} y &= mx + \varphi(m), \\ z &= m\chi(m)(x + \varphi'(m))^2 + \frac{\omega'(m)}{\varphi''(m)}(x + \varphi'(m)) - \omega(m) \end{aligned}\right\} \ldots (21)$$

De vergelijkingen (21) stellen nu de algemeene integraal voor van alle mogelijke vergelijkingen van den vorm (1), wier karakteristieke vergelijking twee gelijke wortels heeft. De functie χ komt in de differentiaalvergelijking zelve voor, de beide andere zijn door de integratie ingevoerd.

Een derde geval van integreerbaarheid is, dat $m_2 = c$ de integraal van (10) is, en omgekeerd $dr = m_2^2 \, dt$ tot integraal heeft $m_1 = \text{const.}$. Men moet dan hebben

$$\frac{dm_1}{dt} + m_2^2 \frac{dm_1}{dr} = 0, \quad \frac{dm_2}{dt} + m_1^2 \frac{dm_2}{dr} = 0 \ . \ . \ (22)$$

De optelling van deze vergelijkingen geeft

$$\frac{d\left(-\frac{1}{R}\right)}{dt} + \frac{T^2}{R^2} \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{dr} = 0,$$

wat bij herleiding eene identieke vergelijking blijkt te zijn.

De vergelijkingen (22) zijn dus niet onafhankelijk van elkaar. Vermenigvuldigt men de eerste met m_1 en de tweede met m_2, en telt ze op, dan komt er

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\,(m_1^2 + m_2^2)}{dt} + m_1\, m_2\,\frac{d\,(m_1\, m_2)}{dr} = 0,$$

of, herleid

$$T^2\frac{dR}{dr} + R^2\frac{dT}{dt} + (1 - 2\,RT)\frac{dR}{dt} = 0 \;.\;.\;.\; (23)$$

Dit is dus de eenige voorwaarde, waaraan de differentiaalvergelijking in dit geval moet voldoen.

De vergelijking (23) is zelve weer eene differentiaalvergelijking van de tweede orde in s of f als afhankelijk en r en t als onafhankelijk veranderlijken. Even als in de beide vorige gevallen laat zich de algemeene vorm der differentiaalvergelijking weer bepalen, ditmaal door integratie van de vergelijking (23).

Waar wij tot die integratie overgaan, vervangen wij r, t en s tijdelijk door x, y en z, en gebruiken de gewone notatien voor de afgeleiden van de eerste en tweede orde van deze z ten opzichte van deze x en y. De vergelijking (23) wordt dan

$$q^2 r + (1-2pq)\,s + p^2 t = 0. \;.\;.\;.\;.\;.\; (24)$$

De karakteristieke vergelijking hiervan is

$$q^2\mu^2 - (1-2pq)\mu + p^2 = 0. \;.\;.\;.\;.\;.\; (25)$$

en μ_1 en μ_2 mogen hare wortels zijn.

Bij de integratie laat zich ook hier weer de telkens gebruikte methode toepassen. Als eerste hulpstelsel hebben wij

$$\frac{dx}{q^2} = \frac{dy + \mu_1\,dx}{1-2pq} = \frac{\mu_1\,dy}{p^2} = \frac{dz}{q^2(p+\mu_2 q)} = \frac{dp}{q^2(r+\mu_2 s)} =$$

$$= \frac{dq}{q^2(s+\mu_2 t)} = \frac{dr + \mu_1\,ds}{-2p(rt-s^2)} = \frac{ds + \mu_1\,dt}{-2q(rt-s^2)} \;.\;. \; (27)$$

Daar volgens (24) en (25) $r + (\mu_1 + \mu_2) s + \mu_1 \mu_2 t = 0$ is, vindt men

$$dp + \mu_1 dq = 0, \quad \dots\dots\dots \quad (28)$$

eene vergelijking, die zeker integreerbaar is, daar μ_1 alleen van p en q afhangt. Zooals men uit (25) gemakkelijk vindt, is

$$\frac{d\mu_1}{dq} = \mu_1 \frac{d\mu_1}{dp},$$

en dus is

$$\mu_1 = c$$

de integraal van (28). Stelt men dan nog $s + \mu_1 t = \lambda_1$, dan is

$$ds + \mu_1 dt = d\lambda_1,$$

$$\frac{d\lambda_1}{rt - s^2} = - \frac{2\,dq}{q^2 (s + \mu_2 t)},$$

of, daar

$$rt - s^2 = -(s + \mu_2 t)(s + \mu_1 t)$$

is,

$$\frac{d\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{2\,dq}{q}.$$

Eene andere integraal van het stelsel (27) is dus

$$\lambda_1 = c_1 q^2.$$

Eene eerste integraal van (24) is derhalve

$$\lambda_1 = q^2 \chi(\mu_1) \quad \text{of} \quad s + \mu_1 t = q^2 \chi(\mu_1).$$

Het andere hulpstelsel verschaft ons op dezelfde wijze

$$s + \mu_2 t = q^2 \omega(\mu_2).$$

Neemt men in aanmerking, dat

$$r + \mu_1 s = -\mu_2 (s + \mu_1 t), \quad r + \mu_2 s = -\mu_1 (s + \mu_2 t)$$

is, dan vindt men

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\mu_2^2\chi(\mu_1)-\mu_1^2\omega(\mu_2)),\\ s &= -\frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\mu_2\chi(\mu_1)-\mu_1\omega(\mu_2)),\\ t &= \frac{q^2}{\mu_1-\mu_2}(\chi(\mu_1)-\omega(\mu_2)). \end{aligned}\right\} \quad \ldots (29)$$

Uit

$$dp = r\,dx + s\,dy \quad \text{en} \quad dq = s\,dx + t\,dy$$

volgt

$$dx = \frac{t\,dp - s\,dq}{r\,t - s^2}, \quad dy = \frac{r\,dq - s\,dp}{r\,t - s^2}, \quad \ldots (30)$$

terwijl men uit (25) gemakkelijk vindt

$$p = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}+\sqrt{\mu_2}}. \quad \ldots (31)$$

Voert men dit en (29) in (30) in, dan komt er

$$dx = \frac{d\mu_1}{2\chi\sqrt{\mu_1}} + \frac{d\mu_2}{2\omega\sqrt{\mu_2}}, \quad dy = \frac{d\mu_1\sqrt{\mu_1}}{2\chi} + \frac{d\mu_2\sqrt{\mu_2}}{2\omega},$$

en

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{d\mu_1}{2\chi} + \frac{d\mu_2}{2\omega}.$$

Vervangt men eindelijk $\sqrt{\mu_1}$ door $-\frac{1}{m_1}$, $\sqrt{\mu_2}$ door $-\frac{1}{m_2}$, $\frac{\mu_1^2}{\chi(\mu_1)}$ door $\chi'''(m_1)$ en $\frac{\mu_2^2}{\omega(\mu_2)}$ door $\omega'''(m_2)$, dan komt er

$$\begin{aligned} dx &= m_1^2\chi'''(m_1)\,dm_1 + m_2^2\omega'''(m_2)\,dm_2,\\ dy &= \chi'''(m_1)\,dm_1 + \omega'''(m_2)\,dm_2,\\ dz &= -m_1\chi'''(m_1)\,dm_1 - m_2\omega'''(m_2)\,dm_2; \end{aligned}$$

dus is, als wij x, y en z weer door r, t en s vervangen,

$$\left.\begin{aligned} r &= m_1^2\chi'' - 2m_1\chi' + 2\chi + m_2^2\omega'' - 2m_2\omega' + 2\omega,\\ s &= -m_1\chi'' + \chi' - m_2\omega'' + \omega',\\ t &= \chi'' + \omega''. \end{aligned}\right\} \ldots (32)$$

Hierbij zijn de argumenten der willekeurige functiën weggelaten, wat wij dikwijls zullen doen en ook reeds herhaaldelijk deden, waar het geene verwarring veroorzaken kan.

Zal zich derhalve het hier behandelde geval van integreerbaarheid voordoen, dan moet (1) het resultaat zijn der eliminatie van m_1 en m_2 uit de drie vergelijkingen (32).

De m_1 en m_2 in (32) zijn de wortels van de vergelijking

$$R m^2 + m + T = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

zooals men uit (25) gemakkelijk vindt, als men in aanmerking neemt dat de p en q niets anders zijn dan R en T. De vergelijking (33) is echter niets anders dan de karakteristieke vergelijking van (1).

Het stelsel (7) levert in dit geval de integralen $m_2 = c$ en $y - m_2 x = c'$ op, zoodat eene eerste integraal van (1) is

$$y - m_2 x = \varphi(m_2),$$

en eene andere natuurlijk

$$y - m_1 (x) = \psi(m_1),$$

waaruit volgt

$$x = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2}, \quad y = \frac{m_1 \varphi - m_2 \psi}{m_1 - m_2} \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Met behulp van (32) kunnen wij nu ook z in m_1 en m_2 uitdrukken. Men heeft namelijk

$$\frac{dp}{dm_1} = r \frac{dx}{dm_1} + s \frac{dy}{dm_1}, \quad \frac{dq}{dm_1} = s \frac{dx}{dm_1} + t \frac{dy}{dm_1}.$$

Maar

$$\frac{dy}{dm_1} = m_2 \frac{dx}{dm_1};$$

dus

$$\frac{dp}{dm_1} = (r + m_2 s) \frac{dx}{dm_1}, \text{ en evenzoo } \frac{dp}{dm_2} = (r + m_1 s) \frac{dx}{dm_2}.$$

Men vindt hieruit

$$p = \int (r + m_2 s) \frac{dx}{dm_1} dm_1 = x(r + m_2 s) - \int x m_1 (m_1 - m_2) \chi''' dm_1,$$

waarbij de integratieconstante natuurlijk eene functie van m_2 is.

Voor x, r en s hare waarden invoerende heeft men

$$p = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2} (2\chi - m_1 \chi' + 2\omega - m_2 \omega') - \psi (m_1 \chi'' - \chi') - \varphi (m_2 \omega'' - \omega')$$

$$+ \int \psi \chi''' m_1 \, dm_1 + \int \varphi \, \omega''' m_2 \, dm_2,$$

waarbij de termen, die van m_2 alleen afhangen, zijn toegevoegd, omdat er symmetrie ten opzichte van m_1 en m_2 moet bestaan.

Op dergelijke wijze vindt men

$$q = \frac{\varphi - \psi}{m_1 - m_2} (\chi' + \omega') + \psi \chi'' + \varphi \, \omega'' - \int \psi \chi''' dm_1 - \int \varphi \omega''' dm_2$$

Eindelijk is

$$z = \int \frac{dz}{dm_1} dm_1 = \int \left(p \frac{dx}{dm_1} + q \frac{dy}{dm_1} \right) dm_1 = \int (p + m_2 q) \frac{dx}{dm_1} dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int x \left(\frac{dp}{dm_1} + m_2 \frac{dq}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= x(p + m_2 q) - \int (r + 2 m_2 s + m_2^2 t) \, x \frac{dx}{dm_1} =$$

$$x(p + m_2 q) - {}^1/_2 (r + 2 m_2 s + m_2^2 t) \, x^2$$

$$+ {}^1/_2 \int x^2 \left(\frac{dr}{dm_1} + 2 m_2 \frac{ds}{dm_1} + m_2^2 \frac{dt}{dm_1} \right) dm_1 =$$

$$= {}^1/_2 x^2 (r + 2 m_2 s + m_2^2 t) + x \left\{ \varphi \omega' - m_2 \int \varphi \omega''' dm_2 + \int m_2 \varphi \omega''' dm_2 \right\}$$

$$+ {}^1/_2 \int (\varphi - \psi)^2 \chi''' \, dm_1 - x \int (\varphi - \psi)(m_1 - m_2) \, \chi''' \, dm_1 =$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\varphi-\psi)^2}{(m_1-m_2)^2}\{(m_1-m_2)^2\chi''-2(m_1-m_2)\chi'+2\chi+2\omega\}-$$

$$-\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\int(\varphi-\psi)(m_1-m_2)\chi'''\,dm_1$$

$$+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}(\varphi\omega'+\int m_2\varphi\omega'''dm_2-m_2\int\varphi\omega'''dm_2)+\frac{1}{2}\int(\varphi-\psi)^2\chi'''dm_1.$$

Door herleiding en toevoeging van zoodanige alleen van m_2 afhangende termen, als noodig zijn om de vereischte symmetrie tot stand te brengen, heeft men eindelijk

$$z=\left(\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\right)^2(\chi+\omega)+\frac{\varphi-\psi}{m_1-m_2}\{\psi\chi'+\varphi\omega'+\int m_1\psi\chi'''dm_1-m_1\int\psi\chi'''dm_1$$

$$+\int m_2\varphi\,\omega'''dm_2-m_2\int\varphi\,\omega'''dm_2\}+\frac{1}{2}\int\psi^2\chi'''dm_1+\frac{1}{2}\int\varphi^2\omega'''dm_2$$

$$+\frac{1}{2}\psi^2\chi''+\frac{1}{2}\varphi^2\omega''-\psi\int\psi\,\chi'''\,dm_1-\varphi\int\varphi\,\omega'''\,dm_2. \quad . \quad . \quad (35)$$

De drie vergelijkingen (34) en (35) stellen te zamen de algemeene integraal voor van alle vergelijkingen van den vorm (1), die aan de voorwaarde (23) voldoen, met uitzondering alleen van die, welke onder de beide vroeger behandelde gevallen zijn begrepen, en de beneden te behandelen gevallen, dat m_1 of m_2 constante waarden hebben.

Nog een geval van integreerbaarheid zou men hebben, als m_1 en m_2 gelijk aan eene constante gesteld beide integralen van (10) waren, en dus m_2 eene functie was van m_1. Maar wij zagen, dat de vergelijkingen (22) gevolgen van elkaar zijn. Men zou dus niet alleen hebben, dat aan (11) en eene der vergelijkingen (22), maar tevens, dat aan de andere vergelijking (22) en aan (12) voldaan was, en hieruit zou volgen, dat òf $m_1^2 = m_2^2$, dus $m_1 = m_2$ was, daar $m_1 = -m_2$ hier niet kan voorkomen, òf dat m_1 en m_2 beide constante waarden hadden, òf eindelijk eene van beide gelijk aan nul was.

In het laatste geval zou de differentiaalvergelijking de t niet bevatten. Noemen wij dan m_2 den wortel der karakteristieke vergelijking, die verdwijnt, dan neemt het eerste hulpstelsel den vorm aan

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{0}=\frac{dz}{p}=\frac{dp}{r}=\frac{dq}{s}=\frac{dr+m_1\,ds}{0}=\frac{ds+m_1\,dt}{0},$$

en levert onder andere op de volgende integralen

$$y=c,\quad t=\int\frac{dr}{m_1^2}+c'=\int f'(r)^2\,dr+c'.$$

De differentiaalvergelijking heeft dus de eerste integraal

$$t=\int f'(r)^2\,dr+\psi''(y),$$

terwijl het tweede hulpstelsel nog altijd de integraal

$$y-m_1\,x=\varphi(m_1)$$

oplevert. De laatste kunnen wij schrijven in den vorm

$$x+y\,f'(r)=\chi'(r)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(36)$$

Men heeft dan

$$dp=r\,dx+s\,dy=r\{(\chi''(r)-y\,f''(r))\,dr-f'(r)\,dy\}+f(r)\,dy$$

of

$$dp=\{r\,\chi''(r)-y\,r\,f''(r)\}\,dr+\{f(r)-r\,f'(r)\}\,dy,$$

en evenzoo

$$dq=\{f(r)\,\chi''(r)-y\,f(r)\,f''(r)\}\,dr+\{\psi''(y)-\int f(r)\,f''(r)dr\}\,dy.$$

Door integratie heeft men hieruit

$$p=y(f-rf')+r\chi-\chi,\quad q=-y\int ff''\,dr+\psi'(y)+\int f\chi''\,dr;$$

derhalve is

$$dz = p\,dx + q\,dy = \{y(f - rf') + r\chi' - \chi\}(\chi'' - yf'')dr -$$
$$-\{y(ff' - rf'^2) + rf'\chi' - \chi f' + y\int ff''dr - \int f\chi''dr - \psi'(y)\}dy,$$

waaruit door integratie

$$z = -{}^1/_2 y^2\{ff' - rf'^2 + \int ff''dr\} + y\{\chi f' - r\chi' f' + \int f\chi''dr\} +$$
$$+ \int (r\chi' - \chi)\chi''\,dr + \psi(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

In (36) en (37) hebben wij de integraal voor dit geval.

De vergelijking

$$s = f(t),$$

beantwoordende aan $m_2 = \infty$, laat zich natuurlijk op dezelfde wijze behandelen.

Zijn m_1 en m_2 beide constant, dan heeft de vergelijking (1) den vorm

$$s = ar + bt + e.$$

Het eerste hulpstelsel heeft dan de integralen

$$y - m_2 x = c, \quad u + m_1 v = c';$$

er zijn echter hier andere, minder in het oog vallende integralen, die spoediger tot de eindintegraal voeren. Aan het eerste hulpstelsel wordt ook voldaan door

$$p + m_1 q - (m_1 x + y)e = c'',$$

zoodat eene eerste integraal is

$$p + m_1 q = (m_1 x + y)e + \varphi(y - m_2 x),$$

en evenzoo natuurlijk

$$p + m_2 q = (m_2 x + y)e + \psi(y - m_1 x).$$

De waarden van p en q, hieruit opgelost en in $dz = pdx + qdy$ overgebracht, geven, als wij voor φ en ψ andere functien invoeren,

$$dz = (y\,dx + x\,dy)e + \psi'(y - m_1 x)\,d(y - m_1 x) + \varphi'(y - m_2 x)\,d(y - m_2 x),$$

dus

$$z = exy + \psi\,(y - m_1 x) + \varphi\,(y - m_2 x). \quad . \quad . \quad (38)$$

Deze uitkomst wordt, gelijk bekend is, ook door de methode van Monge opgeleverd, welke methode trouwens, zoodra men met lineaire vergelijkingen te doen heeft, en integralen, die r, s of t bevatten, vermijden kan, met de hier gebruikte samenvalt.

Waren m_1 en m_2 niet alleen constant, maar ook aan elkaar gelijk, dan zouden zoowel (38) als (21) als algemeene integraal onbruikbaar worden. In dit geval heeft het hulpstelsel allerlei integralen, waarvan wij weer die, welke r, s of t bevatten, ongebruikt kunnen laten. Wij houden dan over

$$y - mx = c, \quad p + my = e\,(mx + y) + c'$$

en

$$z - (p + m\,q)\,x + e\,m\,x^2 = c''.$$

Als integralen van de differentiaalvergelijking heeft men dus hier

$$p + mq = e\,(mx + y) + \varphi\,(y - mx),$$

$$z = (p + m\,q)\,x - e\,m\,x^2 + \psi\,(y - mx).$$

De eliminatie van $p + m\,q$ geeft de eindintegraal

$$z = exy + x\,\varphi\,(y - mx) + \psi\,(y - mx).$$

Het zou niet gemakkelijk zijn, nog andere gevallen van integreerbaarheid dan de behandelde op het oog te ontdekken. Het kenmerk van Jacobi geeft ons echter het middel aan de hand om rechtstreeks te onderzoeken, of er nog meer zulke gevallen zijn. Wij zullen dit kenmerk op de beide vergelijkingen (5) toepassen, en zoodoende uitmaken,

hoe groot het aantal gemeenschappelijke integralen in de verschillende gevallen is.

Stellen wij de beide vergelijkingen symbolisch voor door

$$\Delta_1 w = 0 \quad \text{en} \quad \Delta_2 w = 0,$$

dan hebben wij op de coëfficiënten van de eerste vergelijking de bewerking Δ_2, en op die van de tweede de bewerking Δ_1 toe te passen, en het verschil van de beide uitkomsten te nemen.

De vergelijkingen (5) uitvoeriger geschreven zijn

$$\left.\begin{aligned} \frac{dw}{dx}+m_2\frac{dw}{dy}+(p+m_2q)\frac{dw}{dz}+(r+m_2s)\frac{dw}{dp}+(s+m_2t)\frac{dw}{dq}=0, \\ m_1^2\frac{dw}{dr}-m_1\frac{dw}{ds}+\frac{dw}{dt}=0. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

De uitkomst van de bewerking van Jacobi op deze vergelijkingen is

$$\frac{dw}{dy}\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)+\frac{dw}{dz}q\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)+$$
$$+\left\{(m_1^2-m_1m_2)+s\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)\right\}\frac{dw}{dp}$$
$$+\left\{(m_2-m_1)+t\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)\right\}\frac{dw}{dq}=0. \quad . \ (40)$$

Is nu in de eerste plaats $m_1 = m_2$, dan is ook $\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}=0$, en de vergelijking (40) wordt identiek. De vergelijkingen (39) hebben dan het grootst mogelijke aantal gemeenschappelijke integralen, namelijk zes. Eene daarvan is, als altijd, de oorspronkelijke differentiaalvergelijking, waarin het tweede lid 0 door eene willekeurige constante vervangen is. Van de vijf andere hebben wij er drie reeds vroeger aangegeven, namelijk

$$m=c, \quad y-mx=c', \quad u+mv=c''.$$

De andere zijn

$$r + ms = c''', \quad z - (p + mq)x + {}^1/_2 x^2(r + 2ms + m^2 t) = c''''.$$

Mocht van eene van deze vergelijkingen het eerste lid constant worden, dan kwam voor de daardoor vervallende integraal eene andere in de plaats; bijv., als m eene constante was, de integraal

$$p + mq - e(mx + y) = c'''''.$$

Is in de tweede plaats

$$\frac{dm_2}{dr} m_1^2 + \frac{dm_2}{dt} = C,$$

zonder dat $m_1 = m_2$ is, dan gaat (40) over in

$$\frac{dw}{dp} m_1 - \frac{dw}{dq} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

en dit is eene nieuwe vergelijking, die zich bij de gegevene van het stelsel (39) voegt. In geen geval kan dus nu het aantal integralen, de vergelijking $f = c$ medegerekend, meer dan vijf bedragen. Door toepassing van de bewerking op deze vergelijkingen twee aan twee vindt men

$$\frac{dw}{dp}\left(\frac{dm_1}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt}\right) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

$$\frac{dw}{dz}(m_1 - m_2) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Mocht nu $\frac{dm_1}{dr} m_1^2 + \frac{dm_1}{dt} = 0$ zijn, dan waren m_1 en m_2 constant, en het stelsel bestond nog uit de vier vergelijkingen (39), (41) en (43), die bij herhaalde toepassing der bewerking geene nieuwe vergelijkingen meer zouden voortbrengen. Er zouden dus buiten (1) nog drie integralen zijn, die alle reeds vroeger (pag. 241) zijn aangegeven, namelijk

$$y - m_2 x = c, \quad u + m_1 v = c', \quad p + m_1 q - e(m_1 x + y) = c''.$$

Was de tweede factor in (42) niet gelijk aan nul, dan zou het stelsel zich reduceeren tot

$$\frac{dw}{dx}+m_2\frac{dw}{dy}=0,\ \frac{dw}{dr}m_1^2-\frac{dw}{ds}m_1+\frac{dw}{dt}=0,\ \frac{dw}{dz}=\frac{dw}{dp}=\frac{dw}{dq}=0.$$

Dit stelsel laat behalve (1) hoogsten twee integralen toe, die geen van beide z, p of q kunnen bevatten. Als nieuwe vergelijking laat er zich alleen nog uit afleiden

$$\frac{dw}{dz}\left(\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}\right)=0,$$

wat volgens de gemaakte onderstellingen eene identiteit is; de beide integralen bestaan dus werkelijk, zooals wij reeds wisten; wij vonden namelijk in dit geval $m_2=c$, $y-m_2x=c'$, of, als $m_2=0$ mocht zijn, $y=c$, $t=\int f'^2(r)\,dr+c'$.

Nog blijft te onderzoeken het geval, dat $\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}$ van nul verschilt. Deelen wij dan (40) door deze uitdrukking en stellen ter bekorting

$$\frac{m_1-m_2}{\frac{dm_2}{dr}m_1^2+\frac{dm_2}{dt}}=L,$$

dan komt er

$$\frac{dw}{dy}+q\frac{dw}{dz}+(s+m_1L)\frac{dw}{dp}+(t-L)\frac{dw}{dq}=0,\ .\ (44)$$

en, door dit met m_1 vermenigvuldigd van de eerste vergelijking (39) af te trekken, vindt men

$$\frac{dw}{dr}+p\frac{dw}{dz}+(r-m_1m_2L)\frac{dw}{dp}+(s+m_2L)\frac{dw}{dq}=0.(45)$$

Het stelsel bestaat dus nu uit de tweede vergelijking (39)

en uit (44) en (45). De laatste twee vergelijkingen geven te zamen aanleiding tot de nieuwe vergelijking

$$(m_1 - m_2) L \frac{dw}{dz} = 0 ; \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

(44) en (45) ieder op zich zelf met de tweede van (39) gecombineerd doen dan de volgende vergelijkingen ontstaan, waarin de bewerking $m_1^2 \frac{d}{dr} + \frac{d}{dt}$ kortheidshalve door $\varDelta$ is voorgesteld:

$$(-m_1 + L\varDelta m_1 + m_1 \varDelta L) \frac{dw}{dp} + (1 - \varDelta L) \frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\{m_1^2 - L(m_1 \varDelta m_2 + m_2 \varDelta m_1) - m_1 m_2 \varDelta L\} \frac{dw}{dp} +$$
$$+ (-m_1 + L \varDelta m_2 + m_2 \varDelta L) \frac{dw}{dq} = 0.$$

Merkt men op, dat $L \varDelta m_2 = m_1 - m_2$ is, dan ziet men, dat deze beide vergelijkingen niet van elkaar onafhankelijk zijn, zoodat zij te zamen slechts ééne nieuwe vergelijking vormen. Het te integreeren stelsel is nu geworden

$$\frac{dw}{dx} + (r - m_1 m_2 L) \frac{dw}{dp} + (s + m_2 L) \frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dy} + (s + m_2 L) \frac{dw}{dp} + (t - L) \frac{dw}{dq} \cdot \quad \ldots\ldots (47)$$

$$(K_1 - m_1) \frac{dw}{dp} + {}_{dq} = 0, \; m_1^2 \frac{dw}{dr} - m_1 \frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0, \; \frac{dw}{dz} = 0,$$

waarin, alweer ter bekorting, gesteld is

$$K_1 = \frac{L \varDelta m_1}{1 - \varDelta L}.$$

Nog ééne nieuwe vergelijking laat zich hieruit afleiden, namelijk

$$(\Delta K_1 - \Delta m_1) \frac{dw}{dp} = 0.$$

Mocht $\Delta m_1 = 0$ zijn, dan was deze vergelijking eene identiteit, en de vereischte twee integralen zouden aanwezig zijn. Wij hebben daarvoor vroeger gevonden

$$m_1 = c, \qquad u + m_1 v = c'.$$

Hiermede zijn al de vroeger gevonden gevallen van integreerbaarheid teruggevonden, en het blijkt, dat er nog een ander aanwezig is, namelijk als

$$\Delta K_1 - \Delta m_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (48)$$

is, zonder dat Δm_1 verdwijnt.

Dit laatste geval van integreerbaarheid splitst zich nog in twee verschillende, die eene afzonderlijken behandeling vereischen. Het eerste is dat, waarin $K_1 - m_1$ eene constante waarde heeft, het tweede dat, waarin dit niet het geval is. Het eerste geval, als het minst algemeene, behandelen wij het eerst, en onderstellen, dat hetzelfde geval zich ook bij het andere hulpstelsel voordoet, met andere woorden, dat ook $K_2 - m_2$, waarin K_2 de analoge beteekenis heeft met K_1, eene constante waarde heeft.

Beginnen wij met de voorwaarden op te sporen, waaraan de vergelijking (1) moet voldoen, opdat zich dit geval voordoe. Wij zullen de constante waarden van van $m_1 - K_1$ en $m_2 - K_2$ door M_1 en M_2 voorstellen; dan is

$$\frac{L \Delta m_1}{1 - \Delta L} - m_1 = \frac{\Delta (L m_1) - m_1}{1 - \Delta L} = - M_1,$$

of

$$\Delta (L m_1) - m_1 = - M_1 (1 - \Delta L),$$

of ook

$$\frac{d(m_1 L)}{dr} m_1^2 + \frac{d(m_1 L)}{dt} - m_1 = M_1 \left(\frac{dL}{dr} m_1^2 + \frac{dL}{dt} - 1 \right),$$

en evenzoo

$$\frac{d(m_2 L)}{dr} m_2^2 + \frac{d(m_2 L)}{dt} - m_2 = M_2 \left(\frac{dL}{dr} m_2^2 + \frac{dL}{dt} - 1 \right).$$

L verandert namelijk niet, als daarin m_1 met m_2 verwisseld wordt: door m_1 en m_2 in R en T uit te drukken vindt men, dat

$$L = \frac{R(1-4RT)}{R^2\frac{dT}{dt} + (1-2RT)\frac{dR}{dt} + T^2\frac{dR}{dr}} \quad . \; . \; . \; (49)$$

is.

Stelt men $M_1 + M_2 = 2\alpha$, $M_1 - M_2 = 2\beta$, dan heeft men hieruit door optelling

$$(m_1^3+m_2^3)\frac{dL}{dr}+{}^1/_3L\frac{d(m_1^3+m_2^3)}{dr}+\frac{d}{dt}\{(m_1+m_2)L\}-(m_1+m_2)=$$

$$=\alpha\left\{(m_1^2+m_2^2)\frac{dL}{dr}+2\frac{dL}{dt}-2\right\}+\beta\frac{dL}{dr}(m_1^2-m_2^2),$$

en door optelling na deeling van de eerste door m_1^2 en van de tweede door m_2^2

$$\frac{d\{(m_1+m_2)L\}}{dr}+\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\frac{dL}{dt}-L\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)=$$

$$=\alpha\left\{2\frac{dL}{dr}+\left(\frac{1}{m_1^2}+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right)\right\}+\beta\left(\frac{1}{m_1^2}-\frac{1}{m_2^2}\right)\left(\frac{dL}{dt}-1\right).$$

Voert men hierin voor m_1 en m_2, de waarden in uitgedrukt in R en T, en stelt

$$U=\frac{L}{R}=\frac{1-4RT}{R^2\frac{dT}{dt}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}+T^2\frac{dR}{dr}}, \quad . \; (50)$$

dan gaan deze vergelijkingen over in

$$\frac{dU}{dr}\{3RT-1-\alpha R(1-2RT)+\beta R\sqrt{(1-4RT)}\}-$$

$$-\frac{dU}{dt}(1+2\alpha R)R^2+U\left\{T\frac{dR}{dr}+R\frac{dR}{dt}-\alpha\left((1-2RT)\frac{dR}{dr}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2R^2\frac{dR}{dt}\right)+\beta\frac{dR}{dr}\sqrt{(1-4RT)}\right\}+R+2\alpha R^2=0$$

en

$$\frac{dU}{dr}(1+2\alpha R)T^2+\frac{dU}{dt}\{RT+\alpha R(1-2RT)+\beta R\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{T\frac{dR}{dt}+R\frac{dT}{dt}+\alpha\left(2T^2\frac{dR}{dr}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}\right)\right\}+$$

$$+\beta\frac{dR}{dt}\sqrt{(1-4RT)}-\alpha(1-2RT)+\beta\sqrt{(1-4RT)}-T=0$$

Hierbij zijn de indices 1 en 2 over de wortels der karakteristieke vergelijking zoo verdeeld, dat

$$m_1=\frac{-1+\sqrt{(1-4RT)}}{2R}, \quad m_2=\frac{-1-\sqrt{(1-4RT)}}{2R}$$

is.

Door uit deze beide vergelijkingen $\frac{dU}{dr}$ te elimineeren, en met behulp van (50) $\frac{dR}{dr}$ te doen verdwijnen, bekomt men eene vergelijking, die na deeling door $R(1-4RT)$ overgaat in

$$\frac{dU}{dt}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{\frac{dT}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dt}-2\beta\frac{R\frac{dT}{dt}+T\frac{dR}{dt}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha T+(\alpha^2-\beta^2).$$

Evenzoo geeft de eliminatie van $\frac{dU}{dt}$ en de verdrijving van $\frac{dT}{dt}$

$$\frac{dU}{dr}\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}+$$

$$+U\left\{\frac{dR}{dt}+(\alpha^2-\beta^2)\frac{dR}{dr}-2\beta\frac{R\frac{dR}{dt}+T\frac{dR}{dr}}{\sqrt{(1-4RT)}}\right\}=2\alpha R+1.$$

Deze beide vergelijkingen kunnen door differentieeren worden afgeleid uit

$$U\{T+\alpha+(\alpha^2-\beta^2)R+\beta\sqrt{(1-4RT)}\}=r+2\alpha f+(\alpha^2-\beta^2)t+C.$$

Deze vergelijking vertegenwoordigt dus de eenige voorwaarde, waaraan de differentiaalvergelijking (1) moet voldoen, opdat zich het hier behandelde geval voordoe. Drukt men α en β weer in M_1 en M_2 uit, dan laat zij zich aldus schrijven

$$T^2\frac{dR}{dr}+(1-2RT)\frac{dR}{dt}+R^2\frac{dT}{dt}=$$
$$=\frac{(1-4RT)R(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{r+(M_1+M_2)f+M_1M_2t+C} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

Deze vergelijking, als differentiaalvergelijking in f als afhankelijk en r en t als onafhankelijk veranderlijken opgevat, zullen wij nu trachten te integreeren. De willekeurige constante C laten wij hierbij weg; uit het bijzonder geval, waartoe wij ons zoodoende bepalen, kan door eene geringe wijziging het algemeene worden afgeleid. Wij vervangen hierbij weer r, f of s, en t tijdelijk door x, z en y, en gebruiken de gewone notatie voor de differentiaalquotienten van *deze* z ten opzichte van *deze* x en y. De vergelijking (51) wordt dan

$$q^2r+(1-2pq)s+p^2t=\frac{(1-4pq)p(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{x+(M_1+M_2)z+M_1M_2y}, \ldots (52)$$

De noemer van het tweede lid zullen wij voortdurend door G voorstellen. m_1 en m_2 zijn nu de wortels van

$$pm^2+m+q=0. \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

Het grensgeval $M_1=M_2=\infty$, dat alleen als grensgeval in het algemeene geval begrepen is, behandelen wij vooraf afzonderlijk.

De vergelijking

$$q^2r+(1-2pq)s+p^2t=\frac{(1-4pq)p}{y} \ldots (54)$$

integreeren wij dus in de eerste plaats, en beginnen met haar te vereenvoudigen door z en y als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen.

Stelt men

$$\frac{dx}{dz}=P,\ \frac{dx}{dy}=Q,\ \frac{d^2x}{dz^2}=R,\ \frac{d^2x}{dz\,dy}=S,\ \frac{d^2x}{dy^2}=T,$$

dan is

$$p=\frac{1}{P},\ q=-\frac{Q}{P},\ r=-\frac{R}{P^3},\ s=\frac{QR-PS}{P^3},$$

$$t=-\frac{Q^2R-2PQS+P^2T}{P^3},$$

en dit invoerende, doen wij de vergelijking (54) overgaan in

$$QR-PS-T=\frac{P^2+4Q}{y}$$

en (53) in

$$m^2+Pm-Q=0.$$

Hierin willen wij de afhankelijk veranderlijke weer z en de onafhankelijk veranderlijken x en y noemen, en de groote letters weer door kleine vervangen. De vergelijkingen worden dan

$$qr-ps-t=\frac{p^2+4q}{y}\ \ldots\ldots\ (55)$$

en

$$m^2+pm-q=0.\ \ldots\ldots\ldots\ (56)$$

Op de vergelijking (55) passen wij nu weer de hier steeds gevolgde methode toe, en hebben dan te integreeren het stelsel (2), waarbij wij hier overal de t geëlimineerd denken door middel van (55), zoodat $\frac{dw}{dt}=0$ gesteld kan worden. Het stelsel wordt dan

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+(p+\mu_2 q)\frac{dw}{dz}+(r+\mu_2 s)\frac{dw}{dp}+\\&+\left(-\frac{r+\mu_2 s}{\mu_1}+\frac{p^2+4q}{q\mu_1 y}\right)\frac{dw}{dq}+\left(\frac{2pr+4s}{qy}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\&\frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0,\end{aligned}\right\}\ldots(57)$$

wanneer μ_1 en μ_2 de wortels zijn der karakteristieke vergelijking

$$q\,\mu^2 + p\,\mu - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

De vergelijking van (58) met (56) leert, dat $\mu_1 = -\frac{1}{m_1}$, $\mu_2 = -\frac{1}{m_2}$ is.

In de eerste vergelijking (57) drukken wij p en q in μ_1 en μ_2 uit door middel van de betrekkingen

$$q = -\frac{1}{\mu_1\,\mu_2}, \quad p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\,\mu_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Hierbij komen de volgende uit (59) gemakkelijk af te leiden vergelijkingen te pas:

$$\left.\begin{aligned}
p^2 + 4q = \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2\,\mu_2^2}, \quad \frac{d\mu_1}{dp}\frac{p^2+4q}{q} = -\mu_1(\mu_1-\mu_2),\\
\frac{d\mu_1}{dp} = \frac{\mu_1^2\,\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \quad \frac{d\mu_2}{dp} = -\frac{\mu_2^2\,\mu_1}{\mu_1-\mu_2},\\
r + 2\mu_2 s + \mu_2^2 t = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\left((r+\mu_2 s) - \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2 y}\right),\\
r + (\mu_1+\mu_2)s + \mu_1\mu_2 t = -\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1\mu_2 y}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (60)$$

Met behulp hiervan gaat het stelsel (57) over in

$$\frac{dw}{dx} + \mu_2\frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1} - \left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s) - \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2^2}{\mu_1 y}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}$$
$$-\frac{2\mu_1(r+\mu_2 s) + 2\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}\frac{dw}{dr} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

$$\frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Door den regel van Jacobi laat zich hieruit afleiden de nieuwe vergelijking

$$\frac{dw}{d\mu_2}\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}=0,$$

of, na deeling door $\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)$,

$$\frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

Door (63) kan (61) vereenvoudigd worden tot

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\frac{\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{\mu_1-\mu_2}{y^2}\right\}\frac{dw}{dr}=0. \quad . \; (64)$$

Wij hebben nu het stelsel (62), (63) en (64). De eerste geeft met geen van de beide andere eene nieuwe vergelijking, maar (63) en (64) te zamen geven

$$\frac{dw}{dy}-\frac{1}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0. \quad . \; (65)$$

Met behulp hiervan vervangen wij (64) door

$$\frac{dw}{dx}+\frac{2}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0. \quad . \; . \; (66)$$

Deze laatste vergelijking geeft eindelijk nog met (63) $\frac{dw}{dz}=0$.

Wij hebben zoo gekregen het stelsel

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dw}{dx}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\
&\frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\
&\frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0, \quad \frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0, \quad \frac{dw}{dz}=0.
\end{aligned}\right\} (67)$$

De laatste leert, dat geen der integralen z bevatten kan. De vier andere kunnen wij, na ze alle op eene na met

eenen onbepaalden factor vermenigvuldigd te hebben, optellen. Daardoor ontstaat eene lineaire vergelijking, wier hulpstelsel den vorm heeft

$$dx = \frac{dy}{\gamma} = \frac{d\mu_1}{-\frac{\mu_1^2}{y} + \gamma\frac{\mu_1}{y}} = \frac{d\mu_2}{\delta} =$$

$$= \frac{dr}{\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y} - \gamma\left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2r+\mu_1 s}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\,\mu_1}{\mu_2 y^2}\right) + \delta\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} + \varepsilon\mu_1} = \frac{ds}{-\varepsilon}$$

De eliminatie van de onbepaalde grootheden γ, δ en ε geeft de beide vergelijkingen

$$\mu_1^2\, dx = \mu_1\, dy - y\, d\mu_1\,,$$

$$y^2 (r + \mu_1 s)\, d\mu_1 - 3y\,(r + \mu_1 s)\,\mu_1\, dy - \mu_1 y^2 d\,(r + \mu_1 s) +$$
$$+ 2y\,\mu_1\, dy - y^2\, d\,\mu_1 - \frac{2\,\mu_1^2 d\,y}{\mu_2} + \frac{\mu_1^2\, d\,\mu_2}{\mu_2^2} = 0.$$

De eerste heeft tot integraal

$$\frac{\mu_1\, x - y}{\mu_1} = c,$$

de laatste

$$\frac{y^3\,(r + \mu_1\, s)}{\mu_1} - y^2\left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = c'.$$

Vervangen wij μ_1 door $-\frac{1}{m_1}$ en μ_2 door $-\frac{1}{m_2}$, dan hebben wij voor (55) de eerste integraal

$$y^3\,(s - m_1\, r) + y^2\,(m_1 - m_2) = \varphi\,(x + m_1\, y).$$

Eene andere is natuurlijk

$$y^3\,(s - m_2\, r) - y^2\,(m_1 - m_2) = \psi\,(x + m_2\, y).$$

Uit deze beide vergelijkingen en (55) volgt

$$r = \frac{2}{y} - \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$s = \frac{m_1 + m_2}{y} - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)},$$

$$t = \frac{2 m_1 m_2}{y} - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)}.$$

Hieruit heeft men

$$dp = - d (m_1 + m_2) = \frac{2\,dx + (m_1 + m_2)\,dy}{y} -$$

$$- \frac{\varphi - \psi}{y^3 (m_1 - m_2)} dx - \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)} dy,$$

$$dq = - d (m_1 m_2) = \frac{(m_1 + m_2)\,dx + 2\, m_1 m_2\, dy}{y} -$$

$$- \frac{m_2 \varphi - m_1 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)} dx - \frac{m_2^2 \varphi - m_1^2 \psi}{y^3 (m_1 - m_2)} dy.$$

Eindelijk stellen wij

$$x + m_1 y = \alpha, \qquad x + m_2 y = \beta,$$

zoodat

$$m_1 = \frac{\alpha - x}{y}, \qquad m_2 = \frac{\beta - x}{y}, \qquad m_1 - m_2 = \frac{\alpha - \beta}{y}.$$

Hierdoor gaan onze vergelijkingen over in

$$d\alpha + d\beta = \frac{(\varphi - \psi)(y dx - x dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} + \frac{\beta \varphi - \alpha \psi}{y^2 (\alpha - \beta)} dy, \;.\;.\; (68)$$

$$d(\alpha\beta) - x d(\alpha + \beta) = - \frac{(\varphi - \psi)(xy\,dx - x^2 dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} +$$

$$+ \frac{(\beta \varphi - \alpha \psi)(y dx - 2\, x dy)}{y^2 (\alpha - \beta)} + \frac{(\beta^2 \varphi - \alpha^2 \psi)}{y^2 (\alpha - \beta)} dy.$$

De tweede vereenvoudigt zich met behulp van de eerste tot

$$d(\alpha\beta) = \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^2(\alpha-\beta)}(ydx - xdy) + \frac{\beta^2\varphi - \alpha^2\psi}{y^2(\alpha-\beta)}dy. \quad . \ (69)$$

Lost men uit (68) en (69) dy en $ydx - xdy$ op, dan bekomt men

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{d\alpha}{\varphi} - \frac{d\beta}{\psi}, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{\alpha d\alpha}{\varphi} + \frac{\beta d\beta}{\psi}.$$

Eindelijk is

$$dz = p\,dx + q\,dy = -(m_1 + m_2)\,dx - m_1 m_2\,dy =$$

$$= \frac{2x - \alpha - \beta}{y}dx - \frac{x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta}{y^2}dy =$$

$$= \frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}(\alpha+\beta) - \frac{dy}{y^2}\alpha\beta,$$

dus

$$d\left(z - \frac{x^2}{y}\right) = -\frac{\alpha^2 d\alpha}{\varphi} - \frac{\beta^2 d\beta}{\psi}.$$

Vervangt men nog φ door $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ en ψ door $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$, dan heeft men, na uitvoering der kwadraturen,

$$\frac{1}{y} = \chi'' + \omega'', \qquad \frac{x}{y} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \omega',$$

$$\frac{x^2 - yz}{y} = \alpha^2\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega.$$

Het blijkt dus achteraf, dat de vergelijking (54) door eene betrekkelijk eenvoudige substitutie tot (24) zou kunnen worden herleid.

Neemt men nu in aanmerking, dat x, y en z tijdelijk voor $s = f$, t, en r in de plaats gesteld zijn, dan ziet men, dat in dit geval de vergelijking (1) het resultaat der eliminatie van α en β uit het volgende drietal vergelijkingen moet zijn:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{t}=\chi''(\alpha)+\omega''(\beta),\quad \frac{s}{t}=\alpha\chi''-\chi'+\beta\omega''-\omega',\\ \frac{s^2-rt}{t}=\alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega\end{aligned}\right\}.(70)$$

Het algemeene geval, waarin M_1 en M_2 willekeurige constante waarden hebben, laat zich op dezelfde wijze behandelen. Door z en y als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen, en dan weer de onafhankelijk veranderlijken door x en y en de afhankelijk veranderlijke door z voor te stellen, doet men de vergelijking (52) overgaan in

$$qr-ps-t=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{z+(M_1+M_2)x+M_1M_2y}=$$
$$=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}\dots\dots\dots\dots (71)$$

Het eerste hulpstelsel van deze vergelijking wordt, als men weer p en q in μ_1 en μ_2 uitdrukt, en t overal door middel van (71) geëlimineerd denkt,

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s)-\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2}{\mu_1^2}\frac{(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)}{G}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}-$$
$$-\left\{\frac{2\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{\mu_1\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)-\right.$$
$$-\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_2\mu_2)(r+\mu_1 s)+\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_1\mu_1)(r+\mu_2 s)-$$
$$-\frac{(M_1+M_2)\mu_1\mu_2+\mu_1+\mu_2}{G^2\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1-\mu_2)^2(1+M_1\mu_1)\times$$
$$\left.\begin{aligned}\left.\times(1+M_2\mu_2)\right\}\frac{dw}{dr}=0,\\ \frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots (72)$$

De toepassing van het theorema van JACOBI leidt hier tot nog al omslachtige berekeningen, die wij op de volgende wijze zullen vermijden.

Wij beschouwen eerst het bijzondere geval $M_1 = M_2 = 0$. Wij weten dan vooruit, dat wij tot eene uitkomst moeten geraken, daar dit geval uit het vorige wordt afgeleid door verwisseling van y met z. Wij weten tevens, dat de integra len, die wij zeker zullen moeten vinden, geen y zullen bevatten, zoodat wij van den beginne af aan $\frac{dw}{dy} = 0$ kunnen stellen. De vergelijkingen (72) gaan dan over in

$$\left.\begin{array}{l} \mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \\ \quad - \left\{ \mu_2^3 (r + \mu_2 s) - \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2^2}{\mu_1^2 z} \right\} \frac{dw}{d\mu_2} - \\ \quad - \left\{ \frac{(3\mu_1 - \mu_2)(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{z \mu_1} - \right. \\ \quad \left. - \frac{(\mu_1^2 - \mu_2^2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^3 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr}, \\ \qquad \frac{dw}{dr} \mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0. \end{array}\right\} \ldots (73)$$

Hieruit vindt men na behoorlijke vereenvoudiging als nieuwe vergelijking

$$\frac{dw}{d\mu_2} + \frac{2\mu_1 - \mu_2}{\mu_2^3 \mu_1 z} \frac{dw}{dr} = 0. \ldots \ldots \quad (74)$$

Met behulp hiervan wordt de eerste vergelijking (73) vereenvoudigd tot

$$\mu_2 \frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1 - \mu_2}{z} \frac{dw}{d\mu_1} - \left\{ \frac{\mu_1(r + \mu_2 s) + (3\mu_2 - \mu_1)(r + \mu_1 s)}{\mu_1 z} - \right.$$
$$\left. - \frac{(\mu_1 - 2\mu_2)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1^2 \mu_2^2 z^2} \right\} \frac{dw}{dr} = 0. \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

Uit (74) en (75) brengt de bewerking van JACOBI de volgende vergelijking te voorschijn

$$\frac{dw}{dz}+\frac{1}{z}\frac{dw}{d\mu_1}-\left\{\frac{3r+4\mu_1 s}{\mu_1 z}+\frac{3\mu_1-2\mu_2}{\mu_1^2\mu_2^2 z^2}\right\}\frac{dw}{dr}=0, \quad ..(76)$$

met behulp waarvan (75) nog tot

$$\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1}{z}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1 s}{z}+\frac{1}{\mu_2^2 z^2}\right)\frac{dw}{dr}=0. \quad ..(77)$$

vereenvoudigd wordt. Nieuwe vergelijkingen behoeven wij niet te zoeken. Wij weten vooruit met zekerheid, dat dit zoeken een negatief resultaat zou hebben.

Behandelen wij het stelsel bestaande uit de tweede vergelijking (73) uit (74), (76) en (77) op dezelfde wijze als het stelsel (67), dan vinden wij de beide gemeenschappelijke integralen

$$r-\mu_1 z=c \quad \text{en} \quad \mu_1^3 z^3(r+\mu_1 s)+\mu_1^2 z^2\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2^2}=c'.$$

In het algemeene geval vindt men met weinig moeite, dat (72) de integraal

$$\frac{x(1-\mu_1 M_2)+y M_2-z\mu_1}{1+M_1\mu_1}=c$$

heeft.

Vergelijkt men verder de integralen in de twee afzonderlijk behandelde bijzondere gevallen gevonden, dan dringt zich het vermoeden op, dat er in het algemeen eene integraal zal zijn van den vorm

$$G^3(r+\mu_1 s)u+G^2 v=\text{constant},$$

waarin u en v functiën van μ_1 en μ_2 alleen zijn. Aan de tweede vergelijking (72) is hierdoor natuurlijk voldaan. Voert men de hier gelijk aan eene constante gesteldeuitdrukking voor w in de eerste vergelijking (72) in, en rangschikt het eerste lid naar de machten van G, dan ziet men, dat de coëfficiënt van G^3 de waarde $\mu_2^2(r+\mu_2 s)(r+\mu_1 s)\dfrac{du}{d\mu_2}$

heeft. Zal deze gelijk aan nul zijn, dan kan u de μ_2 niet bevatten. De coëfficiënt van G^2 wordt dan

$$(r+\mu_1 s)(1+M_2\mu_2)\frac{(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1\mu_2}\left\{(3-M_1\mu_1)u-(1+M_1\mu_1)\mu_1\frac{du}{d\mu_1}\right\}-$$

$$-(r+\mu_2 s)\left\{\mu_2^2\frac{dv}{d\mu_2}+\frac{2\mu_1-\mu_2+M_2\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2}u(1+M_1\mu_1)\right\}.$$

Zal dit gelijk aan nul zijn onafhankelijk van r en s, dan moet vooreerst

$$(1+M_1\mu_1)\mu_1\frac{du}{d\mu_1}=u(3-M_1\mu_1)$$

zijn, waaruit, afgezien van eenen constanten factor, volgt

$$u=\frac{\mu_1^3}{(1+M_1\mu_1)^4}.$$

Verder is

$$\frac{dv}{d\mu_2}=-\frac{(2\mu_1-\mu_2+M_2\mu_1\mu_2)\mu_1^2}{\mu_2^3(1+M_1\mu_1)^3},$$

dus

$$v=\frac{\mu_1^2(\mu_1-\mu_2+M_2u_1\mu_2)}{(1+M_1\mu_1)^3\mu_2^2}+F(\mu_1).$$

Eindelijk is de coëfficiënt van G

$$2v\frac{(1+M_1\mu_2)(1+M_2\mu_2)}{\mu_2}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dv}{d\mu_1}+$$

$$+\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2}{\mu_1^2}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dv}{d\mu_2}+$$

$$+u\frac{(M_1+M_2)\mu_1\mu_2+\mu_1+\mu_2}{\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1-\mu_2)^2(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2).$$

Men ziet dadelijk, dat v door $\mu_1-\mu_2$ deelbaar zal moeten zijn, zoodat $F(\mu_1)=-\frac{M_2\mu_1^2}{(1+M_1\mu_1)^3}$ zal moeten wezen, waardoor v de waarde

$$v = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}(\mu_1 - \mu_2)\frac{(1 + M_2\,\mu_2)}{(1 + M_1\,\mu_1)^3}$$

verkrijgt, en deze waarde blijkt werkelijk te voldoen, zoodat

$$\frac{G^3(r+\mu_1 s)\mu_1^3}{(1 + M_1\,\mu_1)^4} + \frac{G^2\,\mu_1^2\,(\mu_1-\mu_2)\,(1 + M_2\,\mu_2)}{\mu_2^2\,(1 + M_1\,\mu_1)^3} = c'$$

eene integraal van (72) is.

Vervangt men μ_1 door $-\frac{1}{m_1}$ en μ_2 door $-\frac{1}{m_2}$ en stelt

$$\frac{x\,(m_1 + M_2) + y\,m_1\,M_2 + z}{m_1 - M_1} = \alpha,$$

dan heeft men dus als eerste integraal van (71)

$$s - m_1\,r = -\frac{(m_1-m_2)\,(m_1-M_1)\,(m_2-M_2)}{G} + \frac{(m_1-M_1)^4\varphi(\alpha)}{G^3},$$

waar wij onmiddelijk deze kunnen bijvoegen:

$$s - m_2\,r = \frac{(m_1-m_2)\,(m_1-M_1)\,(m_2-M_2)}{G} + \frac{(m_2-M_2)^4\,\psi\,(\beta)}{G^3},$$

als

$$\frac{x\,(m_2 + M_1) + y\,m_2\,M_1 + z}{m_2 - M_2} = \beta$$

gesteld wordt.

Uit deze beide vergelijkingen en (71) volgt nu

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{(m_1-M_1)^4\varphi-(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)}, \\ s &= \frac{(m_1+m_2)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{m_2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)}, \\ t &= \frac{2m_1m_2(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G} - \frac{m_2^2(m_1-M_1)^4\varphi-m_1^2(m_2-M_2)^4\psi}{G^3(m_1-m_2)} \end{aligned}\right\}(78)$$

Uit de bepaling van α en β volgt

wanneer μ_1 en μ_2 de wortels zijn der karakteristieke vergelijking

$$q\,\mu^2 + p\,\mu - 1 = 0. \quad \dots\dots\dots \quad (58)$$

De vergelijking van (58) met (56) leert, dat $\mu_1 = -\frac{1}{m_1}$, $\mu_2 = -\frac{1}{m_2}$ is.

In de eerste vergelijking (57) drukken wij p en q in μ_1 en μ_2 uit door middel van de betrekkingen

$$q = -\frac{1}{\mu_1\,\mu_2}, \quad p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\,\mu_2}. \quad \dots\dots \quad (59)$$

Hierbij komen de volgende uit (59) gemakkelijk af te leiden vergelijkingen te pas:

$$\left.\begin{array}{l}
p^2 + 4q = \dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2\,\mu_2^2}, \quad \dfrac{d\mu_1}{dp}\dfrac{p^2+4q}{q} = -\mu_1(\mu_1-\mu_2), \\[2ex]
\dfrac{d\mu_1}{dp} = \dfrac{\mu_1^2\,\mu_2}{\mu_1-\mu_2}, \quad \dfrac{d\mu_2}{dp} = -\dfrac{\mu_2^2\,\mu_1}{\mu_1-\mu_2}, \\[2ex]
r + 2\mu_2 s + \mu_2^2 t = \dfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1}\left((r+\mu_2 s) - \dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1^2 y}\right), \\[2ex]
r + (\mu_1+\mu_2)s + \mu_1\mu_2 t = -\dfrac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\mu_1\,\mu_2 y}.
\end{array}\right\} \dots (60)$$

Met behulp hiervan gaat het stelsel (57) over in

$$\frac{dw}{dx} + \mu_2\frac{dw}{dy} + \frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz} - \frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1} - \left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s) - \frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2^2}{\mu_1 y}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}$$
$$- \frac{2\mu_1(r+\mu_2 s) + 2\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}\frac{dw}{dr} = 0, \quad \dots\dots \quad (61)$$

$$\frac{dw}{dr}\mu_1 - \frac{dw}{ds} = 0. \quad \dots\dots\dots\dots \quad (62)$$

Door den regel van JACOBI laat zich hieruit afleiden de nieuwe vergelijking

$$\frac{dw}{d\mu_2}\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}=0,$$

of, na deeling door $\mu_2^2(\mu_1-\mu_2)$,

$$\frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0. \quad \ldots\ldots\ldots (63)$$

Door (63) kan (61) vereenvoudigd worden tot

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1(\mu_1-\mu_2)}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\frac{\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{\mu_1-\mu_2}{y^2}\right\}\frac{dw}{dr}=0. \,. (64)$$

Wij hebben nu het stelsel (62), (63) en (64). De eerste geeft met geen van de beide andere eene nieuwe vergelijking, maar (63) en (64) te zamen geven

$$\frac{dw}{dy}-\frac{1}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0. \,. (65)$$

Met behulp hiervan vervangen wij (64) door

$$\frac{dw}{dx}+\frac{2}{\mu_2^2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0. \,. \,. (66)$$

Deze laatste vergelijking geeft eindelijk nog met (63) $\frac{dw}{dz}=0$.

Wij hebben zoo gekregen het stelsel

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dw}{dx}-\frac{\mu_1^2}{y}\frac{dw}{d\mu_1}+\left(\frac{\mu_1}{y^2}-\frac{\mu_1 r}{y}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\[2mm] \frac{dw}{dz}+\frac{\mu_1}{y}\frac{dw}{d\mu_1}-\left(\frac{\mu_1 s}{y}+\frac{2(r+\mu_1 s)}{y}-\frac{1}{y^2}+\frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right)\frac{dw}{dr}=0,\\[2mm] \frac{dw}{d\mu_2}+\frac{dw}{dr}\frac{\mu_1}{\mu_2^2 y}=0,\quad \frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0,\quad \frac{dw}{dz}=0.\end{array}\right\} (67)$$

De laatste leert, dat geen der integralen z bevatten kan. De vier andere kunnen wij, na ze alle op eene na met

eenen onbepaalden factor vermenigvuldigd te hebben, optellen. Daardoor ontstaat eene lineaire vergelijking, wier hulpstelsel den vorm heeft

$$dx = \frac{dy}{\gamma} = \frac{d\mu_1}{-\frac{\mu_1^2}{y} + \gamma \frac{\mu_1}{y}} = \frac{d\mu_2}{\delta} =$$

$$= \frac{dr}{\frac{\mu_1}{y^2} - \frac{\mu_1 r}{y} - \gamma\left(\frac{\mu_1 s}{y} + \frac{2r + \mu_1 s}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{2\mu_1}{\mu_2 y^2}\right) + \delta \frac{\mu_1}{\mu_2^2 y} + \varepsilon \mu_1} = \frac{ds}{-\varepsilon}$$

De eliminatie van de onbepaalde grootheden γ, δ en ε geeft de beide vergelijkingen

$$\mu_1^2\, dx = \mu_1\, dy - y\, d\mu_1\,,$$

$$y^2 (r + \mu_1 s)\, d\mu_1 - 3y (r + \mu_1 s)\, \mu_1\, dy - \mu_1 y^2 d(r + \mu_1 s) +$$
$$+ 2y\, \mu_1\, dy - y^2\, d\mu_1 - \frac{2\mu_1^2 d y}{\mu_2} + \frac{\mu_1^2\, d\mu_2}{\mu_2^2} = 0.$$

De eerste heeft tot integraal

$$\frac{\mu_1 x - y}{\mu_1} = c,$$

de laatste

$$\frac{y^3 (r + \mu_1 s)}{\mu_1} - y^2 \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = c'.$$

Vervangen wij μ_1 door $-\frac{1}{m_1}$ en μ_2 door $-\frac{1}{m_2}$, dan hebben wij voor (55) de eerste integraal

$$y^3 (s - m_1 r) + y^2 (m_1 - m_2) = \varphi (x + m_1 y).$$

Eene andere is natuurlijk

$$y^3 (s - m_2 r) - y^2 (m_1 - m_2) = \psi (x + m_2 y).$$

Uit deze beide vergelijkingen en (55) volgt

$$r = \frac{2}{y} - \frac{\varphi - \psi}{y^3(m_1 - m_2)},$$

$$s = \frac{m_1 + m_2}{y} - \frac{m_2\varphi - m_1\psi}{y^3(m_1 - m_2)},$$

$$t = \frac{2m_1m_2}{y} - \frac{m_2^2\varphi - m_1^2\psi}{y^3(m_1 - m_2)}.$$

Hieruit heeft men

$$dp = -d(m_1 + m_2) = \frac{2dx + (m_1 + m_2)dy}{y} -$$

$$- \frac{\varphi - \psi}{y^3(m_1 - m_2)}dx - \frac{m_2\varphi - m_1\psi}{y^3(m_1 - m_2)}dy,$$

$$dq = -d(m_1m_2) = \frac{(m_1 + m_2)dx + 2m_1m_2dy}{y} -$$

$$- \frac{m_2\varphi - m_1\psi}{y^3(m_1 - m_2)}dx - \frac{m_2^2\varphi - m_1^2\psi}{y^3(m_1 - m_2)}dy.$$

Eindelijk stellen wij

$$x + m_1y = \alpha, \qquad x + m_2y = \beta,$$

zoodat

$$m_1 = \frac{\alpha - x}{y}, \quad m_2 = \frac{\beta - x}{y}, \quad m_1 - m_2 = \frac{\alpha - \beta}{y}.$$

Hierdoor gaan onze vergelijkingen over in

$$d\alpha + d\beta = \frac{(\varphi - \psi)(ydx - xdy)}{y^2(\alpha - \beta)} + \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^2(\alpha - \beta)}dy, \quad . \; . \; (68)$$

$$d(\alpha\beta) - xd(\alpha + \beta) = -\frac{(\varphi - \psi)(xy\,dx - x^2dy)}{y^2(\alpha - \beta)} +$$

$$+ \frac{(\beta\varphi - \alpha\psi)(ydx - 2xdy)}{y^2(\alpha - \beta)} + \frac{(\beta^2\varphi - \alpha^2\psi)}{y^2(\alpha - \beta)}dy.$$

De tweede vereenvoudigt zich met behulp van de eerste tot

$$d(\alpha\beta) = \frac{\beta\varphi - \alpha\psi}{y^2(\alpha-\beta)}(ydx - xdy) + \frac{\beta^2\varphi - \alpha^2\psi}{y^2(\alpha-\beta)}dy. \quad . (69)$$

Lost men uit (68) en (69) dy en $ydx - xdy$ op, dan bekomt men

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{d\alpha}{\varphi} - \frac{d\beta}{\psi}, \quad \frac{ydx - xdy}{y^2} = \frac{\alpha d\alpha}{\varphi} + \frac{\beta d\beta}{\psi}.$$

Eindelijk is

$$dz = p\,dx + q\,dy = -(m_1 + m_2)\,dx - m_1 m_2\,dy =$$

$$= \frac{2x - \alpha - \beta}{y}dx - \frac{x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta}{y^2}dy =$$

$$= \frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{y^2}(\alpha+\beta) - \frac{dy}{y^2}\alpha\beta,$$

dus

$$d\left(z - \frac{x^2}{y}\right) = -\frac{\alpha^2\,d\alpha}{\varphi} - \frac{\beta^2\,d\beta}{\psi}.$$

Vervangt men nog φ door $\frac{1}{\chi'''(\alpha)}$ en ψ door $\frac{1}{\omega'''(\beta)}$, dan heeft men, na uitvoering der kwadraturen,

$$\frac{1}{y} = \chi'' + \omega'', \qquad \frac{x}{y} = \alpha\chi'' - \chi' + \beta\omega'' - \omega',$$

$$\frac{x^2 - yz}{y} = \alpha^2\chi'' - 2\alpha\chi' + 2\chi + \beta^2\omega'' - 2\beta\omega' + 2\omega.$$

Het blijkt dus achteraf, dat de vergelijking (54) door eene betrekkelijk eenvoudige substitutie tot (24) zou kunnen worden herleid.

Neemt men nu in aanmerking, dat x, y en z tijdelijk voor $s = f$, t, en r in de plaats gesteld zijn, dan ziet men, dat in dit geval de vergelijking (1) het resultaat der eliminatie van α en β uit het volgende drietal vergelijkingen moet zijn;

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{t}=\chi''(\alpha)+\omega''(\beta),\quad \frac{s}{t}=\alpha\chi''-\chi'+\beta\omega''-\omega',\\ \frac{s^2-rt}{t}=\alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega\end{array}\right\}.(70)$$

Het algemeene geval, waarin M_1 en M_2 willekeurige constante waarden hebben, laat zich op dezelfde wijze behandelen. Door z en y als onafhankelijk veranderlijken aan te nemen, en dan weer de onafhankelijk veranderlijken door x en y en de afhankelijk veranderlijke door z voor te stellen, doet men de vergelijking (52) overgaan in

$$qr-ps-t=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{z+(M_1+M_2)x+M_1M_2y}=$$
$$=\frac{(p^2+4q)(m_1-M_1)(m_2-M_2)}{G}\dots\dots\dots\dots(71)$$

Het eerste hulpstelsel van deze vergelijking wordt, als men weer p en q in μ_1 en μ_2 uitdrukt, en t overal door middel van (71) geëlimineerd denkt,

$$\frac{dw}{dx}+\mu_2\frac{dw}{dy}+\frac{1}{\mu_2}\frac{dw}{dz}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)\frac{dw}{d\mu_1}-$$
$$-\left\{\mu_2^2(r+\mu_2 s)-\frac{(\mu_1-\mu_2)\mu_2(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)}{\mu_1^2\,G}\right\}\frac{dw}{d\mu_2}-$$
$$-\left\{\frac{2\mu_1(r+\mu_2 s)+2\mu_2(r+\mu_1 s)}{\mu_1\mu_2 G}(1+M_1\mu_1)(1+M_2\mu_2)-\right.$$
$$-\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_2\mu_2)(r+\mu_1 s)+\frac{\mu_1-\mu_2}{G\mu_1\mu_2}(1+M_1\mu_1)(r+\mu_2 s)-$$
$$-\frac{(M_1+M_2)\mu_1\mu_2+\mu_1+\mu_2}{G^2\mu_1^3\mu_2^3}(\mu_1-\mu_2)^2(1+M_1\mu_1)\times$$
$$\left.\begin{array}{l}\times(1+M_2\mu_2)\Big\}\frac{dw}{dr}=0,\\ \qquad\frac{dw}{dr}\mu_1-\frac{dw}{ds}=0.\end{array}\right\}\dots\dots\dots(72)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r+2Ms+M^2t} &= -\chi''-\omega'', \\
\frac{s+Mt}{r+2Ms+M^2t} &= -\alpha\chi''+\chi'-\beta\omega''+\omega', \\
\frac{rt-s^2}{r+2Ms+M^2t} &= \alpha^2\chi''-2\alpha\chi'+2\chi+\beta^2\omega''-2\beta\omega'+2\omega,
\end{aligned}\right\} \quad (93)$$

hetzij uit

$$\left.\begin{aligned}
& r+(M_1+M_2)s+M_1M_2t= \\
& \quad = \frac{(M_1-M_2)\chi'^{3/2}\omega'^{3/2}}{\omega'\chi''\left\{\frac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\frac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}}, \\
& r+2M_1s+M_1^2t= \\
& \quad =(M_1-M_2)\left\{\beta+\frac{2\omega'}{\omega''}+\frac{\omega'^3}{\omega''^2\left\{\frac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\frac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}}\right\} \\
& r+2M_2s+M_2^2t= \\
& \quad =(M_2-M_1)\left\{\alpha+\frac{2\chi'}{\chi''}-\frac{\chi'^3}{\chi''^2\left\{\frac{\omega\omega''-2\omega'^2}{4\omega''}-\frac{\chi\chi''-2\chi'^2}{4\chi''}\right\}}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (94)$$

De C is hierbij nog altijd gelijk aan nul ondersteld; de wijziging, die in het tegenovergestelde geval noodig is, is gemakkelijk aan te brengen.

De integratie hangt nu af van het stelsel (47). Telt men de eerste vier vergelijkingen van dat stelsel bij elkaar op, na drie er van met onbepaalde factoren vermenigvuldigd te hebben, dan komt er eene vergelijking, wier LAGRANGE's hulpstelsel is

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{\gamma}=\frac{dp}{r-m_1m_2L+\gamma(s+m_1L)+\delta(K_1-m_1)}=$$
$$\frac{dq}{(s+m_2L)+\gamma(t-L)+\delta}=\frac{dr}{\varepsilon m_1^2}=\frac{ds}{-\varepsilon m_1}=\frac{dt}{\varepsilon}. \quad . \ (95)$$

Wij elimineeren de onbepaalde coëfficiënten γ, δ en ε, en

vervangen $K_1 - m_1$ door hare waarde $- M_1$, zoodoende vinden wij

$$\left.\begin{aligned} dp + M_1 dq = dx\,\{r + M_1 s + (M_1 - m_1)\, m_2 L\} + \\ + dy\,\{s + M_1 t - (M_1 - m_1)\, L\} = 0, \\ ds + m_1\, dt = 0, \qquad dr - m_1^2\, dt = 0, \end{aligned}\right\} \ldots (96)$$

Daar

$$\varDelta (L m_1) - M_1 \varDelta L = m_1 - M_1$$

is, geeft de laatste der vergelijkingen (96)

$$m_1 = \frac{d\,\{L\,(m_1 - M_1)\}}{dt} + M_1,$$

en dit vermenigvuldigd met dt geeft in verband met de tweede van (96)

$$s + L\,(m_1 - M_1) + M_1 t = c.$$

als eerste integraal van het stelsel (96).

De eerste vergelijking (96) heeft nu in verband hiermede tot integraal

$$p + M_1 q - x\,\{r + M_1 s - (m_1 - M_1) m_2 L\} - y\,\{s + M_1 t + (m_1 - M_1) L\} = c'.$$

Volgens (50) en (51) is echter

$$L = \frac{r + (M_1 + M_2)\, s + M_1 M_2\, t}{(m_1 - M_1)(m_2 - M_2)}.$$

Dit invoerende geven wij aan de gevonden integralen den vorm

$$\frac{r + (M_1 + m_2)\, s + M_1 m_2\, t}{m_2 - M_2} = c,$$

$$p + M_1 q + (M_2 x - y)\,\frac{r + (M_1 + m_2)\, s + M_1 m_2\, t}{m_2 - M_2} = c'.$$

Letten wij op de beteekenis β in (93) en (94), dan zien wij, dat eene eerste integraal van de te integreeren vergelijking is

$$p + M_1 q + \beta (M_2 x - y) = \varphi (\beta) \quad . \; . \; . \; . \; (97)$$

Eene andere is dan natuurlijk

$$p + M_2 q + \alpha (M_1 x - y) = \psi (\alpha) \quad . \; . \; . \; . \; (98)$$

Bij het zoeken van de eindintegraal moeten wij weer onderscheid maken tusschen de gevallen waarin M_1 en M_2 gelijke en ongelijke waarden hebben. Wij onderstellen in de eerste plaats, dat $M_1 = M_2 = M$ is; dan volgt uit (97) en (98)

$$p + M q = \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}, \quad y - M x = \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta} \quad . \; (99)$$

Verder is

$$dp + M dq = (r + Ms)dx + (s + Mt)dy = (s + Mt)(dy - M dx) + G dx ,$$

dus

$$dx = \frac{dp + M dq - (s + M t)(dy - M dx)}{G} \quad . \; .(100)$$

Vervolgens heeft men

$$dq = s dx + t dy = (s + Mt)dx + t(dy - M\,dx) = \frac{s + Mt}{G}(dp + M\,dq) -$$

$$- \left\{ \frac{(s+Mt)^2}{G} - t \right\} (dy - M dx) = \frac{s+Mt}{G}(dp + M dq) - \frac{s^2 - rt}{G}(dy - M dx) . (101)$$

Uit (100) volgt

$$x = \frac{p + M q}{G} - \frac{s + M t}{G}(y - M x) - \int (p + M q)\, d\,\frac{1}{G} +$$

$$+ \int (y - M x)\, d\,\frac{s + M t}{G} = - \frac{\alpha\psi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi'' + \omega'') +$$

$$+ \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\chi'' - \chi + \beta\omega'' - \omega) + \int \frac{\alpha\varphi - \beta\psi}{\alpha - \beta}(\chi''' d\alpha + \omega''' d\beta) -$$

$$- \int \frac{\varphi - \psi}{\alpha - \beta}(\alpha\,\chi'''\,d\alpha + \beta\,\omega'''\,d\beta) =$$

$$- \psi\,\chi'' - \varphi\,\omega'' - \frac{(\varphi - \psi)(\chi' + \omega')}{\alpha - \beta} + \int \psi\,\chi'''\,d\alpha + \int \varphi\,\omega'''\,d\beta$$

Op dezelfde wijze volgt uit (101)

$$q = -\psi(\alpha\chi'' - \chi') - \varphi(\beta\omega'' - \omega') -$$

$$- \frac{(\varphi-\psi)(\alpha\chi' - 2\chi + \beta\omega' - 2\omega)}{\alpha - \beta} + \int \alpha\psi\chi''' d\alpha + \int \beta\varphi\omega''' d\beta.$$

Eindelijk is

$$dz = p\,dx + q\,dy = (p + Mq)\,dx + q\,d(y - Mx),$$

dus

$$z = q(y-Mx) + \int (p+Mq)dx - \int (y-Mx)dq = q(y-Mx) +$$

$$+ \int \Bigg[\frac{(p+Mq)\,d\,(p+Mq) - (s+Mt)\,\{(p+Mq)\,d\,(y-Mx) +}{G}$$

$$\frac{+ (y-Mx)d(p+Mq)\} + (s^2-rt)(y-Mx)d(y-Mx)}{G}\Bigg] = q(y-Mx) +$$

$$+ \frac{(p+Mq)^2 - 2(s+Mt)(p+Mq)(y-Mx) + (s^2-rt)(y-Mx)^2}{2G} -$$

$$- \int \frac{(p+Mq)^2}{2}\,d\frac{1}{G} + \int (p+Mq)(y-Mx)\,d\frac{s+Mt}{G} -$$

$$- \int \frac{(y-Mx)^2}{2}\,d\frac{(s^2-rt)}{G} = -\frac{\chi''\psi^2}{2} - \frac{\omega''\varphi^2}{2} - \frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}(\alpha\chi''\psi + \beta\omega''\varphi) -$$

$$- \left(\frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\right)^2 (\alpha\chi' + \beta\omega' - \chi - \omega) + \tfrac{1}{2}\int \alpha^2\chi'''\psi^2 d\alpha + \tfrac{1}{2}\int \beta^2\omega'''\varphi^2 d\beta +$$

$$+ \frac{\varphi-\psi}{\alpha-\beta}\left\{\int \alpha\,\chi'''\,\psi^2\,d\alpha + \int \beta\,\omega'''\,\varphi^2\,d\beta\right\}$$

Hiermede zijn weer x, y en z in α en β uitgedrukt.

Dit geval kan door eene betrekkelijk eenvoudige substitutie tot een vroeger behandeld geval worden teruggebracht.

Ook in het algemeenere geval $M_1 \gtrless M_2$ zou de integratie zoo kunnen worden uitgevoerd, dat de drie veranderlijken x, y en z in α en β werden uitgedrukt. Er is daartegen geen ander bezwaar dan de omvang der berekeningen en de samengesteldheid der uitkomsten. Dit bezwaar van practischen

aard dwingt ons, ons te bepalen tot het aangeven van den te volgen weg, zonder de berekeningen uit te voeren.

In de eerste plaats geeft dan de differentiatie van de vergelijkingen (97) en (98).

$$(r + M_1 s + M_2 \beta) dx + (s + M_1 t - \beta) dy = (y - M_2 x + \varphi') d\beta.$$
$$(r + M_2 s + M_1 \alpha) dx + (s + M_2 t - \alpha) dy = (y - M_1 x + \psi') d\alpha.$$

Let men op (81), en neemt de gewijzigde notatie in aanmerking, dan ziet men, dat deze vergelijkingen korter aldus kunnen worden geschreven.

$$\left.\begin{array}{l} V_2\, dx + U_2\, dy = (y - M_2\, x + \varphi')\, d\beta \\ V_1\, dx + U_1\, dy = (y - M_1\, x + \psi')\, d\alpha \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (102)$$

Met behulp van (82) en (83) kunnen V_1, V_2, U_1 en U_2 in H_1, H_2 en G worden uitgedrukt, die op hare beurt bekende functien van α en β zijn. Ook U_1 V_1, U_2 en V_2 kunnen dus in α en β worden uitgedrukt, en er blijft niets te doen over dan de bovenstaande simultane lineaire vergelijkingen te integreeren, een proces, dat tot enkel kwadraturen kan worden teruggebracht. Hierdoor zijn x en y in α en β uitgedrukt. Uit (97) en (98) vindt men dan p en q en eindelijk z door integratie van $dz = p\,dx + q\,dy$.

Is eene differentiaalvergelijking van den vorm (1) ter integratie gegeven, en heeft men zich door haar aan (51) te toetsen overtuigd, dat zij tot dit geval van integreerbaarheid behoort, dan kan men òf de waarde van r, s en t uit (94) in de vergelijking overbrengen, en zoodoende de functien χ en ω bepalen, waardoor dan tevens weer U_1, U_2, V_1 en V_2 in α en β zijn uitgedrukt, òf men kan uit de gegeven vergelijking en de twee vergelijkingen die α en β bepalen r. s en t oplossen of ook r, s, t, α en β alle vijf in twee naar omstandigheden te kiezen nieuwe onafhankelijk veranderlijken uitdrukken. Het verdere hangt dan weer af van de integratie van het lineaire stelsel (102), die altijd mogelijk is.

Nog blijft ter behandeling over het geval, dat aan de

vergelijking (48) is voldaan, zonder dat $K_1 - m_1$ eene constante waarde heeft. Het is ons niet gelukt tot eene behandeling van dit geval te geraken, even volledig, als die van de voorgaande gevallen. Voert men in (48) en de vergelijking, die daaruit door verwisseling van m_1 met m_2 kan worden afgeleid de R en T in, op dezelfde wijze, als wij dat in al de voorgaande gevallen hebben gedaan, dan ontstaan twee zeer ingewikkelde vergelijkingen, die, als differentiaalvergelijkingen in r en t als onafhankelijk en s als afhankelijk veranderlijken beschouwd, van de vierde orde zijn. Of deze ook hier weer, even als in het voorgaande geval, in ééne vergelijking van lagere orde kunnen worden samengevat, en zoo ja, of deze verder geïntegreerd kan worden, is ons niet gelukt uit te maken.

Gemakkelijk kunnen echter ook in dit geval de eerste integralen worden bepaald. Op dezelfde wijze als in het voorgaande geval wordt uit (47) het stelsel (95) afgeleid, en de eliminatie van γ, δ en ε verschaft ons het stelsel

$$\left.\begin{array}{l} dp + (m_1 - K_1)\,dq = dx\,\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} + \\ \quad + dy\,\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = 0, \\ dr + m_1\,ds = 0, \qquad dr - m_1^2\,dt = 0. \end{array}\right\} . (103)$$

De laatste vergelijking geeft in verband met (48) de integraal

$$m_1 - K_1 = c,$$

en in verband hiermede geeft de eerste

$$p - (m_1 - K_1)q - x\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} - y\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = c',$$

zoodat de eerste integralen zijn

$$\left.\begin{array}{l} p + (m_1 - K_1)\,q - x\,\{r + m_1 s - K_1(s + m_2 L)\} - \\ \quad - y\,\{s + m_1 t - K_1(t - L)\} = \varphi\,(m_1 - K_1), \\ p + (m_2 - K_2)\,q - x\,\{r + m_2 s - K_2(s + m_1 L)\} - \\ \quad - y\{s + m_2 t - K_2(t - L)\} = \psi\,(m_2 - K_2). \end{array}\right\} \ldots (104)$$

De verdere integratie wordt natuurlijk eerst mogelijk, als

de te integreeren differentiaalvergelijking gegeven is. Zij hangt ook hier weer af van een stelsel van simultane lineaire differentiaalvergelijkingen.

Mogt ééne van de waarde van $m_1 - K_1$ en $m_2 - K_2$ constant zijn, dan zou eene der eerste integralen den vorm (97) of (98) de andere den vorm (104) hebben.

Wij hebben overal de vergelijking (1) naar s opgelost ondersteld. Men zal gemakkelijk inzien, dat, als de vergelijking in den vorm

$$f(r, s, t) = 0$$

gegeven was, men overal slechts R door $-\dfrac{\frac{df}{dr}}{\frac{df}{ds}}$ en T door $-\dfrac{\frac{df}{dt}}{\frac{df}{ds}}$ behoeft te vervangen, en evenzoo voor de hoogere afgeleiden. Eén geval is echter hierdoor van ons onderzoek uitgesloten geworden, namelijk het geval, dat de differentiaalvergelijking de s niet bevat. Ook dat geval willen wij nu nog onderzoeken, en onderstellen daarbij de vergelijking opgelost naar r, zoodat te integreeren is de vergelijking

$$r = F(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

m_1 is dan gelijk aan $-m_2$, en eene functie van t; wij zullen haar m noemen. De vergelijkingen (39) worden dan

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dw}{dx} - m\dfrac{dw}{dy} + (p - mq)\dfrac{dw}{dz} + (r - ms)\dfrac{dw}{dp} + (s - mt)\dfrac{dw}{dq} = 0, \\ m^2\dfrac{dw}{dr} - m\dfrac{dw}{ds} + \dfrac{dw}{dt} = 0. \end{array}\right\} \quad (106)$$

Door de bewerking van Jacobi hierop toe te passen, heeft men

$$-\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dy} - q\frac{dm}{dt}\frac{dw}{dz} + \left(2m^2 - s\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dp} - \left(2m + t\frac{dm}{dt}\right)\frac{dw}{dq} = 0. \quad (107)$$

Deze vergelijking wordt identiek als $m = 0$ is, en dus de gegeven vergelijking van den vorm

$$r = a.$$

Er zijn in dat geval zes integralen van (106), vijf behalve $r =$ constant, namelijk

$$y = c,\ \ s = c',\ \ p - rx = c'',\ \ z - px + {}^1/_2 rx^2 = c''',\ \ q - sx = c''''.$$

Uit de eerste, derde en vierde vindt men

$$p - rx = \varphi(y), \qquad z - px + {}^1/_2 rx^2 = \psi(y),$$

en de eliminatie van p en r geeft

$$z = {}^1/_2\, a\, x^2 + x\, \varphi(y) + \psi(y),$$

zooals men gemakkelijk ook op allerlei andere wijzen vindt.

Is m niet gelijk aan nul, maar aan eene andere constante waarde, dan heeft de differentiaalvergelijking den vorm

$$r = at + b.$$

De vergelijking (107) gaat dan over in

$$m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (108)$$

en tengevolge hiervan wordt de eerste vergelijking (106) vereenvoudigd tot

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + (p - mq)\frac{dw}{dz} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0,$$

Deze geeft met (108)

$$\frac{dw}{dz} = 0.$$

Nieuwe vergelijkingen kan men uit deze niet meer afleiden, zoodat het stelsel geworden is

$$\frac{dw}{dx} - m\frac{dw}{dy} + r\frac{dw}{dp} - mt\frac{dw}{dq} = 0, \qquad m\frac{dw}{dp} - \frac{dw}{dq} = 0,$$

$$m^2\frac{dw}{dr} - m\frac{dw}{ds} + \frac{dw}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dz} = 0.$$

Er moeten hier dus buiten de gegeven vergelijking drie integralen zijn. Zij zijn

$$y + mx = c, \qquad s + mt = c', \qquad p + mq - (r - m^2t)\,x = c''.$$

Daar $r - m^2t = b$ is, volgt hieruit de eerste integraal

$$p + mq - bx = \varphi\,(y + mx),$$

terwijl het andere hulpstelsel op dezelfde wijze geeft

$$p - mq - bx = \psi\,(y - mx)$$

Hieruit is

$$p - bx = {}^1/_2\varphi + {}^1/_2\psi\,,$$

$$q = \frac{\varphi - \psi}{2m},$$

dus

$$dz = bx\,dx + {}^1/_2\,(\varphi + \psi)\,dx + \frac{\varphi - \psi}{2m}\,dy.$$

Nieuwe willekeurige functiën invoerende heeft men hieruit

$$z = {}^1/_2\,bx^2 + \chi\,(y + mx) + \omega\,(y - mx).$$

Is m eene werkelijke functie van t, dan kan men (107) door $\frac{dm}{dt}$ deelen, waardoor zij overgaat in

$$\frac{dw}{dy} + q\frac{dw}{dz} + \left(s - \frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp} + \left(t + \frac{2\,m}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dq} = 0,$$

terwijl met behulp hiervan de eerste vergelijking (106) veranderd wordt in

$$\frac{dw}{dx}+p\frac{dw}{dz_4}+\left(r-\frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{dp}+\left(s+\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,q}=0.$$

De laatste twee vergelijkingen geven te zamen nog

$$\frac{dw}{dz}=0,$$

terwijl zij, met de tweede vergelijking (106) gecombineerd, opleveren

$$-\left(m+\frac{d}{dt}\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,p}+\left(1+\frac{d}{dt}\frac{2\,m}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,q}=0,$$

$$\left(m^2-\frac{d}{dt}\frac{2\,m^3}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,p}+\left(-m+\frac{d}{dt}\frac{2\,m^2}{\frac{dm}{dt}}\right)\frac{dw}{d\,q}=0.$$

Men overtuigt zich gemakkelijk, dat de laatste vergelijking een gevolg is van de voorlaatste, zoodat wij nu het volgende stelsel van vijf vergelijkingen hebben:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dw}{d\,x}+(r-m^2K)\,\frac{dw}{dp}+(s+m\,K)\,\frac{dw}{d\,q}=0,\\ \frac{dw}{dy}+(s-mK)\,\frac{dw}{dp}+(t+K)\,\frac{dw}{dq}=0,\\ \frac{dw}{d\,z}=0,\quad \left(3\,m+m\,\frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{dp}-\left(1+\frac{dK}{dt}\right)\frac{dw}{dq}=0,\\ m^2\,\frac{dw}{d\,r}-m\,\frac{dw}{d\,s}+\frac{dw}{dt}=0,\end{array}\right\}\,..\,(109)$$

waarin gesteld is

$$K=\frac{2\,m}{\frac{d\,m}{d\,t}}.$$

Alleen, wanneer zich hieruit geen nieuwe vergelijkingen laten afleiden, is het mogelijk, dat de vereischte twee integralen bij het eerste hulpstelsel voorkomen. Daartoe nu is noodig een voldoende, dat

$$\frac{d}{dt}\, m\left(1+\frac{2}{1+\frac{dK}{dt}}\right)=0,$$

of

$$m\left(1+\frac{2}{1+\frac{dK}{dt}}\right)=\text{constant} \quad . \; . \; . \quad (110)$$

is.

De constante in (110) stellen wij door $\frac{b^2}{a^2}$ voor; dan wordt

$$\frac{dK}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}=2-\frac{2\,m\frac{d^2m}{dt^2}}{\left(\frac{dm}{dt}\right)^2}=\frac{3\,a^2m-b^2}{b^2-a^2\,m},$$

derhalve

$$\frac{d\frac{dm}{dt}}{\frac{dm}{dt}}=\frac{5\,a^2m-3b^2}{3m(a^2m-b^2)}\,dm \quad \text{of} \quad \frac{dm}{dt}=(a^2\,m-b^2)\,m^{2/3},$$

en dus

$$t+c=\frac{2}{b^2\sqrt{m}}+\frac{a}{b^3}\log.\frac{a\sqrt{m}-b}{a\sqrt{m}+b}, \quad . \; . \; . \; . \quad (111)$$

waarin c eene nieuwe integratieconstante is. Daar verder

$$m^2=\frac{dF}{dt}=\frac{dr}{dt}$$

is, heeft men

$$r+g=\int m^2\,dt,$$

of uitgewerkt

$$r+g=\frac{2}{a^2}\sqrt{m}+\frac{b}{a^3}\log.\frac{a\sqrt{m}-b}{a\sqrt{m}+b}. \quad . \; . \; . \; . \quad (112)$$

Opdat zich dus dit geval van integreerbaarheid voordoe, moet de te integreeren vergelijking het resultaat der eliminatie van m uit (111) en (112) zijn. Deze eliminatie is gemakkelijk uit te voeren, maar geeft eene tamelijk samengestelde vergelijking.

Voor K vindt men gemakkelijk de waarde

$$K = \frac{2}{(a^2 m - b^2)\sqrt{m}}.$$

In het stelsel vergelijkingen (109) vereenvoudigt zich nu de vierde tot

$$b^2 \frac{dw}{dp} - a^2 \frac{dw}{dq} = 0.$$

Op dezelfde wijze handelende als met de vergelijkingen (47) waar wij deze tot (96) herleidden, vinden wij hier de integralen

$$s + \int m\, dt = c_1,$$

$$a^2p + b^2q - x\left\{a^2(r - m^2K) + b^2(s + mK)\right\} - y\left\{a^2(s - mK) + b^2(t + K)\right\} = c_1'.$$

Stelt men nog

$$\int m\, dt = L,$$

dan is eene eerste integraal der differentiaalvergelijking

$$a^2 p + b^2 q - x\{a^2 (r - m^2 K) + b^2 (s + m K)\} -$$
$$- y \{a^2 (s - m K) + b^2 (t + K)\} = \varphi (s + L),$$

en eene andere

$$a^2 p - b^2 q - x \{a^2 (r - m^2 K) - b^2 (s - m K)\} -$$
$$- y \{a^2 (s + m K) - b^2 (t + K)\} = \psi (s - L), *)$$

*) Vervangt men in (110) m door $-m$ en herhaalt de geheele verdere bewerking, dan blijkt, dat daarbij in plaats van b en a moet komen $b\varepsilon$ en $a\varepsilon^3$, als ε een der vierdemachtswortels uit -1 voorstelt, daar anders t en r niet dezelfde waarden kunnen verkrijgen, zooals toch natuurlijk noodig is. Het blijkt dan tevens, dat ook K niet verandert, en L alleen het tegengestelde teeken krijgt. De imaginaire factor $\pm i = \varepsilon^2$ kan in de functie ψ worden opgenomen.

terwijl L de waarde heeft

$$L = \frac{1}{ab} \log. \frac{a\sqrt{m} - b}{a\sqrt{m} + b}.$$

Voeren wij voor r, t en K de waarden in uitgedrukt in m en L, en nemen de halve som en het halve verschil van bovenstaande vergelijkingen, dan vinden wij

$$\left.\begin{array}{l} a^2 p - x(b^2 L - a^2 g) - y a^2 s = \dfrac{\varphi + \psi}{2}, \\ b^2 q - x b^2 s - y(a^2 L - b^2 c) = \dfrac{\varphi - \psi}{2}. \end{array}\right\} \ldots (113)$$

Beschouwen wij nu m en s als onafhankelijk veranderlijken, differentieeren ten opzichte daarvan, en drukken t, r en dL in m uit, dan komt er

$$2\sqrt{m}\frac{dx}{ds} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2}, \quad \frac{2}{\sqrt{m}}\frac{dy}{ds} - b^2 x = \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \ldots (114)$$

$$2m(a^2m - b^2)\frac{dx}{dm} - b^2 x = \frac{\varphi' - \psi'}{2}, \quad 2(a^2m - b^2)\frac{dy}{dm} - a^2 y = \frac{\varphi' + \psi'}{2} \ldots (115)$$

De integratie van (115) geeft

$$x = \frac{\sqrt{(a^2 m - b^2)}}{\sqrt{m}} \left\{ S_1 + \int \frac{(\varphi' - \psi')\, dm}{4(a^2 m - b^2)^{3/2} m^{1/2}} \right\},$$

$$y = \sqrt{(a^2 m - b^2)} \left\{ S_2 + \int \frac{(\varphi' + \psi')\, dm}{4(a^2 m - b^2)^{3/2}} \right\},$$

waarin S_1 en S_2 functien van s alleen zijn.

De substitutie van deze waarden in (114) geeft ter bepaling van S_1 en S_2 de volgende betrekkingen

$$2\frac{dS_1}{ds} - a^2 S_2 = 0, \quad 2\frac{dS_2}{ds} - b^2 S_1 = 0,$$

waaruit volgt

$$S_1 = a\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} + \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right), \quad S_2 = b\left(\alpha e^{\frac{abs}{2}} - \beta e^{-\frac{abs}{2}}\right).$$

Hierin stellen α en β nieuwe integratieconstanten voor.

Voert men dit in, en drukt m in L uit, dan vindt men

$$x = 2a^2 \frac{\alpha e^{1/2 abs} + \beta e^{-1/2 abs}}{e^{-1/2 abL} + e^{1/2 abL}} +$$

$$+ \frac{a}{4b(e^{-1/2 abL} + e^{1/2 abL})} \int (\varphi' - \psi')(e^{-1/2 abL} - e^{1/2 abL})\, dL,$$

$$y = 2b^2 \frac{\alpha e^{1/2 abs} - \beta e^{-1/2 abs}}{e^{-1/2 abL} - e^{1/2 abL}} +$$

$$+ \frac{b}{4a(e^{-1/2 abL} - e^{1/2 abL})} \int (\varphi + \psi)(e^{-1/2 abL} + e^{1/2 abL})\, a L.$$

Integraalvrije uitdrukkingen bekomt men door te stellen

$$e^{1/2 ab(s+L)} = \mu_1, \qquad \varphi'(s+L) = -4a^2 b^2 \mu_1^2 \chi''(\mu_1),$$
$$e^{1/2 ab(s-L)} = \mu_2, \qquad \psi'(s-L) = 4a^2 b^2 \mu_2^2 \omega''(\mu_2),$$

namelijk

$$x = 2a^2 \left\{ \frac{\alpha\mu_1\mu_2 + \beta + (\mu_1 - \mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_2 - \mu_1)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 + \mu_2} \right\},$$

$$y = 2b^2 \left\{ \frac{\alpha\mu_1\mu_2 - \beta - (\mu_1 + \mu_2)\mu_1\chi'' + 2\mu_1\chi' - 2\chi - (\mu_1 + \mu_2)\mu_2\omega'' + 2\mu_2\omega' - 2\omega}{\mu_1 - \mu_2} \right\}.$$

Zooals men licht inziet, kunnen de α en β in de willekeurige functien worden opgenomen, zoodat men eenvoudiger kan schrijven

$$x = 2a^2 \frac{(\mu_1 - \mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_2 - \mu_1)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$y = 2b^2 \frac{(\mu_1 + \mu_2)\mu_1\chi'' - 2\mu_1\chi' + 2\chi + (\mu_1 + \mu_2)\mu_2\omega'' - 2\mu_2\omega' + 2\omega}{\mu_1 - \mu_2}.$$

Uit (113) heeft men nu

$$p + gx = \frac{bx}{a^3} \log. \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{y}{ab} \log. \mu_1\mu_2 - 4ab(\mu_1\chi'' - \chi' - \mu_2\omega'' + \omega'),$$

$$q + cy = \frac{ay}{b^3} G \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{x}{ab} \log. \mu_1 \mu_2 - 4ab(\mu_1 \chi'' - \chi' + \mu_2 \omega'' - \omega'),$$

waaruit z verder gemakkelijk gevonden wordt.

Men heeft

$$z + {}^1/_2 g x^2 + {}^1/_2 c y^2 = \left(\frac{b x^2}{2a^3} + \frac{a y^2}{2b^3}\right) \log. \frac{\mu_1}{\mu^2} + \frac{xy}{ab} \log. \mu_1 \mu_2 -$$

$$- \int \left(\frac{b x^2}{2a^3} + \frac{a y^2}{2b^3}\right)\left(\frac{d\mu_1}{\mu_1} - \frac{d\mu_2}{\mu_2}\right) - \int \frac{xy}{ab}\left(\frac{d\mu_1}{\mu_1} + \frac{d\mu_2}{\mu_2}\right) -$$

$$- \frac{4(b^2 x + a^2 y)}{ab} (\mu_1 \chi'' - \chi') + \frac{4(b^2 x - a^2 y)}{ab} (\mu_2 \omega'' - \omega') +$$

$$+ \frac{4b}{a} \int x \{\chi''' \mu_1 d\mu_1 - \mu_2 \omega''' d\mu_2\} + \frac{4a}{b} \int y \{\chi''' \mu_1 d\mu_1 + \omega''' \mu_2 d\mu_2\}$$

Hierin moeten onder de integraalteekens nog de waarden van x en y gesubstitueerd worden. Wij laten deze omslachtige bewerking achterwege.

Er zijn twee grensgevallen, waarin de algemeene integraal eenen onbruikbaren vorm aanneemt, namelijk $a = 0$ en $b = 0$. Zij gaan door verwisseling van x met y in elkaar over.

Voor $a = 0$ wordt (110)

$$\frac{dK}{dt} = -1 \quad \text{of} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}\right) = -1,$$

waaruit door integratie volgt

$$m = \frac{3c}{(t+b)^2},$$

als c en b de integratieconstanten zijn.

Daar verder

$$r = \int \frac{dr}{dt} dt = \int m^2 dt$$

is, vindt men voor den vorm der te integreeren vergelijking

$$(r + a)(t + b)^3 + 3c^2 = 0.$$

Het stelsel (109) gaat nu over in

$$\frac{dw}{dx} + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)\frac{dw}{dq} = 0, \qquad \frac{dw}{dy} - b\frac{dw}{dq} = 0,$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp} = 0, \qquad \frac{dw}{dr}m^2 - \frac{dw}{ds}m + \frac{dw}{dt} = 0.$$

Hiermede handelende, als wij met andere dergelijke stelsels handelden, vindt men de vergelijkingen

$$dq = -bdy + \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)dx, \; dr + mds = 0, \; ds + mdt = 0,$$

waarvan integralen zijn

$$s - \frac{3c}{t+b} = c_1, \qquad q + by - \left(s - \frac{3c}{t+b}\right)x = c_1'$$

Stelt men $\frac{3c}{t+b}$ door τ voor, dan zijn dus de eerste integralen van (116)

$$q + by = (s - \tau)x + 2\varphi''(s - \tau),$$
$$q + by = (s + \tau)x + 2\psi''(s + \tau).$$

Hieruit volgt vooreerst

$$x = \frac{\varphi'' - \psi''}{\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

Verder is

$$q + by = sx + (\varphi'' + \psi''), \quad \ldots\ldots \quad (118)$$

waaruit door differentieeren volgt

$$(t+b)\frac{dy}{ds} = x + \varphi''' + \psi''' \quad \text{of} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\varphi'' - \psi''}{3c} + \frac{\tau}{3c}(\varphi''' + \psi'''),$$

en op dezelfde wijze

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\tau}{3c}(\varphi''' - \psi''').$$

Hieruit volgt door integratie

$$y = \frac{\tau(\psi'' + \psi'') + \varphi' - \psi'}{3\,c}.$$

Verder is

$$\frac{d(p+ax)}{ds} = (r+a)\frac{dx}{ds} + s\frac{dy}{ds} = -\frac{\tau^2}{9s}(\varphi''' + \psi''') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi''' + \psi''') + \frac{s}{3c}(\varphi'' - \psi''),$$

$$\frac{d(p+ax)}{d\tau} = \frac{\tau^2}{9c}(\varphi''' + \psi''') + \frac{\tau}{9c}(\varphi'' - \psi'') - \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' - \psi'''),$$

waaruit

$$p + ax = -\frac{\tau^2}{9c}(\varphi'' - \psi'') + \frac{s\tau}{3c}(\varphi'' + \psi'') + \frac{s}{3c}(\varphi' - \psi') - \frac{\tau}{3c}(\varphi' + \psi') - \frac{\varphi - \psi}{3c}$$

terwijl uit (117) en (118) volgt

$$q + by = \frac{s}{\tau}(\varphi'' - \psi'') + (\varphi'' + \psi'').$$

Eindelijk heeft men door invoering van deze waarden in

$$d(z + {}^1\!/_2\, a x^2 + {}^1\!/_2\, b y^2) = (p + ax)\, dx + (q + by)\, dy,$$

en uitvoering zooveel mogelijk van de integratien

$$z + {}^1\!/_2\, a x^2 + {}^1\!/_2\, b y^2 = -\frac{2\tau}{9c}(\varphi''^2 + \psi''^2 + \varphi''\psi'') +$$

$$+ \frac{s}{3c}(\varphi''^2 - \psi''^2) - \frac{1}{3c}(\varphi' + \psi')(\varphi'' - \psi'')$$

$$+ \frac{s}{3c\tau}(\varphi' - \psi')(\varphi'' - \psi'') - \frac{1}{3c\tau}(\varphi - \psi)(\varphi'' - \psi'') + \frac{1}{2c}\int \varphi''^2 d(s - \tau)$$

$$- \frac{1}{2c}\int \psi''^2\, d(s + \tau).$$

In het andere grensgeval, $b = 0$ heeft men uit (110)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2m}{\frac{dm}{dt}}\right) = -3.$$

De integratie hiervan leert, dat de te integreeren vergelijking nu is

$$(r + a)^3 (t + b) + 3c^2 = 0,$$

zoodat alles hetzelfde is als zooeven, behalve dat x en y met elkaar verwisseld zijn.

Vergelijken wij ten slotte de hier gebruikte Methode met die, welke LEGENDRE toepast ter integratie van de vergelijking

$$f(r, s, t) = 0.$$

Deze bestaat daarin, dat s en t als onafhankelijk veranderlijken en $v = q - sx - ty$ als afhankelijk veranderlijke worden aangenomen. De vergelijking wordt zoodoende teruggebracht tot de lineaire vergelijking

$$R\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{d^2v}{ds\,dt} + T\frac{d^2v}{ds^2} = 0.$$

Deze vergelijking wordt dan zoo mogelijk door de Methode van MONGE geïntegreerd. Het eerste hulpstelsel van MONGE, waartoe deze vergelijking aanleiding geeft, is dan

$$ds + m_1\,dt = 0, \quad dx - m_2 dy = 0, \quad dv = -x\,ds - y\,dt,$$

waarin m_1 en m_2 dezelfde beteekenis hebben als in het voorgaande.

Door dit hulpstelsel worden nu de eerste integralen gevonden in denzelfden vorm, als waarin wij ze vonden, in al die gevallen, waarin zij noch z, noch p, noch r bevatten. Door verwisseling van r met t zou men ze ook vinden in die gevallen, waarin er geen z, q of t in voorkomt. Voegt

men echter aan het MONGE'sche hulpstelsel nog de twee vergelijkingen

$$dz = p\,dx + q\,dy \qquad dp = r\,dx + s\,dy$$

toe, dan wordt het geheel identiek met het hulpstelsel, waartoe de hier gebruikte methode aanleiding geeft, en levert dus volkomen dezelfde uitkomsten op.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 27 December 1890.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, KOSTER, MULDER, WEBER, MARTIN, BEHRENS, MICHAËLIS, MOLL, J. A. C. OUDEMANS, KAPTEIJN, VAN DIESEN, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, BEIJERINCK, SCHOLS, ZAAIJER, STOKVIS, FORSTER, HOEK, ZEEMAN, BIERENS DE HAAN, VAN 'T HOFF, GUNNING, VAN RIEMSDIJK, VAN BEMMELEN, KORTEWEG, GRINWIS, SCHOUTE, PEKELHARING en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— De Processen-Verbaal der October- en November-zittingen worden gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Oorlog te 's Gravenhage, 12 December 1890; 2°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 19 December 1890; 3°. den Commissaris des Konings in Noord-Holland te Haarlem, 13 December 1889; 4°. de Gedeputeerde Staten van Friesland, te Leeuwarden, 16 October 1890; 5°. Burgemeester en Wethouders van Amsterdam, 18 December 1890; 6°. Burgemeester en Wethouders van Zutphen, 16 December 1890; 7°. C. KERBERT, Directeur van het koninklijk zoölogisch Genootschap »Natura

Artis Magistra" te Amsterdam, 17 December 1890; 8°. C. P. BURGER JR., Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Amsterdam, 18 December 1890; 9°. A, J. VAN PESCH, Bibliothecaris van het wiskundig Genootschap »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam, 18 December 1890; 10°. de Directeuren van de Nederlandsche Handel-Maatschappij te Amsterdam, 20 December 1890; 11°. J. BOSSCHA, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, 1890; 12°. A. J. ENSCHEDE, Bibliothecaris van de Stads-Bibliotheek te Haarlem, 17 December 1890; 13°. G. C. W. BOHNENSIEG, Conservator van Teyler's-Stichting te Haarlem, 18 December 1890; 14°. W. N. DU RIEU, Bibliothecaris van de Universiteits-Bibliotheek te Leiden, 13 December 1890; 15°. J. TIDEMAN, Secretaris van het koninklijk Instituut van Ingenieurs te 's Gravenhage, 16 December 1890; 16°. A. R. ARNTZENIUS, Griffiier van de Tweede Kamer der Staten-Generaal te 's Gravenhage, 16 December 1890; 17°. H. DE BUSSY, Bibliothecaris van de Athenaeum-Bibliotheek te Deventer, 19 December 1890; 18°. DE VINCK, Secretaris van de Académie d'Archéologie de Belgique te Antwerpen, 17 November 1890; 19°. den Secretaris van de Société zoologique de France te Parijs, 1890; 20°. den Secretaris van de Société mathématique de France te Parijs, 17 November 1890; 21°. J. LEJEUNE, Secretaris van de Académie de Stanislas te Nancy, 27 October 1890; 22°. A. VIVIEN, Secretaris van de Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts te Bordeaux, 6 October 1890; 23°. TH, MOMMSEN te Berlijn, 19 December 1890; 24°. den Secretaris van het Naturwissenschaftlicher Verein in Schleswig-Holstein te Kiel, 1890; 25°. H. SCHÄFFER, Secretaris van het Naturwissenschaftlicher Verein te Regensburg, September 1890; 26°. E. SELENKA te Erlangen, 31 October 1890; 27°. D. CARUTTI te Turyn, 8 November 1890; 28°. J. M. LATINO-COELHO, Secretaris van de Académie royale des Sciences te Lissabon, November 1890; 29°. J. H. MILAND, Directeur van het meterological Office te Calcutta, 6 October 1890; 30°. H. KATO, Voorzitter van de imperial University te Tokio, 28 October 1890; 31°. G.

Hambach, Bibliothecaris van de Academy of Science te St. Louis, 3 November 1890; 32°. J. S. Billings, Bibliothecaris van het Surgeon General's Office te Washington, 5 November 1890; 33°. E. A. Brage, Voorzitter van de Wisconsin Academy of Sciences and Arts te Madison, 15 September 1890; 34°. J. Botto, Secretaris van de Sociedad cientifica Argentina te Buenos Aires, 27 November 1890; 35°. F. B. Kyngdon, Secretaris van de royal Society of N. S. W. te Sydney, 31 October 1890; aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 4 November, 1 December 1890; 2°. J. Bosscha, Secretaris van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem, November 1890; 3°. W. P. Wolters, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, September 1890; 4°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 9 December 1890; 5°. M. Snellen, Directeur van het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, 18 December 1890; 6°. R. Schram, Directeur van het k.k. oesterreichisches Gradmessungsbureau te Weenen, 1890; 7°. Gilbert, Directeur van de kön. Universitäts-Bibliothek te Greifswald, 12 September 1890; 8°. den Bibliothecaris van de public Library te Melbourne, 18 Juli 1890: 9°. S. Sinclair, Secretaris van het Australian Museum te Sydney, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. mededeelingen van de Heeren A. C. Oudemans jr. en Hoogewerff, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen;

2°. het antwoord van het Bestuur der Letterkundige Afdeeling op den brief der Natuurkundige Afdeeling, gedagteekend van 26 November j.l., waarin de vraag werd gedaan, of voornoemd Bestuur het noodig oordeelde, het verzoek om

subsidie, tot den Minister van Binnenlandsche Zaken gericht door het Bestuur der Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië te Batavia, met de daartoe behoorende bescheiden en het rapport der Natuurkundige Afdeeling, tot een onderwerp van discussie te maken in de eerstvolgende vergadering der Letterkundige Afdeeling. — Het antwoord houdt in, dat het Bestuur der Letterkundige Afdeeling het niet noodig acht, de onderwerpelijke zaak in eene Afdeelingsvergadering ter sprake te brengen, ook omdat bovengenoemde Vereeniging niet bevoegd zou wezen, een eventueel te verleenen subsidie te besteden voor een in haar midden niet vertegenwoordigd vak;

3°. het door den Heer Dr. F. A. F. C. Went opgemaakte Verslag omtrent de onderzoekingen, door hem verricht aan het botanisch Station te Buitenzorg, van 15 Maart tot 1 Augustus 1890. — Met deze inzending werd voldaan aan de verplichting, opgelegd aan hen, die op het voorstel der Afdeeling, in het genot worden gesteld eener subsidie, voortspruitend uit de baten van het zoogenaamd Buitenzorgfonds, om uiterlijk binnen 3 maanden na hun terugkeer, een Verslag over hunne zending aan de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie aan te bieden. — De Voorzitter wenscht het Verslag in handen gesteld te zien van de Heeren Suringar en C. A. J. A. Oudemans, en van hen inlichting te ontvangen omtrent de vraag, welke bestemming daaraan zal worden gegeven;

4°. eene verhandeling van den heer J. C. Kluyver te Breda, »Over de buigraaklijnen eener ruimtekromme van den vierden graad en de eerste soort", waarvoor eene plaats verzocht wordt in de werken der Akademie. — De Heeren Schoute en Bierens de Haan verklaren zich bereid, daarover rapport uit te brengen in de Januari-vergadering.

— De Heeren J. A. C. Oudemans en van Diesen brengen een gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer Engelenburg (Hyetographie van Nederland). Hun voorstel om haar eene plaats te verleenen in de 4° werken, wordt zonder discussie aangenomen. Nogtans zal den schrijver de

gelegenheid worden gegeven, de redactie van zijn manuscript hier en daar te wijzigen.

— De Heer BEIJERINCK draagt de door voorwerpen en platen opgehelderde levensgeschiedenis voor van *Bacillus cyaneo-fuscus*, eene tot hiertoe onbekende bacterie: de oorzaak van het blauw worden van Edammer kaas en het zwart worden van lijm in de fabrieken. De spreker zonderde haar af uit grondwater en leerde ze kennen als eene peptonbacterie ($^1/_2$ pCt. pepton in gewoon water is voldoende voor hare voeding). De blauwe kleur, aan spheriten gebonden, gaat later over in eene donkerbruine, voor diffusie vatbare. In den natuurstaat is het groeiend vermogen bij eene temperatuur van 15°—20° C. aanvankelijk zeer krachtig. Weldra echter begint dat vermogen bij dezen warmtegraad te verminderen, om eindelijk geheel te worden uitgedoofd. Daartegenover ontdekt men weder eene sterke toeneming van den groei, indien verzwakte culturen eenigen tijd in zeer zwakke pepton-oplossingen (van $^1/_4$ pCt.) bij niet meer dan 2°—5° C. bewaard worden. Deze waarnemingen sluiten zich aan bij die over pathogene bacteriën, wier virulentie eveneens bij hoogere temperaturen vermindert.

Eenige vragen, tot den spreker gericht door de Heeren MAC GILLAVRY, STOKVIS, J. A. C. en C. A. J. A. OUDEMANS, worden door hem beantwoord.

— De Heer FORSTER deelt mede, dat het ook hem gelukte, eene blauwe-kleurstof-voortbrengende bacterie af te zonderen uit Vechtwater. Uit de dienaangaande medegedeelde bijzonderheden blijkt, dat, bij enkele punten van overeenkomst, er toch weder zoo vele punten van verschil tusschen zijne bacterie en den Bacillus cyaneo-fuscus zijn aan te wijzen, dat beide zonder twijfel soortelijk van elkander onderscheiden zijn.

— De Heer BEHRENS deelt mede, dat het rapport der geologische Commissie over het jaar 1890 bijna gereed is, en dat er derhalve aanleiding bestaat om aan de Regeering

eene nieuwe subsidie van *f* 500.— voor het jaar 1891 aan te vragen. De Voorzitter antwoordt hierop, dat het hem wenschelijk voorkomt, de indiening van dat rapport af te wachten, en dan te beslissen of opnieuw *f* 500.—, dan wel eene grootere som voor de werkzaamheden der Commissie zal worden aangevraagd. De Heer BEHRENS legt zich bij deze opvatting neder en hoopt te kunnen zorgen, dat het rapport in de Januari-vergadering ter tafel kome. Eene hoogere toelage dan *f* 500 zou zeer zeker gewenscht zijn om de Commissie in de gelegenheid te stellen, hare werkzaamheden uit te breiden en daarbij tijd te sparen.

— De Heer BIERENS DE HAAN herinnert aan zijne vroegere mededeeling omtrent de bewerking van een bibliographisch Repertorium der wiskundige wetenschappen, waarvoor door het »Congrès international de Bibliographie des Sciences mathématiques", in Mei 1889 gedurende de tentoonstelling bijeengekomen, een schema van classificatie vastgesteld en eene Commissie is benoemd, bestaande uit Franschen en niet-Franschen. De spreker zelf werd gekozen voor Nederland. Het doel van den arbeid is: de gedrukte boeken en de verhandelingen in Acta, Verhandelingen, Tijdschriften enz. voorkomend, door eene juiste classificatie voor het gebruik geschikt te maken. De Nederlandsche literatuur is die bewerking ten volle waard, en nu ligt het, volgens des sprekers gevoelen, op den weg der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, daartoe de behulpzame hand te bieden. Hijzelf is bereid de classificatie op zich te nemen, des noods met behulp van eenige medeleden der Akademie. Maar, voor het overschrijven van titels behooren andere krachten, tegen retributie, in het werk te worden gesteld. Na ingewonnen advies nl. was gebleken, dat elk land den arbeid van het lid in de Commissie zelf bekostigt. De spreker stelt dus voor: dat hem verleend worde een crediet van *f* 100, en verder, dat hem de bewerking worde opgedragen, met de bevoegdheid om, zoo deze van te grooten omvang mocht blijken, de hulp van één of meer leden te mogen inroepen.

Over het voorstel wordt het woord gevoerd door de Heeren STOKVIS, KORTEWEG en den Secretaris. De Voorzitter meent, met den Secretaris, dat de Afdeeling in deze geene beslissing kan nemen, maar dat die taak bij het Bestuur der Akademie berust. Het voorstel om het verzoek des Heeren BIERENS DE HAAN bij voornoemd Bestuur over te brengen, wordt aangenomen.

— Voor de boekerij der Akademie worden aangeboden:

Door den Heer WEBER het 2de Deel der »Zoologische Ergebnisse", door hem naar aanleiding van zijne reis naar Java in het licht gegeven;

door den Heer MAC GILLAVRY, uit naam van den Heer Dr. H. VAN SENUS, diens dissertatie: »Bijdrage tot de kennis der cellulose-gisting". De uitkomsten, door den Heer VAN SENUS verkregen, worden kortelijk toegelicht;

door den Heer SCHOUTE, uit naam van den Heer GOMEZ TEIXEIRA, diens Handboek over Differentiaalrekening;

door den Heer VAN DE SANDE BAKHUYZEN: 1°. Verslag over den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden (17 Sept. 1889—16 Sept. 1890) en 2°. Annalen der Sternwarte in Leiden, deel V.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

RAPPORT

OVER DE

BESTEMMING VAN HET VERSLAG,

DOOR DEN HEER **Dr. F. A. F. C. WENT**

AAN DE

AFDEELING OVERGELEGD, NA ZIJN TERUGKEER VAN HET BOTANISCH STATION TE BUITENZORG.

De ondergeteekenden, aan wie, in de vergadering der Afdeeling in dato 27 December 1890, in handen werd gesteld het Verslag van den Heer Dr. F. A. F. C. Went, omtrent de onderzoekingen, door hem aan het botanisch Station te Buitenzorg van 15 Maart tot 1 Augustus 1890 verricht, en wel om advies uit te brengen omtrent de bestemming, aan voornoemd Verslag te geven, hebben de eer hierbij voor te stellen: voornoemd Verslag op te nemen in de Verslagen en Mededeelingen, en het op het Proces-Verbaal der Vergadering van 31 December te doen volgen.

Amsterdam, *Leiden*
16 Januari 1891.

C. A. J. A. OUDEMANS.
W. F. R. SURINGAR.

VERSLAG

OMTRENT DE

ONDERZOEKINGEN, VERRICHT AAN HET BOTANISCH STATION TE BUITENZORG, VAN 15 MAART— 1 AUGUSTUS 1890,

DOOR

Dr. F. A. F. C. WENT.

Evenals alle andere botanici, die voor het eerst de tropen zagen, ondervond ook ik, van hoeveel nut het zien van den plantengroei tusschen de keerkringen voor mijn wetenschappelijke ontwikkeling was. Alleen daar leert men de planten in haar volle kracht kennen, en begrijpt men eerst goed, welk een machtige factor de strijd om het bestaan is voor de ontwikkeling van de flora van een gebied. Vandaar, dat zich vanzelf tal van nieuwe vragen aan den botanicus in de tropen voordoen, terwijl hij er begint te twijfelen omtrent de juistheid der inzichten, die men in Europa heeft over verschillende zoogenaamd goed onderzochte botanische vraagstukken.

Terwijl het bezoek van de tropen in het algemeen voor den botanicus zeer nuttig is, heeft Buitenzorg het voordeel, dat er het geheele jaar onderzoekingen kunnen verricht worden, omdat een eigenlijke droge moesson er zoo goed als geheel ontbreekt; bovendien liggen de mooiste oerbosschen van Java, in de Preanger Regentschappen, betrekkelijk dicht in de nabijheid. Dat natuurlijk de prachtige plantentuin, met zijn uitstekend ingerichte laboratoria, bibliotheek,

museum en herbarium, den onderzoeker een groot voordeel oplevert, behoeft hier wel niet gezegd te worden.

Mijn onderzoekingen hadden hoofdzakelijk betrekking op de hechtwortels en andere luchtwortels bij tropische klimplanten en epiphyten. Naar aanleiding van een korte opmerking van Darwin, dat het hem voorkwam, dat sommige luchtwortels bij Ficus repens zich door middel van een slijmerige stof aan het substraat vasthechten, besloot ik deze zaak nader te onderzoeken. Het bleek mij nu, dat deze vasthechting in alle gevallen geschiedt door middel van wortelharen. Wel worden sommige wortels voorloopig vastgekleefd door middel van een soort van plantenslijm, dat bij enkele Melastomaceae, vooral Medinella's, zelfs in groote hoeveelheid gevormd wordt, maar dit werkt toch meer als beschermingsmiddel tegen het uitdrogen. De wortelharen bevestigen de wortels, omdat zij in alle oneffenheden van het substraat kruipen, zoodat dan ook een hechtwortel niet blijvend tegen een gladde oppervlakte blijft vastgekleefd. De redenen voor het ontstaan der wortelharen moeten, zooals mij door proefnemingen gebleken is, gezocht worden in afwezigheid van licht en in een verhoogden vochtigheidstoestand van de lucht. Bij bilateraal-symmetrische wortels, zooals die bij vele Orchideeën voorkomen, werd ook de vraag onderzocht, of hier het vermogen om wortelharen te vormen alzijdig ontwikkeld is of niet. Het laatste werd in enkele gevallen geconstateerd, maar verder werden tal van overgangen gevonden naar een alzijdig vermogen van wortelhaarvorming. Naar aanleiding van de onderzoekingen, door Schimper in Zuid-Amerika verricht, werd verder de verhouding tusschen voedingswortels en luchtwortels nagegaan. Verder onderzocht ik bij verschillende plantenfamilies den graad van adaptie der luchtwortels aan uitwendige omstandigheden en trachtte op deze wijze de vraag naar hun eerste ontstaan en hun phylogenie te beantwoorden. Den hoogsten ontwikkelingstrap vond ik daarbij in de wortelranken. In sommige gevallen veranderen zij ook van functie, zooals daar, waar zij tot de kroonvorming bijdragen, omdat door hunne hulp de eene tak van een boom den anderen steunt.

Aan geconserveerd materiaal hoop ik verder de ontwikkelingsgeschiedenis en de eventueele aanwezigheid van rudimenten te bestudeeren. In de door mij onderzochte gevallen kon ik van een verkorting van eenmaal vastgehechte wortels niets waarnemen. Zij groeien bovendien vrij langzaam, terwijl hun groeiend gedeelte aan den top zeer kort is, in tegenstelling met de voedingswortels, die uiterst snel groeien en in het bezit zijn van een zeer lang groeiend gedeelte. Sterke spanning vond ik daarbij in de voedingswortels van epiphytische Ficussoorten: de zoogenaamde Waringins. De groeiwijze en ontwikkeling van deze Ficussoorten werd verder onderzocht en daarbij bij de kieming eigenaardige verschijnselen opgemerkt, in het optreden van knolvormige wortels, die, naar het schijnt, gedeeltelijk tot bevestiging, gedeeltelijk als waterreservoir dienst doen. Ik had verder helaas te weinig tijd om geheel en al de oorzaken op te sporen, die de hechtwortels er toe brengen, naar hun substraat toe te groeien; hun hydrotropisme werd geheel buiten beschouwing gelaten; hun negatieve heliotropie, in verband met de onderzoekingen van Wiesner, in sommige gevallen geconstateerd, terwijl hun geotropie iets nader werd onderzocht, waarbij mij bleek, dat zij zich ten opzichte daarvan nog al verschillend gedragen. De voedingswortels komen, wanneer zij goed ontwikkeld zijn, in het algemeen steeds onder eenzelfden hoek uit den stengel te voorschijn, zooals Sachs dit voor zijwortels beschreven heeft. Ten slotte komt het mij voor, dat enkele feiten er op wijzen, dat de epiphyten niet altijd ontstaan zijn op de door Schimper beschreven wijze, maar dat zij zich ook wel eens ontwikkeld hebben uit wortelklimmers, met name in de familie der Aroïdeeën (en wellicht ook der Araliaceeën en Artocarpeeën).

Verder deed ik onderzoekingen omtrent een eigenaardigen boom, die in den kultuurtuin van Tjikeumah in een groot aantal exemplaren gekweekt wordt: Castilloa elastica. Deze boom heeft twee soorten van takken: afvallende met een bladstand $^1/_2$ en blijvende met een bladstand $^2/_5$. In den bladoksel ontstaat eerst de knop van den afvallenden tak en later die van den blijvenden. Het gelukte mij, nadat

ik bij jonge klimplantjes den eindknop weggesneden had, de okselknoppen te doen uitloopen. In het normale geval zouden hieruit afvallende takken zijn ontstaan, nu echter vormden zij den blijvenden hoofdstengel.

Bij de verschillende soorten van het geslacht Fagraea, ontdekte ik extraflorale nectariën op de bladeren en buiten op den kelk, die geheel den bouw van dierlijke klieren vertoonen: iets, wat tot nu toe bij planten niet gezien was. De ontwikkelingsgeschiedenis hoop ik aan meêgebracht materiaal verder te bestudeeren.

Verder werden nog enkele onderzoekingen gedaan of materiaal geconserveerd om hier nader te bestudeeren over de volgende onderwerpen: de opgezwollen leden van de stengels van Adhatoda vasica en andere oerboschplanten; de ontwikkeling der groote Aecidiumgallen, die op de toppen der Javaansche bergen steeds op Albizzia montana gevonden worden en de vruchtontwikkeling van enkele tropische planten.

Behalve het werk in den plantentuin en in het laboratorium, werden verschillende excursies door mij ondernomen. Tot de meest interessante behoorden die naar de mangrovebosschen, gedeeltelijk die bij Tandjong Priok, gedeeltelijk die van het eiland Leiden, een van de kleine koraaleilandjes in de baai van Batavia. De laatste excursie werd ondernomen door de vriendelijke medewerking van Dr. SLUITER. Verder waren het vooral de bergen der Preanger Regentschappen, die mij aantrokken. Hier zijn gelukkig de oorspronkelijke wouden nog niet in die mate verdwenen als in Midden- en Oost Java. Vooral de dépendance van den plantentuin te Tjibodas, op de helling van den Gedeh, is voor den botanicus een El-Dorado en zal dit nog meer worden, wanneer het laboratorium aldaar gereed zal zijn. Behalve het onderzoek van de hierboven genoemde planten, was het hoofddoel van de excursies: een denkbeeld te krijgen van den tropischen plantengroei in zijn geheel. Daarbij trokken vooral de eigenaardigheden der tropische oerbosschen mijn opmerkzaamheid, zooals de interessante epiphyten, rotangs en lianen, de Hymenophyllaceeën en Levermossen, de Boomvarens, de merk-

waardige verspreiding der bergtopflora van Java, de opeenvolging der vertikale plantenzonen, enz. Ook werd nog een tocht ondernomen naar het Tengergebergte, om het meer australisch karakter der flora van Oost-Java te leeren kennen. Het is natuurlijk, dat ook de dierenwereld en de eigenaardige vulkanische gesteldheid van den bodem de opmerkzaamheid van den natuuronderzoeker tot zich trekken. Met het doel om eenige kennis te verkrijgen van den tropischen landbouw, bezocht ik verder verschillende kultuurondernemingen.

Wanneer het mij gelukt is, gedurende mijn kort verblijf op Java, betrekkelijk veel te kunnen doen, is dit vooral te wijten aan de uitstekende inrichting van 's Lands plantentuin te Buitenzorg, die, dank zij de goede zorgen van den tegenwoordigen directeur, langzamerhand het centrum is geworden van de botanische studie der Tropen.

Het zij mij vergund, aan het slot van mijn voorloopig verslag gekomen, mijn dank te betuigen aan Z. Exc. Baron MACKAY, den vorigen Minister van Binnenlandsche Zaken, en aan de Leden der Kon. Akademie ven Wetenschappen afd. Natuurkunde, die mij door het gegeven subsidie de reis naar Buitenzorg mogelijk maakten, eveneens aan de Curatoren van het Gymnasium te 's Gravenhage voor het verlof, dat zij mij voor deze reis hebben toegestaan. Het is mij een behoefte hier tevens openlijk mijn dank uit te spreken aan Dr. TREUB, voor de buitengewoon hartelijke ontvangst, die ik bij hem mocht genieten en voor de vele hulp, die ik in alle opzichten van hem ondervonden heb. Ook den anderen heeren, aan 's Lands plantentuin verbonden, zeg ik hier dank voor hun hulpvaardigheid; meer in het bizonder den heeren WIGMAN en MASSINK. Overal waar ik verder op Java kwam, mocht ik evenveel gastvrijheid en vriendelijke hulp ondervinden. Wanneer ik hier de namen van enkele heeren noem, die mij meer in het bizonder geholpen hebben, zooals de resident van Probolingo, de administrateurs van Goenoeng Melatti en Daoelat, dan geldt mijn dank toch allen, met wie ik in Indië in nadere aanraking kwam.

November 1890. F. A. F. C. WENT.

VERSLAG

OVER EENE

VERHANDELING VAN DEN HEER **E. ENGELENBURG,**

GETITELD:

„HYETOGRAPHIE VAN NEDERLAND".

(Uitgebracht in de Vergadering van 27 December 1890).



In onze handen is door den Voorzitter gesteld eene aan de Afdeeling aangebodene Verhandeling van den Heer E. ENGELENBURG, Civil-Ingenieur, getiteld: »Hyetographie van Nederland".

Voor diegenen onzer medeleden, die niet op het eerste hooren van dezen naam zijne beteekenis doorgronden, veroorloven wij ons hier bij te voegen, dat de beteekenis is: »Beschrijving van den regen in Nederland", d. i. beschrijving van hetgeen de waarnemingen geleerd hebben aangaande de hoeveelheid regen, die in verschillende deelen van Nederland valt."

Voor verschillende andere landen zijn dergelijke onderzoekingen reeds lang volbracht, en zijn daarover verhandelingen verschenen, vergezeld van kaarten, waarop de lijnen van gelijken regenval, de zoogenoemde *isohyeten*, voor de verschillende jaargetijden, soms voor de verschillende maanden, getrokken zijn.

Zoo worden, van wege het Ministerie van Openbaar Onderwijs te Parijs, jaarlijks drie quarto-deelen *Annales du Bureau Central Météorologique* uitgegeven; waarvan het eerste

deel verhandelingen, het tweede meteorologische waarnemingen en het derde deel enkel regenwaarnemingen bevat; achter dit derde deel vindt men dan voor elke maand, voor elk kwartaal, en voor het geheele jaar eene kaart van Frankrijk bijgevoegd, waarop door harceeringen van verschillende tint of donkerheid de plekken worden aangegeven, waar de hoeveelheid regen beneden eene zekere grens blijft, tusschen twee grenzen in komt, of eene hoogere grens overschrijdt.

Duidelijk kan men b.v. uit die kaartjes zien, hoe zoowel de nabijheid der zee, als die van hooge bergen, zooals de Alpen, een grooten regenval veroorzaakt.

Van Duitschland kennen wij die *Regenverhältnisse Deutschlands*, van Georg von Möllendorff, 1862, en de *Untersuchungen über die Regenverhältnisse Deutschlands* door Dr. H. Toepffer, Professor am Gymnasium in Sondershausen, 1884, beide vergezeld van eene regenkaart.

Speciale onderzoekingen, die op meer beperkte terreinen betrekking hadden, werden o. a. voor Baden uitgegeven door het Centralbureau für Meteorologie und Hydrographie te Carlsruhe, en voor Beijeren door F. Horn, en wel beide in 1885.

Dergelijke onderzoekingen leverden Raulin voor Frankrijk *), Symons en de door de British Association telken jare benoemde Rainfall Committee voor Engeland †), Rubenson voor Zweden §).

Lancasster, de bekende meteoroloog en bibliothecaris der

*) Observations pluviométriques faites dans la France méridionale de 1704 à 1870 et à Paris de 1688 à 1870, par V. Raulin, Prof. de Géologie à la Faculté des Sciences de Bordeaux, 1876.

†) British Rainfall, 1860—1864. A complete set of the annual pamphlets on the distribution of rain over the British Isles, during the years 1860 to 1864, as observed at from 500 to 900 Stations in Great Britain and Ireland, with Illustrations compiled by G. J. Symons. London 1866.

Report of the Rainfall Committee voor verschillende jaren.

§) Nederbördsmängden i Sverige, härledd ur de vid Statens Meteorologiska Stationer under Åren 1860—1872 anställda Jakttagelser af Robert Rubenson. Med fem. taflor. Stockholm 1876.

Sterrewacht te Brussel, gaf in het jaar 1884 eene studie uit, getiteld *La Pluie en Belgiqne*, waarin hij alle bijzonderheden naging, die uit de toen bestaande in België gehoudene aanteekeningen van regenhoeveelheden waren af te leiden. Dit onderzoek werd zeer bemoeielijkt, doordien op zeer vele Belgische plaatsen slechts van enkele jaren, soms van slechts één enkel jaar, regenwaarnemingen bestonden.

In Noord-Amerika worden ook aan het »Signal Office" te Washington maandelijksche kaarten vervaardigd, die den regenval in de Vereenigde Staten aangeven. In 1888 werd van wege het genoemde Office een atlas van 48 kaarten uitgegeven, geldende voor al de maanden van de jaren 1870 tot en met 1873.

Dat Rusland niet zou achterblijven was te vermoeden. In den »5ten Supplementband zum Repertorium für Meteorologie", uitgegeven door de Keizerlijke Akademie van Wetenschappen te St. Petersburg, beschreef Wild »*die Regenverhältnisse des Russischen Reiches*" en liet die beschrijving vergezeld gaan van eenen atlas, waarin voor het geheele jaar en voor de vier jaargetijden de lijnen van gelijke *regenhoogte*, alsmede voor het geheele jaar de lijnen van gelijk *aantal regendagen*, in 6 verschillende groote kaarten zijn aangegeven.

Voor Nederland was een dergelijk onderzoek nog alleen in 1863 door Krecke verricht, (zie zijn belangrijk werkje: het klimaat in Nederland); maar hij kon de maandelijksche gemiddelde hoeveelheid regen slechts voor 15 plaatsen afleiden, en dan nog waren, behalve voor Zwanenburg, de tijdvakken, waarvoor de regenwaarnemingen beschikbaar waren, over het algemeen te kort.

De Jaarboeken van het Meteorologisch Instituut van 1858, 1868, 1878 en 1888 bevatten wel telkens de opgave van den regen-nederslag op een aantal plaatsen in Nederland, telkens gedurende de 10 laatste jaren, maar eene verdere behandeling dezer opgave ontbreekt nog. De enkele jaargangen geven wel de verdeeling van den regen over 6 kwartieren van Nederland, (zie b.v. 1878, p. 271) maar in de 10 jaarlijksche overzichten zijn deze niet opgeteld of ge-

middeld en eene grafische voorstelling van den regen over ons land mist men er tot nog toe.

De heer ENGELENBURG heeft zich nu aangegord om de ten opzichte van Nederland bestaande leemte aan te vullen en althans eene eerste poging aan te wenden om te onderzoeken of er in ons kleine Vaderland, ten opzichte van den regen, verschillende klimaten zijn aan te wijzen of niet. De veertig reeds verschenen jaarboeken van het Meteorologische Instituut leverden hem daartoe de bouwstoffen, die nog aangevuld werden door eene mededeeling van den heer ELINK STERK, voor vier stations in den Haarlemmermeer-polder, en van den heer VAN HASSELT, (Directeur der Amsterdamsche Duinwater-Maatschappij,) voor het pompstation te Leiduin.

In de aangeboden verhandeling geeft hij eene beschrijving van den gang van zijn onderzoek, en verklaart hij de beteekenis der bijgevoegde tabellen en kaarten.

Tabel Ia vermeldt voor elke maand jaars, de maandelijksche gemiddelde hoeveelheden neerslag van 47 plaatsen in Nederland, waar de waarnemingen 10 jaar of meer omvatten.

Tabel IIa geeft, voor diezelfde plaatsen, het aantal percenten aan van het geheele regenbedrag, dat in elke maand des jaars valt. Men verkrijgt hierdoor een overzicht van de verdeeling van den regen op de plaats gevallen over het jaar, *onafhankelijk van de totale hoeveelheid regen*?

Tabel Ib en IIb geven hetzelfde aan als Tabel Ia en IIa, maar voor 28 plaatsen, waar slechts gedurende een tijdvak, korter dan 10 jaar, waarnemingen verricht zijn. Een merkwaardig resultaat, waartoe de heer ENGELENBURG geraakt is, is dat het maximum van regenval niet overal in dezelfde maand valt, zoodat hij er toe gebracht wordt zesderlei groepen van plaatsen aan te neemen:

1⁰ die het maximum in Juli hebben,

2⁰ » » » » Augustus hebben,

3⁰ » een hoofdmaximum in Augustus en een secundair maximum in October hebben,

4⁰ die een hoofdmaximum in October of November en een secundair maximum in Augustus hebben,

5° die in Augustus en October nagenoeg even groote maxima hebben;

6° die een maximum in October hebben.

Tabel III geeft de maandpercenten voor deze verschillende groepen aan.

Om de veranderlijkheid van den regenval der afzonderlijke maanden aan te geven, bevat Tabel IV voor alle plaatsen, waarvan de waarnemingen van 10 of meer jaren beschikbaar waren, de gemiddelde afwijkingen der maandelijksche hoeveelheden van het maandelijksch gemiddelde.

Ook deze tabel geeft tot merkwaardige gevolgtrekkingen aanleiding. In de eerste plaats berekent de schrijver, naar eene bekende formule, die wij gedeeltelijk aan Gauss, gedeeltelijk aan C. A. F. Peters verschuldigd zijn, die echter bij hem eenigszins anders gegeven wordt, nl. in eenen vorm die Fechner er aan gegeven heeft, de waarschijnlijke fout van de door hem gevondene gemiddelde maandelijksche regenhoeveelheid te Utrecht, en vindt daarvoor nog getallen, die van 2,5 tot 4,7 mm. loopen; de gemiddelden van al de afwijkingen beschouwende, komt hij o. a. tot het resultaat, dat om de gemiddelde maandelijksche regenhoeveelheid tot op 1 mM. (w. fout) te kennen er 405 jaren noodig zijn.

Tabel V geeft voor elk station de beide jaren aan, waarin de grootste en de kleinste hoeveelheid regen gevallen is, alsmede hoeveel deze bedragen en hoeveel zij van elkander verschillen; dit verschil noemt de S. Amplitudo.

In Tabel VI vindt men voor elk station eene kolom, aangevende voor elk waarnemingsjaar hoeveel regen er gevallen is, het gemiddelde cijfer voor datzelfde station = 100 aannemende. Daardoor wordt de lezer in de gelegenheid gesteld te beoordeelen, of er sprake van zijn kan om voor het geheele land droge en natte jaren aan te nemen, welke vraag ook door de laatste kolommen derzelfde tabel, die voor elk jaar het gemiddelde cijfer voor alle plaatsen, enz. aangeven, bevestigend beantwoord wordt.

De S. onderzoekt nog of er verband te vinden is tusschen de periode der zonnevlekken en den regen, meent wel eene

zwakke aanwijzing te ontdekken, dat omtrent het zonnevlekken-minimum iets meer regen valt, dan anders, maar komt toch ten slotte tot het resultaat, dat het gezochte verband weinig scherp te voorschijn treedt.

Naar het oordeel van Referenten is er voldoende grond om den invloed of het verband geheel te ontkennen.

Tabel VII geeft voor het geheele tijdvak van 41 jaren, waarover zich de waarnemingen te Utrecht uitstrekken, de hoeveelheden regen in millimeters voor elke »pentade", d. i. voor de vijfdaagsche tijdvakken, 1—5 Januari, 6—10 Januari, enz.; evenzoo in eene 2e kolom het totaal aantal regendagen, en ter vergelijking er naast het aantal waargenomene onweders. Deze laatste zijn slechts ingevuld van 1 Mei tot 7 October; waarom, wordt niet vermeld. Dat er van 8 October tot 30 April in de laatste 41 jaren te Utrecht geene onweders zouden zijn aangeteekend, is niet aan te nemen; de eerst door Dr. M. Snellen, later door den Schrijver zelven bewerkte, door het Kon. Meteorologisch Instituut uitgegevene Jaarberichten over de »Onweders in Nederland" vermelden in dat tijdvak wel onweders, al is het dan in kleineren getale.

Ten slotte vermeldt de S. de grootste hoeveelheden regen, die in de verschillende maanden des jaars in eene regenbui te Utrecht zijn waargenomen.

De verhandeling wordt nog begeleid door acht kaartjes van Nederland, die de verspreiding van den regen in de maanden Mei tot December aangeven. Men vindt daarop zoo goed de beschikbare gegevens het toelaten, voor elk maand de »*isohyeten*", (lijnen van gelijke regenhoogte), voor volle tientallen van millimeters, nl. 40, 50, 60, 70, 80 en 90 mm; ja in ééne maand kon ook die van 100 mm. getrokken worden. Voor de vier eerste maanden des jaars lieten de gegevens niet toe, die lijnen te trekken.

Naar onze meening heeft de schrijver met oordeel de beschikbare bouwstoffen verwerkt en wij adviseeren dus volgaarne de verhandeling eene plaats in de werken der Aka-

demie in te ruimen. Alleen zou, onzes inziens, de S. verzocht moeten worden, over taal en stijl nog eens de fijne schaaf te laten gaan, de germanismen door hollandsche uitdrukkingen te vervangen, en ook de plaatsing der leesteekens te herzien, opdat het opstel, ook wat den vorm aangaat, aan de werken der Akademie geene oneer aandoe.

Utrecht en *den Haag*,
December 1890.

J. A. C. OUDEMANS.
VAN DIESEN.

DE LEVENSGESCHIEDENIS EENER PIGMENTBACTERIE

DOOR

M. W. BEIJERINCK.

§ 1.

VERDEELING DER CHROMOGENE BACTERIËN IN CHROMOPHORE, CHROMOPARE EN PARACHROMOPHORE.

De beteekenis van de kleurstof van chromogene bacteriën is van tweeërlei verschillenden aard. Vooreerst, en dit is het geval bij de roode, purpere, gele, groene en bruine bacteriën, kan zij een integreerend bestanddeel van het levende bacteriënlichaam uitmaken, gelijk de groene kleurstof der bladgroenkorrels, en dan moet daaraan ongetwijfeld een bepaalde, zij het ook onbekende, biologische functie worden toegekend. Zulke bacteriën kunnen *orthochromophore*, of, kortweg, *chromophore* bacteriën genoemd worden. In de tweede plaats kan de kleurstof een afscheidingsproduct zijn, dat toevalligerwijze niet, gelijk in de meeste andere gevallen, kleurloos is, en dat alleen onder bepaalde cultuuromstandigheden ontstaat. Op deze groep is de naam *chromopare* of eigenlijke pigmentbacteriën toepasselijk. Levende pigmentbacteriën zijn meestal kleurloos, ook dan, wanneeer zij kleurstof afzonderen. Daarop maken evenwel de violette bacteriën (*Bacillus janthinus*, *B. violaceus* etc.), die zoo algemeen in water en grond voorkomen, een uitzondering in zoover daarbij de afgescheiden kleurstof niet in de omgeving diffundeert, maar aan het lichaam der bacteriën,

levend of dood, gebonden blijft. Zij vormen blijkbaar den overgang van de tweede tot de eerste groep, waarvan zij zich onderscheiden, doordat zij, gelijk gezegd, slechts onder bepaalde condities gekleurd zijn. Wellicht zal men daarvoor den naam *parachromophore* bacteriën aannemelijk vinden.

De hier te bespreken soort behoort tot de echte pigmentbacteriën. Zij schijnt tot nu toe nog door niemand afgezonderd of beschreven te zijn, zoodat het noodig is daarvoor een naam te kiezen. Wegens het voorkomen van twee pigmenten in de koloniën en andere culturen, een blauw en een bruin, stel ik als zoodanig voor, *Bacillus cyaneo-fuscus*. Als naverwante soorten noem ik de bacteriën van blauwe melk (*Bacillus cyanogenus*), van groen sputum (*B. virescens*), van blauwe etter (*B. pyocyaneus*) en van »bloedend brood" (*B. prodigiosus*). De kleurstof van *B. cyaneo-fuscus* is het naastverwant met die van *B. cyanogenus*; beide kunnen niet door chloroform of andere oplossingsmiddelen worden uitgeschud, terwijl dit wel het geval is met de kleurstof van *B. virescens* en *B. pyocyaneus*.

---

§ 2.

Voorkomen en isoleeren van Bacillus cyaneo-fuscus.

Bacillus cyaneo-fuscus is een niet algemeen verspreide bewoner van water, waarin een weinig organische stof voorkomt. Het isoleeren gelukte: Vooreerst, uit duinwater langdurig in een houten bak aan zichzelve overgelaten. Vervolgens uit een bekerglas, staande in het laboratorium, waarin duinwater met een weinig tuinaarde, koolzure magnesia en een ammoniakzout, dat langzamerhand in salpeterigzuur werd omgezet, voorkwamen. Ten derde, uit het water eener goot, waarin veel organische stoffen in zeer verdunden toestand geledigd werden. En eindelijk, uit een aan zichzelf overgelaten infusie van Papilionaceenwortels in duinwater.

Verder werd onze bacterie als de oorzaak van het »zwart worden" van lijm en het zoogenoemde »blauwziek" van Edammer kaas herkend.

Het isoleeren uit water geschiedt het beste, door over een gestolten oplossing van 10 pCt. zuivere gelatine in duinwater zonder eenige verdere bijvoeging, het te onderzoeken water te gieten en dan te verwijderen, zoodat daarmede alleen oppervlakkige bevochtiging plaats vindt.

Uit de blauwe vlekken in kaas is het isoleeren alleen mogelijk zoolang deze vlekken in de eerste stadiën hunner wording verkeeren, en moet dan geschieden door het centrum der vlek met een platina draad uit te steken en in een verdunde peptonoplossing over te brengen. Ook daarbij gelukt het evenwel slechts zelden culturen te verkrijgen, daar onze pigmentbacterie, na de afscheiding der kleurstof, spoedig door de andere omzettingen, die in de kaas plaats hebben, afsterft.

Vaste en vloeibare mediën, die zeer rijk zijn aan voedingsstoffen, zooals phosphaten, oplosbare eiwitten enz., verhinderen òf den groei geheel, òf veroorloven, wel is waar ontwikkeling, maar geen pigmentafscheiding. In dit laatste geval is *B. cyaneo-fuscus* niet gemakkelijk van andere bacteriën te onderscheiden.

---

§ 3.

Pigment.

Het pigment van *B. cyaneo-fuscus* is tweevoudig. Het bestaat uit een in de gelatine diffundeerende bruine kleurstof en uit meer of minder donker blauw, bruin of zwart gekleurde spheriten. De bacterien scheiden echter slechts één enkel groenachtig pigment af, dat wellicht identiek is met het oorspronkelijke zuivere blauw der spheriten, maar overigens zeer veranderlijk van natuur moet zijn, en gemakkelijk in de bruine diffundeerende stof verandert. De grondslag der spheriten bestaat uit het lichaam van een afgestorven, sterk opgezwollen en geheel van vorm veranderde bacterie, en is derhalve van eiwitachtige natuur. De kleurstof is aan

dit eiwit op overeenkomstige wijze gebonden, als de koolzure kalk in de door HARTING zoo nauwkeurig onderzochte calcospheriten, waarvan de grondslag eveneens een eiwitachtige stof is, welke door HARTING calcoglobuline of calcofibrine genoemd wordt. De tint der spheriten is afhankelijk van het aangeboden voedsel; een zuivere peptonoplossing geeft ultramarijnblauwe spheriten, casein en eiwit, daarentegen bruin of zwart gekleurde. In de blauwe vlekken van kaas zijn de spheriten leizwart, van bijna dezelfde kleur zijn de daarin aanwezige tyrosin-spheriten, welke in kaas zoo uiterst algemeen verbreid zijn, en die, voorzoover zij binnen het bereik van de uit de kolonien van *B. cyaneo-fuscus* diffundeerende kleurstof gelegen zijn, die kleurstof gretig absorbeeren en ophoopen.

Het blauwe pigment wordt door oxydeerende en reduceerende middelen gemakkelijk ontkleurd; met het bruine pigment geschiedt dit moeielijker en niet volkomen. Bij oxydatie is de eindkleur een lichtbruine of geelachtige tint. Zelfs zwakke oxydatiemiddelen geven tot deze ontkleuring aanleiding. Zoo toonde DE VRIES aan, dat de blauwe vlekken in kaas, door zachte verwarming aan de lucht bij 24⁰ à 30⁰ wegtrekken; ik kon die waarneming bij mijne culturen bevestigen. Verder kan ik daaraan toevoegen, dat bij nog lagere temperaturen de ontkleuring bij voldoende zuurstoftoetreding wel langzamer maar op den duur (bijv. na enkele weken) toch even volledig tot stand komt. Sterker oxydeerende middelen, zooals waterstofsuperoxyd, salpeterzuur en chroomzuur geven tot zeer snelle ontkleuring aanleiding.

Aangaande de chemische natuur der kleurstoffen, waag ik het niet een bepaald oordeel uit te spreken. Bij analogie besluitende moet aan anilinekleurstoffen gedacht worden, en de gemakkelijke omzetting van het blauwe lichaam door natrium-hydrosulfiet in een kleurloos chromogeen, dat bij luchttoetreding weder onmiddelijk blauw wordt, herinnert aan indigo. Het blauwe en het bruine pigment zijn ongetwijfeld chemisch naverwant, waarschijnlijk is het laatste een oxydatieproduct van het eerste.

---

§ 4.

VOEDING.

Alle levende organismen kunnen ten aanzien hunner plastische stikstofvoeding in twee groepen verdeeld worden, groepen, waarop de namen *pepton-organismen* en *koolstofstikstof-organismen* toepasselijk zijn. Tot de laatste groep die zich in een vijftal kleinere afdeelingen laat verdeelen, behooren bijv. de hoogere dieren, die behalve pepton een koolhydraat voor hun plastische voeding vereischen, en daarom *pepton-koolstoforganismen* kunnen genoemd worden. Verder de hoogere planten, die naast een koolhydraat als koolstofbron, òf pepton, òf een amid, òf een ammoniakzout, òf een nitraat als stikstofbron vereischen. Daarop is de naam *nitraatkoolstof-organismen* toepasselijk.

Bacillus cyaneo-fuscus behoort tot de niet zeer omvangrijke groep der *pepton-organismen*, dat is voor de plastische voeding, waarbij groei- en pigmentvorming mogelijk zijn, wordt niets anders vereischt dan pepton (met de noodzakelijke zouten). Zoodoende is *B. c.*, die een krachtig proteolytisch enzym afscheidt, in staat te leven ten koste van eiwit, gelatine, caseine of fibrine zoowel als van pepton siccum alleen. De peptonen, die uit de genoemde eiwitachtige lichamen ontstaan, zijn wellicht verschillend, waarmede het bovengenoemde verschil in kleur der spheriten zou kunnen samenhangen. De toevoeging van andere stoffen zooals suiker, asparagine, glycerine, appelzure ammoniak, wijnsteenzure natronkali, had geen gunstigen invloed op kleurstof afscheiding of groei. Eenigszins belangrijke hoeveelheden dezer stoffen werken zelfs nadeelig. Ook zuren en alkaliën kunnen slechts in sporen verdragen worden. Zelfs de concentratie der peptonoplossing moet, om het gunstigste effect te bereiken, 1 pCt. à 2 pCt. niet overschrijden. Of bij hoogere concentratiën de pepton zelve, of wel de daarmede steeds in vereeniging voorkomende bijmengselen van invloed zijn, werd niet vastgesteld, waarschijnlijk is het laatste het geval. De aanwezigheid van hoeveelheden suiker, zelfs geringer dan

2°/₀ 'glucose en dan 4°/₀ melksuiker werken ook in zoover schadelijk, dat daardoor de enzymafscheiding wordt tegengegaan, waardoor caseine, eiwit of gelatine ophouden voedsel te zijn.

Dat de bovengenoemde op de stikstofvoeding berustende groepen niet scherp van elkander zijn gescheiden was wel te verwachten. Zoo kan de meest actieve toestand van *Bacillus cyaneo-fuscus* groeien en pigment afscheiden in een oplossing van $^1/_2$°/₀ glucose met $^1/_4$°/₀ asparagine in duinwater en treedt daardoor in de groep der amidmikroben. Alle functiën zijn bij deze wijze van voeding echter veel trager dan bij de peptonvoeding.

---

§ 5.

Verzwakking.

B. cyaneo-fuscus is een goed voorbeeld tot het leeren kennen van de verschijnselen van verzwakking van groeikracht en van het verlies van kenmerken in het algemeen, waaraan zooveel bacteriën en daaronder vooral de pepton bacteriën, in hooge mate onderhevig zijn.

Onder de verschillende middelen, waardoor deze erfelijke verandering in de eigenschappen kan worden teweeggebracht staat de invloed der temperatuur bovenaan. Bij *B. cyaneo-fuscus* is deze invloed de volgende.

Wordt onze bacterie voor het eerst uit de vrije natuur, bijv. uit duinwater geïsoleerd, dan laat zich voor de pigmentvorming en groei een optimumtemperatuur van omstreeks 18° C. (15° à 20 C.) vaststellen, namelijk bij het cultiveeren op 10 pCt. gelatine opgelost in duinwater. Bij het herhaaldelijke overenten dezer culturen op gelijken bodem, vroegtijdig genoeg om de schadelijke werking der afscheidingsproducten uit te sluiten, en tusschen de genoemde temperatuurgrenzen, bemerkt men dat weldra bij iedere nieuwe overenting, het opkomen in de getrokken strepen onregelmatiger en de groei in de verkregen kolonien langzamer worden. In een bepaald geval was na zes overentingen binnen

een tijdsverloop van vijf weken, de vermenigvuldiging op gelatine geheel onmogelijk geworden. Deze verzwakte cultuur bleek echter in $^1/_2$ pCt. peptonoplossing in duinwater, nog voor sterken groei en pigmentvorming geschikt te wezen. Toen ook deze vorm van overplanting een maand lang, na tusschenruimten van ongeveer 3 dagen bij temperaturen gelegen tusschen 15 en 20° C. was voortgezet, hield plotseling de pigmentvorming geheel op, en na uitvoering van twee nieuwe overentingen in een peptonoplossing stond ook alle verdere groei stil.

Gelijktijdig daarmede waren culturen uitgevoerd in een kelder, waar de temperatuur niet hooger steeg dan tot ongeveer 10°, en meestal op omstreeks 6° C. gehouden kon worden. Ook deze waren wel eenigszins verzwakt maar daarbij was zelfs na maanden groei en pigmentvorming op gelatine mogelijk gebleven.

Deze waarnemingen komen mij vooral daarom belangrijk voor, omdat wij hier een verzwakkenden invloed leeren kennen, die niet gelijk bij de verzwakking der virulentie van pathogene bacteriën alleen onder omstandigheden, welke slechts in de laboratorien kunnen verwezenlijkt worden, tot stand komt, maar die in de natuur zelve werkzaam kan wezen, ja, volgens mijne overtuiging, noodzakelijk wezen *moet*.

---

§ 6.

KAN AAN VERZWAKTE CULTUREN DE ACTIVITEIT WORDEN TERUGGEGEVEN ?

Aan *Bacillus cyanogenus*, die door groei bij temperaturen boven 20° C., bij aanwezigheid van suiker verzwakt was, zoodat daardoor in gekookte melk geen pigmentvorming meer plaats had en op vleeschwaterpeptongelatine, een verlangzaming van groei was waar te nemen, is de activiteit langzamerhand volledig teruggekeerd door de culturen op vleesch-

waterpeptongelatine, zonder keukenzout, bij omstreeks 2° C. maanden lang aan zich zelf over te laten. De groei gedurende dien tijd was door de lage temperatuur zeer tegengehouden, maar daarbij was, na een tijdsverloop van drie maanden, waarin slechts één overenting had plaats gehad, de groeikracht bij hoogere temperaturen gestegen en het vermogen om in gekookte melk pigment te vormen teruggekeerd. Mijn bekendheid met *B. cyaneo-fuscus* is korter van duur dan met *B. cyanogenus*, maar ook daarvoor kan ik reeds met zekerheid besluiten tot de mogelijkheid van de regeneratie der activiteit van weinig verzwakte vormen, door deze langdurig bij zeer lage temperaturen te doen groeien.

Vroeger ben ik ook reeds tot een overeenkomstig besluit ten aanzien van de lichtfunctie der lichtbacteriën van de Noordzee gekomen, en ik zou instaat zijn deze voorbeelden nog met eenige andere te vermeerderen.

---

§ 7.

VERZWAKKING VAN DE VEGETATIEKRACHT BIJ HOOGERE PLANTEN EN DIEREN.

Verzwakking van vegetatiekracht schijnt bij al wat leeft te kunnen voorkomen. Trekt men de slotsom uit DARWIN's omvangrijke onderzoekingen op dit gebied, zoo komt men tot het besluit, dat de *biologische* oorzaak dezer verzwakking, bij hoogere planten en dieren, in langdurige verwantschapsteelt en in langdurige ongeslachtelijke vermenigvuldiging is gelegen, en verder, dat de natuur de sexualiteit, — dat is de versmelting van twee protoplasten van ongelijke afstamming, — heeft ingesteld, om deze verzwakking tegen te gaan en op te heffen.

Door zoodanige biologische verklaring wordt evenwel geen licht verspreid over de *physiologische* factoren, waarop de verzwakking berust. De vraag rijst in hoever het gewettigd is hierbij tot het bestaan van algemeene invloeden te besluiten, die bij alle levende wezens in de bedoelde

richting werkzaam kunnen zijn. De verschijnselen bij de bacteriën, bij sommige schimmels, bij *Cystococcus humicola* en bij *Scenedesmus acutus* waargenomen, geven aanleiding om in dit opzicht in de eerste plaats aan de temperatuur te denken, en de hypothese, dat hoogere planten en dieren, evenals bacteriën, al is het ook in mindere mate, door langdurigen groei nabij of boven het voor de bepaalde soorten bestaande temperatuuroptimum, aan een blijvende en erfelijke vermindering van vegetatiekracht onderworpen zijn, dringt zich als het ware van zelve op den voorgrond.

Vooral bij planten zou het niet moeilijk wezen door proefnemingen de waarde dezer hypothese te toetsen.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 31 Januari 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DER WAALS Onder-Voorzitter, VAN DORP, MARTIN, LORENTZ, ZAAIJER, MAC GILLAVRY, HOFFMANN, BIERENS DE HAAN, PLACE, VAN 'T HOFF, A. C. OUDEMANS JR., BAKHUIS ROOZEBOOM, VAN RIEMSDIJK, FRANCHIMONT, MOLL, RAUWENHOFF, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, GRINWIS, SCHOUTE, KORTEWEG, PEKELHARING, KOSTER, MULDER, HOOGEWERFF, HOEK, ZEEMAN, WEBER, J. A. C. OUDEMANS, ENGELMANN, BEYERINCK, VAN BEMMELEN en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige Zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden:

1°. H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Directeur van de Sterrewacht te Leiden, 15 Januari 1891; 2°. W. P. WOLTERS, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, 30 December 1890; 3°. J. F. L. SCHNEIDER, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 5 Januari 1891; 4°. De gedeputeerde Staten van Friesland te Leeuwarden, 15 Januari 1891; 5°. W. B. BOELES, Bibliothecaris van het Friesche Genootschap voor Geschiedenis en Oudheidkunde te Leeuwarden, 30 December

1890; 6°. P. WILLEMS te Leuven, 23 Januari 1891; 7°. den Directeur van het Institut royal géologique te Budapest, 19 Januari 1891; 8°. C. GEGENBAUR te Heidelberg, 29 December 1890; 9°. H. KNOBLAUCH, Voorzitter van de kais. Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher te Halle a/S, 28 November 1890; 10°. D. STRICKER, Bibliothecaris van de Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft te Frankfort a. M., 30 December 1890; 11°. P. SCHIEMENZ, Bibliothecaris van het Station zoologique te Napels, 26 December 1890; 12°. M. BELLATI, Secretaris van de reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti te Padua, 19 Januari 1891; 13°. P. BORTOLOTTI, Secretaris van de Accademia reale delle Scienze te Modena, 15 December 1890; 14°. H. G. ZEUTHEN, Secretaris van de kongelige danske Videnskabernes Selskab te Kopenhagen, 15 December 1890; 15°. S. P. LANGLEY, Secretaris van de Smithsonian Institution te Washington, 24 December 1890; 16°. H. M. PAUL, Bibliothecaris van het U. S. naval Observatory te Washington, 26 December 1890; 17°. W. T. HARRIS, Bibliothecaris van het Bureau of Education te Washington, 26 December 1890; 18°. J. C. PILLING, Secretaris van de U. S. geological Survey te Washington, 29 December 1890; 19°. E. H. STEVENS, Bibliothecaris van het Department of Agriculture te Washington, 3 Januari 1891; 20°. E. C. PICKERING, Directeur van het Harvard College Observatory te Cambridge, 7 Januari 1891; 21°. M. DEWEY, Secretaris van de State Library te Albany, 27 December 1890; 22°. G. HAMBAD, Bibliothecaris van de Academy of Science te St. Louis, 5 Januari 1891; 23°. E. S. HOLDEN, Bibliothecaris van het Lick Observatory te Mt. Hamilton, 2 Januari 1891; 24°. J. THORBURN, Bibliothecaris van de geological and natural History Survey te Sussex, 14 Jannari 1891; 25°. den Secretaris van het Canadian Institute te Toronto, 1891; 26°. den Bibliothecaris van het nova Scotian Institute of natural Science te Halifax, 1891; 27°. F. KURTZ, Bibliothecaris van de Academia nacional de Ciencias te Cordoba, 19 November 1890.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden:

1°. Het Ministerie van Binnenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 14 Januari 1891; 2°. Het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 10 Januari 1891; 3°. J. E. ALBERTS te Aarlanderveen, 26 December 1890; 4°. J. W. BECK te Groningen, Januari 1891; 5°. A. G. VORDERMAN te Batavia, 12 December 1890; 6°. J. PORTER te Cambridge, 17 November 1890; 7°. D. CHILOVI, Directeur van de R. Bibliotheca nazionale centrale te Florence, 1891; 8°. H. D. TODD, Superintendant van het nautical Almanac Office te Washington, 7 October 1890; 9°. A. R. C. SELWIJN, Directeur van de geological and natural History Survey te Washington, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. Kennisgevingen van de Heeren VAN DE SANDE BAKHUYZEN, BEHRENS, SCHOLS, STOKVIS, MICHAËLIS, en VAN DIESEN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Een brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken (24 Januari 1891), waarin kennis wordt gegeven, dat in de maand Mei e. k. het 2e ornithologisch Congres gehouden zal worden te Buda-Pesth, en dat de Hongaarsche Regeering den wensch te kennen heeft gegeven, dat die bijeenkomst door een afgevaardigde der Nederlandsche Regeering mocht worden bijgewoond. De Minister is bereid, aan dit verlangen gevolg te geven, indien de opdracht daartoe aan een erkend bekwaam Nederlandsch Ornitholoog, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, kan worden verleend, en noodigt de Afdeeling uit, met eenigen spoed te willen mededeelen, of er, en zoo ja welke, Nederlandsche Ornithologen bereid zijn, eene opdracht als de boven bedoelde, buiten bezwaar van 's Rijks schatkist, te aanvaarden.

Op eene desbetreffende vraag van den Voorzitter, deelt de Secretaris mede, dat eene dergelijke missive van den Minister bij de Afdeeling ontvangen was, toen het eerste ornithologische Congres zou samenkomen, en dat toen, daar geen

van de zoölogische leden der Afdeeling zich beschikbaar wenschte te stellen, besloten werd, den Heer A. van Bemmelen, Directeur van den Dierentuin te Rotterdam, uit te noodigen, zich het mandaat als afgevaardigde der Regeering te laten welgevallen. Genoemde Heer had echter voor die opdracht bedankt.

Na deze mededeeling, en nadat opnieuw gebleken was, dat niemand van de zoölogische leden der Afdeeling het door den Minister bedoelde mandaat wenschte te aanvaarden, wordt besloten, de Heeren A. van Bemmelen voornoemd, en J. Büttikofer, Conservator aan 's Rijks Museum van natuurlijke Historie te Leiden, met het verlangen des Ministers bekend te maken en, zoodra hunne antwoorden ontvangen zijn, de noodige inlichting aan Z. Exc. te verschaffen.

3°. Het bericht van overlijden van wijlen den Heer Jean Baptiste Joseph Liagre, Secrétaire perpétuel de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, op den 13den Januari j.l. Wordt besloten, deze kennisgeving met een adres van rouwbeklag te beantwoorden.

4°. Een schrijven van den heer Dr. Jan de Vries, leeraar aan de H. B. S. te Kampen, ter begeleiding van eene verhandeling over »Involuties in het complexe vlak", welke wordt aangeboden voor de werken der Akademie. De Heeren Schoute en Bierens de Haan verklaren zich bereid, over de verhandeling te rapporteeren in de Februari-vergadering.

— De Heeren Suringar en C. A. J. A. Oudemans, aangewezen om te adviseeren omtrent de bestemming, te geven aan het door den Heer Dr. F. A. F. C. Went aan de Afdeeling overgelegde Verslag van zijn verblijf aan het Buitenzorgsche Station, stellen voor, dit verslag te doen opnemen in de Verslagen en Mededeelingen, en op het Proces-Verbaal der December-zitting te doen volgen. Aldus wordt besloten.

— De Heeren Schoute en Bierens de Haan brengen een gunstig rapport uit over de in de December-vergadering in hunne handen gestelde verhandeling van den Heer J. C.

KLUYVER, leeraar aan de H. B. S. te Breda. De conclusie strekt om haar te bestemmen voor de Verslagen en Mededeelingen. Aldus wordt besloten.

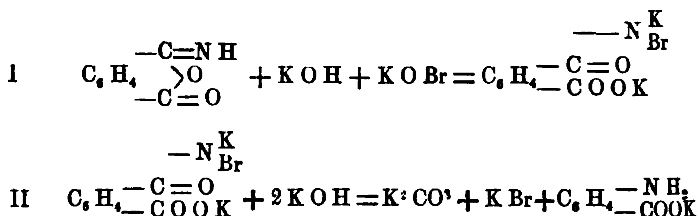
— De Heer VAN BEMMELEN brengt, bij ontstentenis van den Heer BEHRENS, een beknopt verslag uit over hetgeen in het jaar 1890 door de geologische Commissie werd verricht, en legt daarbij over de uitvoeriger opstellen van de Heeren Dr. J. LORIÉ, Dr. H. VAN CAPPELLE en den Heer SCHROEDER VAN DER KOLK, die zich bereid hadden verklaard, de Commissie in hare werkzaamheden behulpzaam te zijn. Tevens wordt door den penningmeester der Commissie, den heer VAN RIEMSDIJK, de rekening en verantwoording overgelegd van de som van *ƒ* 500, waarover de Commissie in het afgeloopen jaar mocht beschikken. Die rekening en verantwoording sluit met een voordeelig saldo van *ƒ* 37.40. Na eenige discussie wordt besloten, den Minister van Binnenlandsche Zaken een afschrift aan te bieden van het voorgelezen beknopter rapport, en daaraan de mededeeling toe te voegen, dat binnen kort de gedrukte uitvoerige verslagen aan Z. Exc. zullen worden toegezonden. Ook wordt aangenomen het voorstel der Commissie, om eene nieuwe subsidie van *ƒ* 500 voor het jaar 1891 aan te vragen, nadat door den Heer MARTIN, ook uit naam der Heeren VAN BEMMELEN en VAN RIEMSDIJK, te kennen was gegeven, dat voor het oogenblik geen hoogere som werd genoemd, omdat de schijn van concurrentie vermeden moest worden met plannen van anderen, welke zich de vervaardiging van eene geologische kaart van Nederland ten doel hadden gesteld.

— De Heer HOOGEWERFF spreekt, ook uit naam van het lid VAN DORP — in verband met hun vroegeren arbeid over de omzetting van succinphenylamide met onderbromigzuurkalium — over de inwerking van onderbromigzure en onderchlorigzure alkaliën op phtaalimide.

Wordt 1 mol. phtaalimide, onder omschudden en afkoelen, opgelost in een loog, die 3 mol. KOH in 10 pCt. opl. en 1 mol. $KOBr$ bevat; aan die oplossing nog 3 mol. KOH

toegevoegd, en — na verwarming tot op 80° C. — de vloeistof met azijnzuur zuur gemaakt, zoo wordt door toevoeging van azijnzuurkoper een onoplosbaar koperzout neergeslagen, waaruit door ontleding met H_2S anthranilzuur wordt gewonnen in eene hoeveelheid, 85 pCt. bedragende van die, welke de theorie aanwijst.

Het is nog niet met zekerheid te zeggen of aan het gewone phtaalimide de symetrische of de onsymetrische formule toekomt. Uitgaande van deze laatste kan de vorming van het anthranilzuur door de volgende vergelijkingen wedergegeven worden:



Neemt men voor het imid de symetrische formule aan, zoo kan men soortgelijke vergelijkingen opstellen.

Dezelfde omzetting werd ook met andere onderbromigzure zouten der alkaliën of der alkalische aarden, ook met de onderchlorigzure zouten dier metalen verkregen.

Spreker treedt nog in eenige bijzonderheden aangaande de afscheiding en zuivering van het anthranilzuur en voert de bewijzen aan voor de identiteit van het door bovengenoemde reactie verkregen zuur met het orthoamidobenzoëzuur, het ook uit indigo gewonnen anthranilzuur — onder meerdere: het smeltpunt van het zuur en van verscheidene zijner verbindingen en de omzetting in salicylzuur. De zwavelzure verbinding, bereid met anthranilzuur, afkomstig van indigo, kristalliseert in water niet met 2 mol. kristalwater, zooals gewoonlijk opgegeven wordt, doch met eene hoeveelheid, die met 1 mol. (of iets meer) overeenkomt. Voor de zwavelzure verbinding van het anthranilzuur uit phtaalimide werd hetzelfde kristalwatergehalte en door Prof. Behrens denzelfden kristalvorm waargenomen als voor de eerstgenoemde verbinding.

Op de beteekenis, die in eene vereenvoudigde bereidings-

wijze van het anthranilzuur kan gelegen zijn, wordt gewezen. Proeven, door Dr. BEIJERINCK genomen, toonen aan, dat in het vermogen de alkoholgisting en azijnzuurvorming tegen te gaan, het anthranilzuur ver bij het salicylzuur achterstaat. Tegenover de melkzuurgisting werden gunstiger resultaten verkregen en kwam de werking van 3—5 deelen anthranilzuur met 1 deel salicylzuur overeen.

Zeer zuiver salicylzuur — vrij van de gewone bijmengingen van het uit phenol bereide salicylzuur — kan gemakkelijk uit anthranilzuur worden gewonnen.

Ook de omzetting van het volgens ASCHAN uit phtaalimide bereide phtaaldiamide met onderbromigzuur- en onderchlorigzuurkalium in alkalische oplossing, werd nagegaan.

Werd 1 mol. KOBr of KOCl op 1 mol. $C_6H_4 \begin{matrix} NH_2 \\ -C\ NH_2 \\ >O \\ -C=O \end{matrix}$

genomen, zoo ontstond het benzoyleenureum, identisch met de verbinding, die door GRIESS uit orthoamidobenzoëzuur en ureum is bereid. Met 2 mol. K O Br wordt een gebroomd derivaat van dat ureum verkregen.

Aan de Heeren VAN BREUKELEVEEN en DOCTERS VAN LEEUWEN brengt de spreker dank voor de toewijding, waarmede door hen aan dezen arbeid werd deelgenomen.

Verschillende praeparaten, waarop het medegedeelde betrekking had, werden getoond.

De Heer LORENTZ bespreekt MAXWELL's theorie der electriciteitsbeweging en behandelt in het bizonder de verschijnselen in ponderabele stoffen, die in beweging verkeeren, terwijl de daarin aanwezige aether in rust blijft. Daarbij wordt elke electrische stroom in zulk eene stof en elke diëlectrische polarisatie van hare molekulen opgevat als eene verplaatsing van electrisch geladen deeltjes, die door tusschenkomst van den aether op elkander werken. Van deze deeltjes wordt aangenomen, dat zij eene zekere uitgebreidheid bezitten en dat de ruimtedichtheid ε hunner electrische lading doorloopend van punt tot punt verandert en aan de buitenzijde

0 wordt, bovendien dat de aether de deeltjes doordringt, zoodat ook in hun binnenste eene diëlectrische verplaatsing in den aether bestaat.

De componenten dezer verplaatsing worden door f, g, h voorgesteld; zij worden, evenals andere grootheden, die ter sprake komen, in electromagnetische maat uitgedrukt en als functiën van den tijd t en de coördinaten x, y, z van een vaststaand punt opgevat.

Buiten de electrisch geladen deeltjes voldoen f, g, h aan de voorwaarde:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=0,$$

maar binnen een deeltje moet men deze vergelijking vervangen door:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}=\varepsilon.$$

De verplaatsing van een geladen deeltje door den stilstaanden aether wordt in rekening gebracht door in aanmerking te nemen, dat nu op deze, dan op gene plaats de som der drie differentiaalquotienten eene voorgeschreven waarde ε moet hebben.

Voor de componenten van den electrischen stroom worden de volgende uitdrukkingen aangenomen:

$$u=\varepsilon\xi+\frac{\partial f}{\partial t},\ v=\varepsilon\eta+\frac{\partial g}{\partial t},\ w=\varepsilon\zeta+\frac{\partial h}{\partial t},$$

waarin ξ, η, ζ de componenten der snelheid van het geladen deeltje voorstellen.

Overal is:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Verder wordt ondersteld:

1. dat aan deze stroomcomponenten op de gewone wijze

eene magnetische kracht beantwoordt, waarvan de componenten α, β, γ bepaald worden door de vergelijkingen:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z} = 4\pi u, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 4\pi v, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 4\pi w,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0;$$

2. dat het arbeidsvermogen van plaats per volumeëenheid is:

$$2\pi V^2 (f^2 + g^2 + h^2)$$

(V voortplantingssnelheid van het licht in den aether);

3. dat de kinetische energie per ruimteëenheid de waarde

$$\frac{1}{8\pi} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

heeft;

4. dat de ligging der deeltjes, die wegens hunne beweging dit laatste arbeidsvermogen bezitten, bepaald is door den stand der electrisch geladen deeltjes en door de waarden van f, g en h in elk punt der ruimte.

De bewegingsvergelijkingen worden door toepassing van het beginsel van d' Alembert verkregen. Vooreerst moet overal

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

zijn; deze vergelijkingen, vereenigd met de vorige, bepalen den toestand in den aether, wanneer de beweging der geladen deeltjes gegeven is.

In de tweede plaats worden de componenten der kracht, welke een geladen deeltje van den aether ondervindt,

$$X = 4\pi V^2 \int \varepsilon f \, d\tau + \int \varepsilon (\eta \gamma - \zeta \beta) \, d\tau,$$

$$Y = 4\pi V^2 \int \varepsilon g \, d\tau + \int \varepsilon (\zeta \alpha - \xi \gamma) \, d\tau,$$

$$Z = 4\pi V^2 \int \varepsilon h \, d\tau + \int \varepsilon (\xi \beta - \eta \alpha) \, d\tau.$$

Deze formules, waarin $d\tau$ een volumeëlement voorstelt, moeten dienen bij het onderzoek naar de beweging der geladen deeltjes.

Op eenvoudige wijze kunnen uit deze uitkomsten de wetten worden afgeleid voor de electrostatische verschijnselen, de inductiestroomen en de electrodynamische werkingen. Ook kunnen de vergelijkingen worden gebezigd om de snelheid van het licht in een ponderabelen isolator te berekenen. Men kan nl. aannemen, dat de molekulen van zulk een lichaam geladen deeltjes bevatten, die zich ten opzichte van elkander kunnen verplaatsen, maar door krachten, die in den bouw van het molekuul haren oorsprong hebben, naar hunne evenwichtsstanden worden teruggedreven. In een lichtbundel voeren deze deeltjes trillingen uit, die gepaard gaan met periodieke diëlectrische verplaatsingen in den aether en waarvan de voortplanting onderzocht kan worden, zoowel wanneer de ponderabele stof zich door den aether voortbeweegt, als wanneer zij in haar geheel in rust is. Onderstelt men het laatste, dan vindt men, dat de brekingsindex n met de dichtheid d der stof zoo moet veranderen, dat de uitdrukking

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\, d}$$

standvastig blijft, indien ten minste bij verandering in de onderlinge afstanden der molekulen deze elk op zich zelf dezelfde eigenschappen behouden.

Neemt men aan, dat de ponderabele stof zich verplaatst, dan vindt men voor den »meêsleepingscoëfficient" de waarde

$$1 - \frac{1}{n^2},$$

die reeds door FRESNEL werd aangenomen en in de theorie der aberratie eene belangrijke rol speelt.

— De Heer A. C. OUDEMANS JR. biedt ter plaatsing in de werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer J. W. RETGERS, mijn-ingenieur, tijdelijk te 's Gravenhage, »Over de samenstelling van het duinzand van Nederland". De Voorzitter stelt de verhandeling om advies in handen van de Heeren BEHRENS en VAN BEMMELEN, nadat de Heer VAN 't HOFF bezwaar had gemaakt, als lid der adviseerende Commissie werkzaam te zijn.

— Voor de Bibliotheek der Akademie wordt, namens den Heer Dr. J. LORIÉ, door de Heer VAN RIEMSDIJK aangeboden, diens »Contributions à la Géologie des Pays-Bas"; V.

— Daar er verder niets te verhandelen is, wordt de Vergadering gesloten.

VERSLAG

DER

COMMISSIE VOOR HET GEOLOGISCH ONDERZOEK VAN NEDERLAND

OVER HET JAAR 1890.



De Commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland heeft de eer, aan de Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen het volgende mede te deelen.

Nadat door de Commissie bericht was ontvangen, dat eene Rijks-subsidie van *f* 500 voor het doen van geognostische onderzoekingen in Nederland was verleend, wendde de Commissie zich tot de volgende heeren, met verzoek om medewerking:

Prof. Dr. F. J. P. VAN CALKER te Groningen.

Dr. J. LORIÉ te Utrecht.

Dr. H. VAN CAPPELLE te Sneek.

Dr. G. A. F. MOLENGRAAFF te Amsterdam.

J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK, Candidaat in de geologie te Leiden.

Zij mocht van genoemde heeren de mededeeling ontvangen, dat zij bereid waren, ter bereiking van het beoogde doel, hunne gewaardeerde medewerking te verleenen. Ten gevolge van bijkomende omstandigheden, kon in het afgeloopen jaar slechts door drie hunner aan de onderzoekingen worden deelgenomen, namelijk door de Heeren LORIÉ, VAN CAPPELLE en SCHROEDER VAN DER KOLK.

Door den Heer LORIÉ werden bezoeken gebracht aan het Merwedekanaal en aan den nieuwen Maasmond; buitendien werden door hem onderzocht de hoogvenen in het oosten van Noordbrabant en het aangrenzende gedeelte van Limburg, eindelijk de omgeving der hoogvenen van Hoogeveen-Coevorden-Ommen en Hardenberg-Almelo.

De uitkomsten dezer onderzoekingen zullen door den heer LORIÉ zoo spoedig mogelijk, met andere tot een geheel vereenigd, in het licht gegeven worden.

De Heer VAN CAPPELLE stelde onderzoekingen in West-Drenthe in het werk en de Heer SCHROEDER VAN DER KOLK bracht een bezoek aan de sluisput te IJmuiden; laatstgenoemde ging buitendien de verspreiding der kristtallijne erratica na in de Noordelijke provinciën van Nederland.

De Commissie kan voor het overige naar de verslagen verwijzen, die door genoemde heeren zijn ingediend en voor de opneming in de Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie worden aangeboden. Uit den aard der zaak zijn deze verslagen slechts de uitkomsten van voorloopig in het werk gestelde onderzoekingen, omdat eene volledige bewerking meer tijd vereischt dan tot nu toe beschikbaar was.

Wat betreft de rekening, verwijst de Commissie naar de hiernevensgaande verantwoording *).

31 Januari 1891.

TH. H. BEHRENS, *Voorzitter*
A. D. VAN RIEMSDIJK, *Secretaris.*

---

*) Voor deze verantwoording vergelijke men het Jaarboek 1890.

RAPPORT

OVER DE

IN DE MAANDEN SEPTEMBER EN OCTOBER 1890 GEDANE ONDERZOEKINGEN,

DOOR

Dr. J. LORIÉ.

I. Omgeving der hoogvenen van Hoogeveen-Coevorden-Ommen en van Hardenberg-Almeloo.

Het eerstgenoemde hoogveen, in Drenthe en Overijsel gelegen, werd op een aantal punten aan zijn omtrek onderzocht en ook hier en daar in het midden, om het verband tusschen de veenvorming en den ondergrond benevens het omgevende terrein op te sporen.

Het eerst werd de smalle noordelijke wortel tusschen Westerbork en Zweeloo nagegaan, vervolgens de westrand langs Mantinge, Drijber, Hoogeveen, Zuidwolde en Nolde.

Zoowel hier als elders bleek telkenmale de belangrijke rol, die zandstuivingen bij de vorming en de begrenzing der hoogvenen hebben gespeeld. Ten deele zijn zij jonger dan het hoogveen, ten deele ouder, soms er geheel door omgeven of zelfs bedekt, en in dit geval hebben zij haar eigenaardig karakter weder grootendeels verloren. Zij zijn dan slechts met moeite en door vergelijking met andere, beter gekenmerkte, als zoodanig te herkennen. Zeker hebben in vele gevallen zandstuivingen den eersten aanleg tot de hoogveenvorming gegeven,

Nevens den westrand werd ook de oostrand in oogenschouw genomen bij de dorpen Gees, Dalen, Dedemsvaart, waarna het gedeelte van het hoogveen ten zuiden van de Dedemsvaart en de Reest aan de beurt kwam, uitgaande van Hardenberg, Ommen, Avereest en Staphorst. Door vergelijking van deze waarnemingen onderling en met andere, in dezen en vorige zomers gedaan, werd eene verklaring voor het ontstaan van hoogveen *op deze plaatsen* beproefd. Dit toch was het hoofddoel van het onderzoek: meer de geologisch-physische dan wel de botanisch-chemische zijde van het vraagstuk toe te lichten.

Dergelijke onderzoekingen en waarnemingen werden ook in het werk gesteld met het kleinere hoogveen tusschen de Vecht en de Radewijker-Beek ten oosten van Gramsbergen.

Nauwkeurig werd verder gedurende verscheidene dagen, van Hardenberg uit, het hoogveen bezocht, dat zich van den hoogterug van Velsen over Sipculoo, enz., naar Almeloo uitstrekt. Het eerst werden de drie uitloopers van het hoogveen naar het noord-oosten onderzocht, waar de wetten tevens werden nagegaan, die ik omtrent de verspreiding der hoogvenen in ons land had meenen te vinden. In verband daarmede werden ook eenige waarnemingen in het Diluvium gedaan, die tot eenige ontdekkingen leidden.

II. De hoogvenen in het oosten van Noordbrabant en het aangrenzende gedeelte van Limburg.

Het eerst werd een aanvang gemaakt met de hoogvenen en peelen tusschen Grave en Meijel. Van het dorp Uden uit werden zoowel de oost- als de westgrenzen bezocht, waarbij weder de aanzienlijke rol, die de zandstuivingen spelen, telkenmale in het oog viel. Vervolgens werd hetzelfde van Helmond en Meijel uit verricht.

Dit laatste dorp was mijn standkwartier vóor een aantal excursies naar het hoogveen: »Astensche Peel", dat intusschen grootendeels afgegraven is, en welks onregelmatige gedaante in hooge mate het gevolg is van de zandstuivingen,

Van Weert uit werd vooreerst het hoogveen bij Hamont onderzocht, waarvan nog slechts zeer weinig over is en welks geschiedenis zeer ingewikkeld bleek te zijn. Vergelijking met de resultaten van ons onderzoek van de Astensche Peel en de overige hoogvenen, deed ons echter weder hier den weg vinden. Nieuwe en m. i. belangrijke beschouwingen over den oorsprong en de vervorming van ons Diluvium vloeiden uit deze waarnemingen voort.

Gedurende de excursies bleek het overtuigend, dat ik mij niet enkel tot de hoogvenen zelven kon bepalen, maar ook de omgeving in vrij uitgebreiden zin in den kring mijner onderzoekingen moest opnemen.

Grootendeels wederom van Weert uit, werden daarom nog uitstapjes gemaakt, hoofdzakelijk tusschen den spoorweg Grand-Central-Belge en de Maas, die mede verrassende uitkomsten opleverden. Gedeeltelijk moeten zij in een volgend seizoen nog voortgezet en voltooid worden.

III. Bezoek aan den Nieuwen-Maasmond.

Hiertoe bleek een dag geheel voldoende te wezen (7 October), daar er slechts een klein gedeelte, ten noorden van van de halte Capelle-Nieuwe Vaart ontgraven en tevens droog was.

Dit kleine stuk leverde intusschen verscheidene goede doorsneden van den bodem op, die in teekening werden gebracht en daardoor omtrent de afwisselende verhoudingen van rivierzand, bruine en blauwe klei veel licht verschaften. Veen werd er ook aangetroffen, doch slechts in geringe hoeveelheid. Het is grootendeels weder bij doorbraken en overstroomingen weggeslagen en door klei en zand vervangen.

IV. Bezoeken aan het Merwedekanaal.

Van mijne woonplaats, Utrecht, uit, was daartoe eene zeer geschikte gelegenheid, zoowel rechtstreeks te voet, als ook van het station Nieuwersluis uit. Het hier gevondene sluit zich zeer goed aan bij de waarnemingen in den Nieuwen Maasmond. De veenlaag is hier evenwel van veel meer beteekenis en in veel geringere mate door klei en zand

vervangen. Een gedeelte van dit rivierzand is zelfs van jongere dagteekening dan het veen, daar het hierop rust.

Ook deze onderzoekingen zullen in het aanstaande seizoen verder voortgezet worden.

De gezamenlijke resultaten zullen later in behoorlijk verband en meer uitvoerig worden behandeld.

Utrecht, Januari 1891.

KORT VERSLAG

VAN EENIGE, DEZEN ZOMER IN WEST-DRENTHE GEDANE GEOLOGISCHE WAARNEMINGEN,

DOOR

H. VAN CAPPELLE.

Eenige aan het einde van het vorig jaar in West-Drenthe verrichte en door mij onderzochte grondboringen hadden tot eenige vragen aanleiding gegeven, die mij een onderzoek van het diluvium van dit gebied zeer gewenscht deden voorkomen. Toen ik in den afgeloopen zomer door de Akademische Commissie voor het geologisch onderzoek van Nederland tot het doen van eenige waarnemingen werd uitgegenoodigd en mij gevraagd werd, welke onderzoekingen ik op het oog had, viel mij dus eene keuze niet moeielijk.

Hoewel de tijd, met het oog op de beschikbare geldmiddelen, te kort was, om voor eene gedetailleerde beschrijving van den bodem van West-Drenthe de noodige bouwstoffen te kunnen verzamelen, toch hebben mijne omzwervingen door Drenthe mij reeds met eenige belangrijke verschijnsels bekend gemaakt.

In de eerste plaats werden in de omstreken van Havelte talrijke waarnemingen gedaan. De bodem dezer gemeente is zóó buitengewoon rijk aan steenen, dat hier niet lang naar de sporen eener vroegere gletscherwerking gezocht behoefde te worden. Het bleek, dat blokken — de grondmoraine van het diluviale landijs — er eene enorme verspreiding bezit: niet alleen treft men in het dorp bijna

overal deze vorming, hetzij aan de oppervlakte, hetzij met eene dikkere of dunnere steenzand-bedekking aan, doch ook de uitgestrekte heidevelden, die in deze gemeente zoo menigvuldig zijn, vertoonen dezelfde samenstelling en zouden dus voor eene ontginning in de eerste plaats in aanmerking moeten komen.

Niet alleen de gesteenten, welke de blokleem insluit, werden bestudeerd, doch ook naar de dikte der grondmoraine werd een onderzoek ingesteld. Daardoor kon worden aangetoond, dat de blokleembank op de laagstgelegen punten de grootste dikte bereikt, dunner wordt naarmate men de hoogten bestijgt en dat de onderliggende gelaagde zandvorming (glaciaal gelaagd diluvium), welke als eene afzetting der gletscherbeken van het naderende landijs moet beschouwd worden, op enkele punten uit het doorgaans vlakke terrein van de blokleem te voorschijn komt. Op dezen regel, die wij ook elders in ons land hebben waargenomen, maken de onder den naam van den Havelter- en den Bisschopsberg bekende aanzienlijke bodem-verheffingen eene uitzondering. Zelfs op den top van deze hoogten vindt men hier en daar blokleem ontwikkeld. De bouw dezer heuvels werd door gravingen nauwkeuriger nagegaan, waarvan de uitkomsten mij de overtuiging schonken, dat genoemde hoogten de overblijfselen eener eindmoraine zijn.

Daarna werden twee dagen in de gemeente Steenwijkerwold doorgebracht, waar het moraine-landschap ontwikkeld bleek te zijn, ten zuiden begrensd door aanzienlijke bodemverheffingen: den Woldberg en den Eezer rug, welke eveneens voor de brokstukken eener eindmoraine moesten verklaard worden.

Ook de zooeven genoemde, onder de grondmoraine ontwikkelde, zandvorming werd nauwkeuriger onderzocht en aangetoond, dat hier en daar glaciaal gelaagd gemengd diluvium niet ver van de oppervlakte ligt, zoodat het voorkomen van enkele witte kwartsen in het West-Drenthsch diluvium te begrijpen is.

Laatstgenoemd verschijnsel deed mij, in verband met beschouwingen, waartoe de reeds genoemde grondboringen hadden

aanleiding gegeven, tot eenige excursies ook door Midden-Drenthe besluiten.

In de omgeving van Ruinen, Zuidwolde, Echten, Beilen en Hooghalen, werden waarnemingen gedaan en aangetoond, dat op verschillende punten van Midden-Drenthe met de Noordsche gesteenten zooveel zuidelijke steenen gemengd zijn, dat in plaats van Skandinaafsch, Gemengd diluvium op de kaart zal moeten aangegeven worden, zoodat de oude geologische kaart ook hier belangrijke wijzigingen zal moeten ondergaan. Dit Gemengd diluvium bevat ook in Drenthe vormingen van zeer verschillende samenstelling en oorsprong. Wordt het nl. hier door glaciaal gelaagd diluvium vertegenwoordigd (Hunnekloosterberg bij Ruinen), elders is het de grondmoraine, die, behalve noordelijke gesteenten, zuidelijk materiaal bevat (Echten, Zuidwolde, Beilen). Door gravingen kon worden aangetoond, dat, waar het laatste het geval is, de grondmoraine eene geringe dikte bezit en op glaciaal gelaagd gemengd diluvium rust.

Eerst wanneer wij onze in den afgeloopen zomer gedane waarnemingen in een volgend jaar zullen hebben voortgezet, zal tot het samenstellen eener verhandeling over het diluvium van West-Drenthe kunnen worden overgegaan.

Sneek, 24 Dec. '90.

ONDERZOEK NAAR DE VERSPREIDING DER KRISTALLIJNE ERRATICA

IN DE

NOORD-OOSTELIJKE PROVINCIËN VAN NEDERLAND.

(19 Sept.—23 Oct. 1890.)

DOOR

J. L. C. SCHROEDER VAN DER KOLK.



Het hoofddoel van het korte onderzoek was: een bijdrage tot de kennis der horizontale en verticale verspreiding van de kristallijne gesteenten in Nederland te leveren. Achtereenvolgens werden als punt van uitgang Groenlo, Oldenzaal, Assen, Groningen, Zwolle, Zutfen en Utrecht bezocht. Daar aan het trekken van een grens tusschen noordelijk en zuidelijk diluvium groote bezwaren zijn verbonden, is een poging gedaan het geleidelijke van den overgang ook in het onderzoek op te nemen, door het gehalte aan onmiskenbaar noordelijke zwervelingen aan te geven, en wel zoo dat dit in kaart kan worden gebracht. Op deze wijze kunnen wat betreft de hoeveelheid, 9 trappen onderscheiden worden, die niet te moeielijk uit elkander zijn te houden. Op het feit dat het gehalte aan noordelijk gesteente met de grootte der keien toeneemt en op andere storingen werd zooveel mogelijk acht geslagen.

Bij Groenlo werd in het algemeen opgemerkt, dat het gehalte aan noordelijk materiaal bij toenemende diepte van gravingen en boringen afnam; verder dat het van punt tot punt sterk uiteenliep, zoodat het onderzochte gebied in twee evenwijdig loopende N.N.O. gerichte velden kan verdeeld

worden; op het westelijkste zijn noordelijke zwervelingen zeldzaam op het oostelijkste niet; het westelijke bevat de velden of grintgravingen bij Luddik Es, t. W. v. Eibergen, halfweg Eibergen Zwilbroek, Wessels; het oostelijke de vindplaatsen, ongeveer twaalf in getal, tusschen Haaksbergen en het Vragender veld. Enkele keien met meer dan metergroote afmetingen werden waargenomen, silurische kalken daarentegen niet. Een bijna drie meter diepe graving gaf een fragment, mogelijk van *Pecten*, en vele uiteengeschoven gesteenten die bij uitgraving op elkander pasten; onmiskenbaar noordelijke zwervelingen bevonden zich niet in de groeve, wel in de onmiddelijke nabijheid op den beganen grond. Hier werden ook schoone „driekanters" met scherpe S vormige nok verzameld. Een der bijeengebrachte keien vertoont gletscherkrassen. Het diluvium, dat bestanddeelen van tertiaire afkomst schijnt opgenomen te hebben, is meestal zandig, bevat enkele malen echter kleibankjes; een daarvan was ongeveer een meter dik met regelloos gerichte gesteenten en bestond uit een zeer harden, echter kalkvrijen leem.

Bij Oldenzaal schijnen de schommelingen in het gehalte minder groot te zijn dan bij Groenlo, het gehalte zelf belangrijker. Ook hier werd het afnemen met de diepte waargenomen, en het geheel ontbreken daar waar tot op den veelvuldig voorkomenden groenen leem was gegraven.

Rolde gaf eenige goede voorbeelden van keileem, die in het voor mij beschikbare gedeelte vrij van kalk was en keien met gletscherkrassen, Ålandgesteenten (o. a een rapakivi), elfdalensche porfier en andere noordelijke zwervelingen opleverde. Zeer talrijk waren de Ålandgesteenten op een veld bij Gieten niet ver van de provinciale leemgroeve. In laatstgenoemde groeve ligt de leem aan de oppervlakte, bevat Ålandgesteenten (ook rapakivi), Elfdalensche porfier enz.; op ongeveer 1 Meter diepte begon de leem zandig te worden en werd het water in dezen tijd van het jaar bereikt; dit belette het onderzoek dieper voort te zetten; naar mij medegedeeld werd volgt zand (lehmstreifig) meestal met een oerplaat; daarop volgt wederom leem met keien, die, zooals uit twee putboringen in den zomer 1889 zou gebleken zijn,

op een zuiveren klei zonder gesteenten zou liggen. Dit kan pas in een droger jaargetijde onderzocht worden; wellicht zou dan voor dit op de voortzetting van den Hondsrug gelegen punt een herhaalde ijsbedekking kunnen aangetoond worden.

Bij Heiligerlee werd keileem en Beyrichienkalk en andere gesteenten met gletscherkrassen aangetroffen.

In Steenwijk werd hoofdzakelijk aan de haven verzameld.

Epe gaf als gehalte dergelijke afwisselende getallen als Groenlo; de mergelgroeve onder Tongeren was thans ongebruikt en ontoegankelijk; »driekanters" ook onder granieten zijn hier zeer algemeen.

De uitgestrekte leemgroeven bij den Viersprong bij Markelo konden door het vele water slechts als verzamelplaats gebruikt worden.

In het geheel werden ongeveer 500 gesteenten verzameld grootendeels kristallijn en van noordelijke afkomst; een gedeelte hiervan wordt mikroskopisch onderzocht en met in den zomer van dit jaar in N.Duitschland, Noorwegen en Zweden door mij verzameld materiaal vergeleken. Enkele, o.a. boven vermelde punten moeten nog nader bezien worden.

Over de waargenomen horizontale verspreiding kan echter voorloopig het volgende medegedeeld worden.

Ålandgranieten, — porfier en — rapakivis zijn bij Groenlo niet zeldzaam, evenmin bij Oldenzaal; bij Rolde werden zij uit den keileem verzameld, zoo ook bij Gieten; een veld bij laatstgenoemde plaats bevatte ze in overvloed; in den Oosthoek van Groningen kwamen zij voor; in het Noorden van de Veluwe bij Epe en Tongeren werden Ålandgraniet en porfier verzameld; de Markelo'sche keileem leverde alle drie soorten op; ook van de Maarn is een twijfelachtige vondst.

Elfdalensche porfier vertoonde een dergelijke verspreiding, kwam echter zeldzamer voor.

Diabaas en basalt bleken slechts verzameld te zijn van plaatsen zuidelijker dan Oldenzaal; of dit toeval is, dan wel dat deze gesteenten allen van zuidelijken oorsprong zijn, moet uit nader onderzoek blijken.

Scolitheszandsteen werd behalve op twee plaatsen bij Groenlo, waar overigens slechts een gering gehalte aan noordelijke zwervelingen was gevonden, ook nog bij Markelo verzameld.

De omstreken van Oldenzaal waren rijk aan roode vuursteenen.

Natuurlijk is dit overzicht voorloopig en kan eerst na eenige maanden in vollediger en samenhangender vorm gegeven worden.

Leiden, December 1890.

VERSLAG

OMTRENT DE VERHANDELING VAN DEN HEER

J. C. KLUYVER:

»OVER DE BUIGRAAKLIJNEN EENER RUIMTEKROMME VAN DEN VIERDEN GRAAD EN DE EERSTE SOORT."

(Uitgebracht in de Vergadering van 31 Januari 1891).

In het eerste stuk van het in bewerking zijnde achtste deel der *Verslagen en Mededeelingen* verscheen de verhandeling van den Heer Kluyver, getiteld: »Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid", over welke wij in de vergadering van Juni 1890 een gunstig rapport mochten uitbrengen. Aan deze sluit zich de nieuwe verhandeling van denzelfden schrijver, die in de vorige maand in onze handen gesteld is, in menig opzicht aan. In beide worden bijdragen geleverd tot de kennis van de theorie van vier elkaar kruisende lijnen. Gold het in de vorige verhandeling vier willekeurige lijnen en vier raaklijnen eener ruimtekromme R^3, thans wordt de betrekking opgespoord tusschen vier buigraaklijnen eener ruimtekromme $R^4{}_1$ en het verband onderzocht tusschen de punten, waarin vier willekeurige lijnen door een kromme $R_1{}^4$ kunnen worden aangeraakt.

In de eerste der beide studies kon de Heer Kluyver uitgaan van de door Schubert en Voss bewezen stelling, dat er tusschen de invarianten (gh), op de bekende wijs opgebouwd uit de lijncoördinaten van vier raaklijnen eener R^3

twee aan twee genomen, een identieke betrekking bestaat, tengevolge waarvan het vraagstuk een R^3 te construeeren, die vier gegeven lijnen aanraakt, òf onoplosbaar òf onbepaald is. In de nieuwe studie bewijst de schrijver — en hierbij is hij, bedriegen wij ons niet, geheel oorspronkelijk — met betrekking tot vier buigraaklijnen eener $R_1{}^4$ het overeenkomstige. Hoewel $R_1{}^4$ door zestien constanten bepaald is en men deze figuur dus schijnbaar viermaal de viervoudige voorwaarde opleggen kan een gegeven lijn tot buigraaklijn te hebben, blijkt er tusschen vier elkaar kruisende buigraaklijnen eener $R_1{}^4$ steeds een invariante betrekking te bestaan, zoodat ook het vraagstuk een $R_1{}^4$ te construeeren, die vier gegeven lijnen tot buigraaklijnen heeft, òf onoplosbaar òf onbepaald is.

Zoo als bekend is, liggen de zestien buigpunten eener $R_1{}^4$ vier aan vier in de zijvlakken van het gemeenschappelijk poolviervlak der door de kromme gaande oppervlakken F^2 en vindt men de bij de in een zijvlak gelegen buigpunten behoorende buigraaklijnen door deze punten met het overstaande hoekpunt van dit poolviervlak te verbinden. Hieruit volgt dan verder onmiddellijk, dat men alleen dan vier elkaar kruisende buigraaklijnen verkrijgt, als men de vier buigpunten gelijkelijk aan de vier zijvlakken van het poolviervlak ontleent. Dit kan 256-maal gebeuren en bij 64 van deze gevallen liggen de vier buigpunten in een vlak. Neemt men met den schrijver het bedoelde poolviervlak eener gegeven kromme $R_1{}^4$ tot coördinatenviervlak aan en drukt men de coördinaten x_1, x_2, x_3, x_4 in een enkelen parameter u uit met behulp van elliptische functies, dan bestaat er tusschen de parameters u_1, u_2, u_3, u_4 van elk der bovengenoemde 64 viertallen de betrekking $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$, terwijl elk der drie gevallen $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$, $u_3 + u_1 = u_2 + u_4$, $u_1 + u_2 = u_3 + u_4$ aan 64 der 192 overige gevallen beantwoordt. Van deze vier gevallen wordt het eerste, waarbij de vier buigpunten in een zelfde vlak liggen, het uitvoerigst door den schrijver onderzocht.

Stelt men de bij vier lijnen 1, 2, 3, 4 behoorende producten (23)(14), (31)(24), (12)(34) door a, b, c voor, dan

is $a + b + c = 0$ de voorwaarde, die uitdrukt, dat de vier lijnen buigraaklijnen zijn van een oneindig aantal krommen R_1^4 en de raakpunten van elk dezer krommen met de vier raaklijnen vier in een vlak gelegen buigpunten der kromme zijn. Zijn de lijnen 1, 2, 3 gegeven, dan vormen alle lijnen 4, die met deze gegeven lijnen aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ voldoen, derhalve een lineair complex, dat op eenvoudige wijs in verband blijkt te staan met de regelschaar (1, 2, 3). Voor dit complex worden de constructies van de bij een gegeven vlak behoorende pool en het bij een gegeven punt behoorend poolvlak ontwikkeld.

Vervolgens ontwikkelt de schrijver het begrip absolute invariant bij krommen R_1^4 en onderzoekt hij, of er een betrekking bestaat tusschen deze grootheid A en de absolute invarianten A' en A'' behoorende bij de beide bikwadratische vormen, die overeenkomen met de viertallen van snijpunten van vier elkaar kruisende buigraaklijnen met in een vlak gelegen raakpunten en de beide op deze lijnen rustende lijnen f', f''. Hierbij blijkt A aan het vierkant van $\frac{A'}{A'-2}$ en van $\frac{A''}{A''-2}$ gelijk te zijn; waaruit volgt, dat de betrekking

$$\frac{A'}{A'-2} + \frac{A''}{A'-2} = 0 \text{ met de voorwaarde } a + b + c = 0$$

samenhangt [1]) en dat de invarianten A' en A'' bij de 64 verschillende viertallen van buigraaklijnen met coplanaire raakpunten dezelfde waarden hebben. Waarschijnlijk is ook dit laatste resultaat nieuw.

De invoering van den absoluten invariant A der kromme geeft den schrijver aanleiding de gevallen $A = 0$, $A = \infty$ en $A = 1$ afzonderlijk te onderzoeken. In het geval eener equianharmonische kromme ($A = 0$) raakt elke lijn 4, die met drie gegeven lijnen 1, 2, 3 vier buigraaklijnen vormen kan, de regelschaar (1, 2, 3) in een punt van een van twee

---

[1]) Door berekening gaat $\frac{A'}{A'-2} + \frac{A}{A''-2} = 0$ werkelijk over in $s_1 (8 s_1^6 - 27 s_1^3 s_2 + 162 s_1 s_2^2 + 54 s_1^2 s_3 - 243 s_1 s_2 s_3) = 0$.

bepaalde beschrijvende lijnen aan en zijn de vier buigraaklijnen tevens raaklijnen aan een oneindig aantal krommen R^3. In het geval eener harmonische kromme ($A = \infty$) maakt elke lijn 4 deel uit van een van drie bepaalde congruenties (1, 1). En in het geval $A = 1$ heeft de kromme $R^4{}_1$ een dubbelpunt.

Alvorens tot de asymmetrische gevallen $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$, enz. over te gaan, gaat de schrijver na welk verband er bestaat tusschen de vier punten, waarin vier willekeurig gegeven lijnen t, die niet voldoen aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ en dus geen buigraaklijnen kunnen zijn, door een kromme $R_1{}^4$ kunnen worden aangeraakt, als deze vier raakpunten weer in een zelfde vlak gelegen moeten zijn. Hij komt dan tot het besluit, dat er vier nieuwe lijnen y te vinden zijn, die de eigenschap bezitten, dat elk vlak gaande door een dier lijnen y de vier gegeven lijnen t snijdt in vier »geassocieerde raakpunten," d. w. z. in vier punten, waar de lijnen t door een kromme $R_1{}^4$ kunnen worden aangeraakt. En de betrekking tusschen de vier lijnen t ter eene en de vier lijnen y ter andere zij is geheel involutorisch; m. a. w. elk vlak gaande door een der lijnen t snijdt de vier lijnen y in geassocieerde raakpunten, de lijnen y als raaklijnen beschouwd. Hieruit moet dan wel volgen — wat de schrijver niet opmerkt —, dat de vier lijnen y aan de betrekking $a + b + c = 0$ voldoen, als dit met de gegeven lijnen t het geval is. Zoo rangschikken de krommen $R_1{}^4$, die vier gegeven lijnen tot buigraaklijnen hebben, zich in vier groepen, die bij de verschillende lijnen y behooren, en is de meetkundige plaats der krommen van elke groep een oppervlak van den achtsten graad. Dit onderzoek, dat sommige punten der vorige verhandeling in een nieuw licht verschijnen doet, wordt besloten met de constructie van een kromme $R_1{}^4$, die vier willekeurig gegeven lijnen aanraakt, en die van een kromme $R_1{}^4$, die vier aan de voorwaarde $a + b + c = 0$ voldoende lijnen tot buigraaklijnen heeft.

Ten slotte beschouwt de schrijver het asymmetrische geval $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$. Hier is $(-a + b + c)^4 = 64\, a^2 b\, c$

de voorwaarde, waaronder de vier lijnen buigraaklijnen eener R^4_1 zijn. We laten de door den schrijver gegeven meetkundige verklaring van deze stelkundige uitkomst achterwege.

Bij de invoering van elliptische functies heeft de Heer KLUYVER het uitstekende werk van HALPHEN, dat wegens den vroegtijdigen dood van den genialen schrijver helaas niet is voltooid, tot leiddraad genomen. Derhalve bedient hij zich — en hij doet dit met talent — van de door WEIERSTRASS ingevoerde functie *p u*. Zoowel om de belangrijkheid der uitkomsten als om de wijs, waarop ze zijn afgeleid, komt den Heer KLUYVER een woord van grooten lof toe. Zonder eenige aarzeling stellen wij U voor zijn arbeid in de verslagen en mededeelingen te doen opnemen.

Amsterdam, Januari 1891.

P. H. SCHOUTE.
D. BIERENS DE HAAN.

OVER DE

BUIGRAAKLIJNEN EENER RUIMTEKROMME

VAN DEN

VIERDEN GRAAD EN DE EERSTE SOORT.

DOOR

J. C. KLUYVER,

Leeraar aan de H. B. S. te Breda.



De doorsnede van twee oppervlakken van den tweeden graad, de ruimtekromme R^4 van den vierden graad en de eerste soort, bezit zooals bekend is 16 buigpunten *) B, wier merkwaardige ligging reeds dikwerf een punt van onderzoek uitmaakte.

De vraag doet zich voor, of ook de 16 buigraaklijnen t, in de punten B aan de kromme getrokken, door invariante betrekkingen onderling zijn verbonden.

Het is duidelijk, dat dit tot op zekere hoogte het geval is. Immers door de kromme R^4 gaan vier kegels van den tweeden graad, wier toppen Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 de hoekpunten zijn van het poolviervlak der kromme. Elk zijvlak van dezen tetraeder snijdt R^4 in vier punten B, welker raaklijnen t door het overstaande hoekpunt Q gaan.

De 16 buigraaklijnen laten zich dus onmiddellijk in vier groepen van vier splitsen. De lijnen t van iedere groep

*) Onder „buigpunt" verstaan wij hier een punt van R^4, waar het osculatievlak stationair is.

snijden elkaar in een kegeltop Q. Kiest men evenwel uit iedere groep eene lijn t, dan blijft het voorloopig nog onbeslist, of deze vier elkaar kruisende lijnen geheel onderling onafhankelijk zijn.

Men zou geneigd zijn die vraag bevestigend te beantwoorden. Want eene kromme R^4 is eene figuur van 16 constanten, en daaraan zou men viermaal de viervoudige voorwaarde kunnen opleggen, die verlangt, dat de kromme eene gegeven lijn tot buigraaklijn heeft.

Deze zienswijze echter is onjuist; in de volgende bladzijden zal worden aangetoond, dat tusschen vier elkaar kruisende buigraaklijnen t, onverschillig of de buigpunten B al of niet in één vlak liggen, steeds ééne invariante betrekking bestaat, zoodat vier willekeurig aangenomen lijnen òf voor geene enkele kromme, òf voor eene enkelvoudig oneindige hoeveelheid van krommen R^4 als buigraaklijnen t mogen worden beschouwd.

Inzonderheid zullen wij meer uitvoerig het geval nagaan, waarbij door de vier punten B een vlak gelegd kan worden, en dan uit vier gegeven buigraaklijnen t de bijbehoorende krommen construeeren.

---

1. *De invariant van twee raaklijnen van* R^4. Wanneer $x_1, .. x_4$ en $y_1, .. y_4$ de homogene coördinaten van twee gegeven punten voorstellen, noemen wij in navolging van Salmon de determinanten

$$p = (x_2\, y_3), \qquad q = (x_3\, y_1), \qquad r = (x_1\, y_2),$$
$$s = (x_1\, y_4), \qquad t = (x_2\, y_4), \qquad u = (x_3\, y_4)$$

de homogene coördinaten der verbindingslijn, waartusschen de identieke betrekking

$$ps + qt + ru = 0$$

bestaat. Twee lijnen g en h met de coördinaten $p_g, \dots$ en $p_h, \dots$ bezitten den gemeenschappelijken invariant

$$(gh) = p_g\, s_h + p_h\, s_g + q_g\, t_h + q_h\, t_g + r_g\, u_h + r_h\, u_g,$$

welke nul wordt, wanneer g en h elkander snijden,

Wij hebben eene uitdrukking voor dezen invariant te zoeken voor het geval, dat g en h raaklijnen zijn van R^4. De theorie der elliptische functies doet daartoe een middel aan de hand. Wel is waar zou men misschien de toepassing dezer theorie kunnen ontgaan, maar met het oog op de onderscheiding der verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen, is het hier niet ondoelmatig om van het aangeboden hulpmiddel gebruik te maken. Daar het onverschillig is van welke functie men zich bedient, kunnen wij hier de functie $p u$ van WEIERSTRASS nemen, bepaald door de vergelijking

$$u = \int_{pu}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4 y^3 - g_2 y - g_3}} = \int_{pu}^{\infty} \frac{dy}{2 \sqrt{(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}}.$$

De functie $p u$ bezit evenals hare afgeleiden twee perioden 2ω en $2 \omega'$. Voor de halve perioden is

$$p \omega = e_1, \quad p(\omega + \omega') = e_2, \quad p \omega' = e_3.$$

Voor de theorie dezer functie moge verwezen worden naar HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I, II, aan welk werk alle hier voorkomende formules zijn ontleend.

Voor de coördinaten $x_1, \ldots x_4$ van een punt van R^4 mogen wij aannemen

$$\frac{x_1}{p'' u} = \frac{x_2}{p' u} = \frac{x_3}{p u.} = \frac{x_4}{1}.$$

Aan ieder punt is daardoor ééne waarde van het argument u toegevoegd. De kromme zelve wordt dientengevolge beschouwd als de doorsnede der oppervlakken

$$x_1 x_4 = 6 x_3^2 - \frac{1}{2} g_2 x_3 x_4, \quad x_2^2 = \frac{2}{3} x_3 (x_1 - g_2 x_4) - g_3 x_4^2 \text{ *)}.$$

Gemakkelijk kunnen wij nu de coördinaten van eene raaklijn g in het argument u uitdrukken. Wij denken ons

---

*) HALPHEN, II, blz. 450, „Biquadratique gauche".

slechts de lijn g als de verbindingslijn van twee punten met de argumenten u en $u + d\,u$. Zoo komen wij tot het besluit, dat de determinanten der matrix

$$\left|\begin{array}{cccc} p''\,u & p'\,u & p\,u & 1 \\ p'''\,u & p''\,u & p'\,u & 0 \end{array}\right|$$

als de coördinaten der raaklijn g mogen worden aangemerkt.

Eene dergelijke voorstelling verkrijgt men voor de lijn h, die R^4 raakt in een punt, behoorende bij het argument v, en daaruit volgt voor den invariant $(g\,h)$

$$(g\,h) = \left|\begin{array}{cccc} p''\,u & p'\,u & p\,u & 1 \\ p'''u & p''\,u & p'\,u & 0 \\ p''\,v & p'\,v & p\,v & 1 \\ p''\,v & p''\,v & p'\,v & 0 \end{array}\right|.$$

Het rechter lid dezer vergelijking ondergaat belangrijke vervormingen, wanneer wij de σ-functie invoeren *).

De toepassing van formule (18), HALPHEN, I, blz. 220 levert

$$(g\,h) = -\,2\,!\,3\,!\,\frac{\sigma\,(2\,u + 2\,v)\,\sigma^4\,(u - v)}{\sigma^8\,u\,\sigma^8\,v}.$$

Wij maken nu gebruik van

$$p'\,u = -\,\frac{\sigma\,(2\,u)}{\sigma^4\,u}\ \dagger),$$

en verkrijgen

$$(g\,h) = +\,2\,!\,3\,!\,\frac{\sigma\,(2\,u + 2\,v)\,\sigma\,(2\,u - 2\,v)}{\sigma^8\,u\,\sigma^8\,v\,p'\,(u - v)},$$

welke vergelijking ten laatste door de aanwending van

$$\frac{\sigma\,(u + v)\,\sigma\,(u - v)}{\sigma^2\,u\,\sigma^2\,v} = -\,(p\,u - p\,v)\ §),$$

*) HALPHEN, I, blz. 168.

†) Ibid., blz. 197, formule (52).

§) Ibid., blz. 171, formule (12).

overgaat in

$$(gh) = -2!\,3!\,\frac{\sigma^2 2u\,\sigma^2 2v}{\sigma^8 u\,\sigma^8 v} \times \frac{(p\,2u - p\,2v)}{p'(u-v)},$$

of in

$$(gh) = -2!\,3!\,p'^2 u\,p'^2 v \times \frac{(p\,2u - p\,2v)}{p'(u-v)} \quad \ldots \quad (A)$$

2. *De invarianten van vier buigraaklijnen van R^4.* Wanneer wij op R^4 vier punten met de argumenten $u_1, \ldots u_4$ aannemen, en aldaar de raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ trekken, bezitten deze laatste de zes onderlinge invarianten (23), (31), ... (34), welke wij met behulp der zooeven gevonden formule in de argumenten $u_1, \ldots u_4$ zouden kunnen uitdrukken. Zijn intusschen die invarianten door eene of andere vergelijking van elkaar afhankelijk, dan moet deze noodzakelijk homogeen zijn in de coördinaten van elk der vier lijnen, en derhalve alleen bevatten de drie grootheden

$$a = (23)(14), \qquad b = (31)(24), \qquad c = (12)(34),$$

voor welker verhouding wij thans vinden met behulp van de formule (A)

$$\frac{a}{\dfrac{(p\,2u_2 - p\,2u_3)(p\,2u_1 - p\,2u_4)}{p'(u_2-u_3)\,p'(u_1-u_4)}} = \frac{b}{\dfrac{(p\,2u_3 - p\,2u_1)(p\,2u_2 - p\,2u_4)}{p'(u_3-u_1)\,p'(u_2-u_4)}} =$$

$$= \frac{c}{\dfrac{(p\,2u_1 - p\,2u_2)(p\,2u_3 - p\,2u_4)}{p'(u_1-u_2)\,p'(u_3-u_4)}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Dat geldt voor vier willekeurige raaklijnen; wij moeten dus nog in aanmerking nemen, dat wij met vier buigraaklijnen in de punten $B_1, \ldots B_4$ te doen hebben.

Liggen vier punten van R^4 in een plat vlak, dan is de som der bijbehoorende argumenten nul. De buigpunten B worden derhalve bepaald door de vergelijking *)

$$4u = 0.$$

---

*) Argumenten worden hier en in het vervolg gelijk genoemd, wanneer hun verschil nul is of een geheel aantal perioden bedraagt.

Deze vergelijking splitst zich onmiddelijk in vier andere, te weten in

$$2u = \omega, \quad 2u = \omega + \omega', \quad 2u = \omega', \quad 2u = 0.$$

Ieder dezer laatste heeft vier oplossingen, die behooren bij een viertal buigpunten gelegen in een zijvlak van den tetraeder $Q_1\,Q_2\,Q_3\,Q_4$. In het vervolg nemen wij aan, dat B_1, B_2, B_3, B_4 in volgorde gelegen zijn in de zijvlakken, $Q_2 Q_3 Q_4$, $Q_3 Q_1 Q_4$, $Q_1 Q_2 Q_4$, $Q_3 Q_2 Q_1$, en dat de argumenten u_1, u_2, u_3, u_4 voldoen aan de vergelijkingen

$$2u_1 = \omega. \quad 2u_2 = \omega + \omega', \quad 2u_3 = \omega', \quad 2u_4 = 0.$$

Deze waarden voor de dubbele argumenten kunnen reeds in de formule (B) worden ingevoerd. Wij hebben namelijk

$$p\omega = e_1, \; p(\omega + \omega') = e_2, \; p\omega' = e_3, \; \mathrm{Lim}(p\,u)_{u=0} = \mathrm{Lim}\left(\frac{1}{u^2}\right)_{u=0}.$$

Wanneer wij bovendien stellen

$$e_2 - e_3 = \alpha^2, \quad e_3 - e_1 = \beta^2, \quad e_1 - e_2 = \gamma^2,$$

dan gaan de vergelijkingen (B) over in

$$\frac{\alpha^2}{a\,p'(u_2 - u_3)\,p'(u_1 - u_4)} = \frac{\beta^2}{b\,p'(u_3 - u_1)\,p'(u_2 - u_4)} =$$

$$= \frac{\gamma^2}{c\,p'(u_1 - u_2)\,p'(u_3 - u_4)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

3. *Onderscheiding der verschillende gevallen.* Eer wij eene verdere herleiding dezer vergelijkingen beproeven, moeten wij de verschillende gevallen aangeven, die zich kunnen voordoen. Wij gaan daarbij uit van de onder alle omstandigheden geldige vergelijking

$$2u_1 + 2u_2 + 2u_3 + 2u_4 = 0,$$

die blijkbaar leert, dat R^4 in de punten $B_1, \ldots B_4$ door oppervlakken van den tweeden graad kan worden geraakt. Met andere woorden de vier buigpunten vertegenwoordigen

altijd een achttal »geassocieerde" punten, die de basispunten vormen van een net van oppervlakken van den tweeden graad.

Deeling door den factor 2 splitst de vergelijking in vier andere, waarvan slechts eene tegelijk kan worden bevredigd. Zoo geraken wij tot de onderscheiding der vier gevallen:

I) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega$, of $u_2 + u_3 = u_1 + u_4$,
II) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega + \omega'$, of $u_3 + u_1 = u_2 + u_4$,
III) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega'$, of $u_1 + u_2 = u_3 + u_4$,
IV) $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

In elk der gevallen is door de keuze van drie der buigpunten het vierde bepaald. In het laatste heerscht er volmaakte symmetrie, die in de drie eerste ontbreekt. De meetkundige beteekenis van de betrekkingen tusschen de argumenten is namelijk, dat in het geval I de lijnen $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$, in het geval II de lijnen $B_3 B_1$ en $B_2 B_4$, in het geval III de lijnen $B_1 B_2$ en $B_3 B_4$ beschrijvende lijnen zijn van dezelfde groep op een regelvlak van den tweeden graad, dat R^4 bevat. *)

In het symmetrische geval IV echter liggen de vier buigpunten in een vlak. Die onderstelling komt bij het verdere onderzoek der vier raaklijnen t het eerst in aanmerking.

4. *De invariante voorwaarde in het geval IV.*

Hier kunnen wij stellen

$$v_1 = u_2 - u_3, \quad v_2 = u_3 - u_1, \quad v_3 = u_1 - u_2,$$

waarbij

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

en vinden dan

$$2\,v_1 = \omega, \quad 2\,v_2 = \omega + \omega', \quad 2\,v_3 = \omega',$$

$$u_1 - u_4 = v_1 + \omega + \omega', \quad u_2 - u_4 = v_2 + \omega', \quad u_3 - u_4 = v_3 + \omega.$$

De vergelijkingen (C) kunnen geschreven worden in de gedaante

---

*) HALPHEN, II, blz. 451.

$$\frac{\alpha^2}{ap'v_1p'(v_1+\omega+\omega')}=\frac{\beta^2}{bp'v_2p'(v_2+\omega')}=\frac{\gamma^2}{cp'v_3p'(v_3+\omega)} \quad \text{. . (D)}$$

De argumenten v_1, v_2, v_3, hoewel door de betrekking

$$v_1+v_2+v_3=0$$

verbonden, kunnen toch elk vier verschillende waarden verkrijgen. Zonder nu al die verschillende substituties te verrichten, toonen wij aan, dat de producten $p'v_1 p'(v_1+w+w')$, enz. altijd eene zelfde waarde aannemen. Dat bewijs is voor alle drie bijna gelijkluidend, het is dus voldoende, alleen het eerste product te behandelen.

Uit

$$p(v_1+\omega+\omega')=e_2-\frac{\alpha^2\gamma^2}{pv_1-e_2}, \text{ *)}$$

volgt

$$p'v_1 p'(v_1+\omega+\omega')=\alpha^2\gamma^2\frac{p'^2 v_1}{(pv_1-e_2)^2},$$

waarvoor ingevolge de sommatie-formule der argumenten †) geschreven kan worden

$$\begin{aligned} p'v_1p'(v_1+\omega+\omega')&=4\alpha^2\gamma^2\{p(v_1+\omega+\omega')+pv_1+e_2\}=\\ &=2\alpha^2\gamma^2\{pv_1+p(-v_1)+p(v_1+\omega+\omega')+\\ &\quad+p(-v+\omega+\omega')+2e_2\}. \end{aligned}$$

Nemen wij in aanmerking, dat $2v_1=\omega$, dan blijkt, dat binnen de accoladen gevonden wordt de som van de vier wortels der bikwadratische vergelijking, die uit de betrekking $p\,2v_1=e_1$ wordt afgeleid. Daar men in het algemeen heeft §)

$$p\,2u=\frac{p^4u+\frac{1}{2}g_2p^2u+2g_3pu+\frac{1}{16}g_2^2}{4p^3u-g_2pu-g_3},$$

---

*) HALPHEN, I, blz. 37, formule (8b).

†) Ibid., blz. 29, formule (24).

§) Ibid., blz. 95, formule (6).

is $p v_1$ bepaald door de vergelijking

$$p^4 v_1 - 4 e_1 p^3 v_1 + \ldots . = 0,$$

en deze doet zien, dat

$$p v_1 + p(-v_1) + p(v_1 + \omega + \omega') + p(-v_1 + \omega + \omega') = 4 e_1.$$

Derhalve verkrijgt het beschouwde product $p' v_1 p'(v_1 + w + w')$ altijd de waarde

$$2 \alpha^2 \gamma^2 (4 e_1 + 2 e_2) = -4 \alpha^2 \gamma^2 (e_3 - e_1) = -4 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2,$$

onverschillig welke der vier waarden van v_1 men in dat product substitueert.

Deze redeneering is voor de beide andere producten, die in de vergelijking (D) voorkomen, te herhalen. Men zal steeds $-4 \alpha^2 \beta^2 \gamma^2$ als eindwaarde vinden, zoodat wij ten laatste geraken tot de zeer eenvoudige betrekking

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{\beta^2}{b} = \frac{\gamma^2}{c}.$$

Omdat echter

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

heeft men ook

$$s_1 = a + b + c = 0,$$

en daarmede is eindelijk het verband tusschen de vier buigraaklijnen t opgespoord.

Die uitkomst geeft aanleiding tot de volgende opmerkingen. In de eerste plaats kan er op worden gewezen, dat wanneer men alleen de afleiding der vergelijking $s_1 = 0$ beoogt, het doel ook bereikt kan worden door de kromme R^4 te beschouwen als de doorsnede der oppervlakken

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + d x_4^2 = 0.$$

In dat geval toch zijn de coördinaten der buigpunten, en dientengevolge ook die der buigraaklijnen onmiddellijk bekend.

En in de tweede plaats heeft men er aan te denken, dat ook een viertal gewone raaklijnen van R^4 de voorwaarde

$s_1 = 0$ bevredigen kan. Zijn zelfs van een viertal raaklijnen, die aan $s_1 = 0$ voldoen, twee buigraaklijnen, dan mag nog niet worden besloten, dat de twee andere ook buigraaklijnen zijn. Want indien men met behulp der vergelijkingen (B) den invariant s_1 uitdrukt in de argumenten en dezen dan gelijk nul stelt, vindt men, wanneer

$$u_4 = 0, \qquad u_3 = \frac{\omega'}{2}, \qquad u_2 = -u_1 - \frac{\omega'}{2}$$

wordt genomen, niet noodzakelijk $2u_1 = \omega$ of $2u_1 = \omega + \omega'$.

5. *Meetkundige beteekenis der vergelijking* $s_1 = 0$. Het is niet bezwaarlijk de betrekking $s_1 = 0$ meetkundig te verklaren. Beschouwen wij de drie lijnen t_1, t_2, t_3 als gegeven, dan vormen alle lijnen t_4, welke voldoen aan $s_1 = 0$ een lineair complex, dat gemakkelijk wordt geconstrueerd. Wij behoeven slechts na te gaan, op welke wijze de lijn t_4 de regelschaar (t_1 t_2 s_3) moet snijden.

Daartoe is het dienstig de coördinaten van eene veranderlijke lijn t dezer regelschaar als kwadratische functies van een parameter μ te beschouwen.

Blijkbaar mag voor de veranderlijke lijn worden aangenomen

$$p = R_1 (23) p_1 + R_2 (31) p_2 + R_3 (12) p_3 \,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u = R_1 (23) u_1 + R_2 (31) u_2 + R_3 (12) u_3 \,,$$

mits de veranderlijke coëfficienten R_1, R_2, R_3 voldoen aan de uit

$$ps + qt + ru = 0$$

volgende betrekking

$$R_2 R_3 + R_3 R_1 + R_1 R_2 = 0.$$

Beteekent ε een imaginairen derdemachtswortel der eenheid, dan mogen wij aannemen, wanneer μ een veranderlijken parameter voorstelt,

$$R_1 = (\mu-\varepsilon)(\mu-\varepsilon^2), \quad R_2 = \varepsilon^2(\mu-\varepsilon^2)(\mu-1), \quad R_3 = \varepsilon(\mu-1)(\mu-\varepsilon).$$

Op deze wijze behoort bij iedere lijn t ééne waarde van μ, aan t_1, t_2, t_3 zijn de waarden 1, ε, ε^2 toegevoegd. De

lijn t_4 snijdt twee lijnen t, waarvoor de parameterwaarden bepaald zijn door de vergelijking

$$(tt_4) = 0 = aR_1 + bR_2 + cR_3,$$

of

$$0 = \mu^2 (a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c) + \mu s_1 + (a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c) \ldots . (E)$$

De drie lijnen t_1, t_2, t_3 bepalen een binairen kubischen vorm, wiens covariant van HESSE door twee andere lijnen der regelschaar Δ', Δ'' wordt voorgesteld, aan welke lijnen hier blijkbaar de parameterwaarden 0 en ∞ toekomen.

Houdt men dit in het oog, dan is het duidelijk, hoe de lijnen t_4, die voldoen aan $s_1 = 0$, de regelschaar ontmoeten op beschrijvende lijnen, welke harmonisch gescheiden zijn door Δ' en Δ''. Die invariante eigenschap is voldoende om het complex $s_1 = 0$ te construeeren, wanneer men van de lijnen Δ', Δ'' gebruik wil maken. Deze laatste evenwel zijn onbestaanbaar, wanneer t_1, t_2, t_3 bestaanbaar zijn, daarom verdient eene andere constructie, elders medegedeeld *), de voorkeur.

Om het nulpunt van een gegeven vlak V te vinden, zoeken wij de snijpunten A, B, C met t_1, t_2, t_3 en de doorsnede K^2 met de regelschaar. Wij verbinden elk hoekpunt van driehoek $A\,B\,C$ met het snijpunt der raaklijnen in de beide andere hoekpunten aan K^2 getrokken. Het onderlinge snijpunt dezer drie verbindingslijnen is het nulpunt van V. Om het nulvlak van een gegeven punt te vinden, wordt die constructie dualistisch omgezet.

6. *Absolute invarianten van vier elkaar kruisende lijnen.*

Vier elkaar kruisende lijnen $t_1, \ldots t_4$ bezitten in het algemeen twee gemeenschappelijke snijlijnen f' en f''. De vier snijpunten op zulk eene snijlijn bepalen een binairen bikwadratischen vorm, die een absoluten invariant A heeft. Voor het geval, dat $t_1, \ldots t_4$ buigraaklijnen zijn van R^4, bestaat er een merkwaardig verband tusschen de invarianten A' en A'' en den absoluten invariant **A** der kromme.

Om dit aan te toonen is het noodzakelijk uit de coördinaten van de vier lijnen de grootheden A' en A'' te berekenen.

---

*) *Wiskundige Opgaven*, Deel V, vraagstuk XI.

De lijn t_4 snijdt de regelschaar (t_1 t_2 t_3) in twee beschrijvende lijnen t, wier parameters μ' en μ'' volgen uit de vergelijking (E) van het vorige artikel. De invarianten A' en A'' behooren derhalve bij twee bikwadratische vormen met de nulpunten 1, ε, ε^2, μ' en 1, ε, ε^2, μ''.

Wij berekenen dus voor den vorm

$$x^4 - \mu x^3 - x + \mu$$

de invarianten van SALMON en vinden

$$S = \frac{3}{4}\mu, \qquad T = -\frac{1}{16}(1 + \mu^3).$$

Als absoluten invariant A beschouwen wij het getal, dat nul wordt bij equianharmonische, oneindig wordt bij harmonische ligging der nulpunten, terwijl het de waarde + 1 verkrijgt, wanneer twee nulpunten samenvallen.

Wij hebben alzoo

$$A = \frac{S^3}{27\,T^2} = \frac{4\,\mu^3}{(1+\mu^3)^2};$$

stellen wij

$$M = \sqrt{1-A},$$

dan komt er

$$\mu^2(1+M) - (1-M) = 0.$$

Uit deze vergelijking en uit de vergelijking (E) elimineeren wij μ, in de resultante vervangen wij M^2 weder door $(1-A)$, nemen

$$bc + ca + ab = s_2, \qquad a\,b\,c = s_3,$$

en verkrijgen

$$(1-A)^2(4s_1^3 - 18s_1s_2 + 27s_3)^2 -$$
$$-54(1-A)(27s_3^2 + 8s_2^3 - 18s_1s_2s_3 + 4s_1^3s_3 - 2s_1^2s_2^2) + 729s_3^2 = 0,$$

eene kwadratische vergelijking in A met de wortels A' en A''.

7. *Het verband tusschen de invarianten A', A'' en* **A**. Voor vier buigraaklijnen $t_1, .. t_4$ van R^4, die de voorwaarde

$s_1 = 0$ bevredigen, gaat de zooeven afgeleide vergelijking over in

$$(1-A)^2-2(1-A)\left(1+\frac{8\,s_2^3}{27\,s_3^2}\right)+1=0\,.\;.\;.\;.\;(F)$$

Wij kunnen nu de invarianten g_2 en g_3 der gebruikte elliptische functies uitdrukken in s_2 en s_3.

In art. 4 werd gevonden

$$\frac{\alpha^2}{a}=\frac{\beta^2}{b}=\frac{\gamma^2}{s},$$

of wat op hetzelfde neerkomt

$$\frac{e_2-e_3}{a}=\frac{e_3-e_1}{b}=\frac{e_1-e_2}{c}.$$

In verband met $s_1 = 0$ volgt hieruit

$$e_1=\varrho\,(b-c),$$
$$e_2=\varrho\,(c-a),$$
$$e_3=\varrho\,(a-b),$$

en verder *)

$$g_2^3-27\,g_3^2=16\,(e_2-e_3)^2\,(e_3-e_1)^2\,(e_1-e_2)^2=16.729\,\varrho^6\,s_3^2,$$
$$g_2=2\,(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=-12\,\varrho^2 s_2.$$

Als absoluten invariant **A** nemen wij nu het getal $\frac{g_2^3}{27 g_3^2}$; voor de equianharmonische kromme R^4 is het nul, voor de harmonische is het oneindig; het verkrijgt de waarde + 1, wanneer de kromme een werkelijk dubbelpunt bezit.

Uit de voorafgaande berekening blijkt, dat

$$\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1}=-\frac{4\,s_2^3}{27\,s_3^2},$$

en de vergelijking (F) gaat na eenige herleiding over in

---

*) Halphen, I, bls. 25.

$$A^2 - \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} A + \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} = 0,$$

zoodat

$$A' A'' = \frac{4\mathbf{A}}{\mathbf{A}-1} = A' + A'',$$

of

$$\mathbf{A} = \left(\frac{A'}{A'-2}\right)^2 = \left(\frac{A''}{A''-2}\right)^2.$$

Zooals bekend is *) zijn er 64 vlakken, die uit elk zijvlak van het poolviervlak van R^4 een buigpunt bevatten. Er zijn derhalve 64 viertallen van buigraaklijnen $t_1, .. t_4$. Uit bovenstaande vergelijking volgt nu, dat voor alle viertallen de absolute invarianten A' en A'' dezelfde waarden bezitten, zoodat twee viertallen door collineaire transformatie in elkaar kunnen overgaan.

8. *Bespreking der bijzondere gevallen.* De zoo eenvoudige betrekking tusschen de invarianten leert in de eerste plaats, dat alle krommen R^4, die vier gegeven buigraaklijnen bezitten, denzelfden invariant $\mathbf{A}$ hebben, ten tweede blijkt, dat de kennis van de ligging der vier snijpunten op eene der beide gemeenschappelijke transversalen f' en f'' reeds voldoende is om het karakter der kromme te bepalen.

In het bijzonder gaan wij de gevallen $\mathbf{A} = 0$ en $\mathbf{A} = \infty$ na, die zich bij de equianharmonische en de harmonische kromme voordoen.

De onderstelling $\mathbf{A} = 0$ vereischt tegelijk $A' = 0$ en $A'' = 0$, wat volgens (F) met zich brengt $s_2 = 0$.

Alleen de lijnen dus, die voldoen zoowel aan $s_1 = 0$ als aan $s_2 = 0$, kunnen buigraaklijnen $t_1, .. t_4$ zijn van eene equianharmonische kromme. Beschouwen wij weder de lijnen t_1, t_2, t_3 als gegeven, dan ligt t_4 in de complexen $s_1 = 0$, $s_2 = 0$. Het laatste is een kwadratisch complex van 12 constanten, hetwelk in de klassificatie van WEILER †) door het teeken [1(11)(111)] wordt voorgesteld.

---

*) SCHRÖTER, *Grundzüge einer rein-geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species*, blz. 90.

†) „Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades etc." *Zeitschrift für Math. u. Physik*, XXVII, blz. 264.

Uit de vergelijking (E) volgt, voor $s_2 = 0$,

$$\frac{\mu'}{\mu''} = \varepsilon\,;$$

de lijn t_4 snijdt derhalve de regelschaar $(t_1\, t_2\, t_3)$ in twee lijnen t' en t'', waarvoor geldt de betrekking

$$t_1\, t_2\, t_3\, t' \;\overline{\wedge}\; t_3\, t_1\, t_2\, t''.$$

Daardoor is het complex voldoende gekenmerkt; overigens heb ik eene constructie reeds elders vermeld. *)

Wij hebben hier echter te maken met de lijnen der congruentie $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, die ook voldoen aan $s_1^2 - 4\, s_2 = 0$. Daaruit blijkt genoegzaam, dat de lijn t_4 de regelschaar $(t_1\; t_2\; t_3)$ raakt, en dat het raakpunt steeds ligt op eene der lijnen Δ' of Δ''. Terloops brengen wij in herinnering, dat ook de voorwaarde

$$(s_1^2 - 4\, s_2)^2 - 128\, s_1\, s_3 = 0$$

bevredigd is, en wij besluiten: Bij de equianharmonische R^4 zijn de buigraaklijnen $t_1, .. t_4$ zoodanig gelegen, dat de hyperboloïde, door drie der lijnen bepaald, door de vierde wordt geraakt, en dat de vier lijnen gezamenlijk raaklijnen zijn van een oneindig aantal ruimtekrommen van den derden graad.

Wij vervolgen met het onderzoek der harmonische kromme.

Uit $\mathsf{A} = \infty$ leiden wij af $A' = 2$, $A'' = 2$. De beide transversalen f' en f'', die in het vorige geval samenvielen, blijven thans verschillend, hoewel de invarianten gelijk zijn.

In verband met (F) komt er

$$27\, s_3^2 + 4\, s_2^3 = 0,$$

of

$$(b - c)^2\, (c - a)^2\, (a - b)^2 = 0.$$

De lijn t_4 ligt in een der drie complexen

---

*) *Wiskundige Opgaven*, Deel V, vraagstuk X.

$$b-c=0, \qquad c-a=0, \qquad a-b=0.$$

De beteekenis van deze vergelijkingen kan men weder met behulp der vergelijking (E) opsporen. Nemen wij bijv. daarin $b=c$, dan komt er

$$\mu^2(a-b)+s_1\mu+(a-b)=0,$$

waaruit volgt

$$\mu'\mu''=1,$$

d. i. de lijn t_4 snijdt de regelschaar $(t_1\,t_2\,t_3)$ op twee lijnen t' en t'', die behooren tot de involutie $(t_1\,t_1\,;\,t_2\,t_3)$.

Het nulpunt van een gegeven vlak wordt verkregen door ten eerste de snijpunten A, B, C van t_1, t_2, t_3 met het vlak te zoeken, en in het punt A eene raaklijn te trekken aan de doorsnede van het vlak met de regelschaar $(t_1\,t_2\,t_3)$. Het snijpunt van die raaklijn met de lijn $B\,C$ is het gezochte nulpunt.

Op dergelijke wijze wordt het nulvlak van een gegeven punt gevonden, zoodat de constructie van de congruentie $s_1=0$, $b-c=0$ verder geen bezwaar oplevert.

Vermeld verdient te worden de eigenschap, die aan de drie complexen gemeen is. Is namelijk aan eene der drie vergelijkingen voldaan, dan kan men altijd tetraeders construeeren, die op ieder der vier lijnen t_1, t_2, t_3, t_4 een hoekpunt hebben, en die door elk dezer lijnen een zijvlak laten gaan. Daarbij is er op zulk een viervlak ééne ribbe, welke de lijnen t_2 en t_3, of wel t_3 en t_1, of eindelijk t_1 en t_2 kruist, al naargelang men heeft $b-c=0$, $c-a=0$, of $a-b=0$.

Het geval $\mathsf{A}=1$, waarbij R^4 een werkelijk dubbelpunt heeft, kan buiten verdere bespreking blijven. De vergelijkingen leveren in dit geval $A'=1$, $A''=\infty$. Twee der lijnen bijv. t_1 en t_2 zouden elkaar moeten snijden, en op eene der gemeenschappelijke transversalen zou men vier harmonische punten moeten aantreffen. Dat is op zichzelf duidelijk. Twee kegeltoppen Q_1 en Q_2 zijn in het dubbelpunt samengevallen, en de dubbelpuntsraaklijnen t_1 en t_2 scheiden harmonisch de beide andere kegeltoppen Q_3 en Q_4, in welke punten twee aan twee de vier nog aanwezige buigraaklijnen

samenkomen. Inderdaad zal men dus op de gemeenschappelijke transversaal $Q_3\,Q_4$ een viertal harmonische punten vinden.

9. *Raaklijnen van R^4, wier raakpunten in een vlak zijn gelegen.* Wij zouden er thans toe willen overgaan om de krommen R^4 te construeeren, die vier gegeven lijnen $t_1, \ldots t_4$ tot buigraaklijnen hebben, wanneer wij niet onmiddellijk op een eigenaardig bezwaar stuitten.

Het ligt namelijk voor de hand om op de eerste raaklijn t_1 het raakpunt B_1 willekeurig aan te nemen, maar dan ondervindt men spoedig, dat, zoo de vier raakpunten in een vlak moeten komen, de drie punten B_2, B_3, B_4 reeds geheel bepaald zijn. Bracht men door B_1 een willekeurig vlak, dat drie andere lijnen in B_2, B_3, B_4 ontmoette, dan zouden alle oppervlakken van den tweeden graad, die in $B_1, \ldots B_4$ de lijnen raken, geene ruimtekromme maar eene tweemaal te tellen kegelsnee $B_1\,B_2\,B_3\,B_4$ gemeen hebben.

Het is derhalve de vraag door B_1 het vlak zoo aan te brengen, dat de vier raakpunten eene groep van geassocieerde punten vormen. Wij willen daarbij van vier geassocieerde raakpunten spreken.

Om daartoe te geraken gaan wij weder uit van vier in een vlak gelegen punten B van R_4 en sporen op, hoe dit vlak met de vier raaklijnen samenhangt, en dat geschiedt hier het gemakkelijkst door de invariante betrekkingen te zoeken, die er noodzakelijk moeten bestaan tusschen de vier raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ en de zes verbindingslijnen der raakpunten $B_2\,B_3$, $B_3\,B_1, \ldots B_3\,B_4$, die wij in volgorde a, b, c, a_1, b_1, c_1 zullen noemen.

Gebruik makende van de parametervoorstelling, in art. 1 besproken, hebben wij voor eene dezer lijnen, bijv. a_1

$$(2\,a_1) = \begin{vmatrix} p''u_2 & p'u_2 & pu_2 & 1 \\ p'''u_2 & p''u_2 & p'u_2 & 0 \\ p''u_1 & p'u_1 & pu_1 & 1 \\ p''u_4 & p'u_4 & pu_4 & 1 \end{vmatrix},$$

wat na aanwending van formule (18), HALPHEN, I, blz. 220 geeft, wanneer wij in aanmerking nemen, dat $u_1+u_2+u_3+u_4=0$,

$$(2a_1) = +2!\,3!\,\frac{\sigma(u_2-u_3)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma^2(u_1-u_2)\,\sigma^2(u_2-u_4)}{\sigma^4 u_1\,\sigma^4 u_4\,\sigma^8 u_2}.$$

Evenzoo is

$$(3a_1) = +2!\,3!\,\frac{\sigma(u_3-u_2)\,\sigma(u_1-u_4)\,\sigma^2(u_3-u_1)\,\sigma^2(u_3-u_4)}{\sigma^4 u_1\,\sigma^4 u_4\,\sigma^8 u_3},$$

waaruit volgt

$$\left[\frac{(3a_1)}{(2a_1)}\right]^2 = \frac{\sigma^4(u_3-u_1)\,\sigma^4(u_3-u_4)\,\sigma^{16} u_2}{\sigma^4(u_1-u_2)\,\sigma^4(u_2-u_4)\,\sigma^{16} u_3}.$$

In art. 1 werd evenwel gevonden

$$(12) = -2!\,3!\,\frac{\sigma(2u_1+2u_2)\,\sigma^4(u_1-u_2)}{\sigma^8 u_1\,\sigma^8 u_2}, \text{ enz.,}$$

waaruit wij afleiden

$$\frac{(31)(23)(34)}{(12)(23)(24)} = \frac{(31)(34)}{(12)(24)} = \frac{\sigma^4(u_3-u_1)\,\sigma^4(u_3-u_4)\,\sigma^{16}u_2}{\sigma^4(u_1-u_2)\,\sigma^4(u_2-u_4)\,\sigma^{16}u_3} = \left[\frac{(3a_1)}{(2a_1)}\right]^2.$$

Stellen wij eindelijk

$$P_1 = \sqrt{(12)(31)(14)}, \qquad P_2 = \sqrt{(12)(23)(24)},$$
$$P_3 = \sqrt{(31)(23)(34)}, \qquad P_4 = \sqrt{(14)(24)(34)},$$

dan komen wij aangaande de lijnen $a, b, \ldots c_1$ tot de gevolgtrekking, dat zij de onderstaande vergelijkingen bevredigen,

$$K_{\pm a} \equiv (1a) \pm \frac{P_1}{P_4}(4a) = 0, \qquad K_{\pm b} \equiv (2b) \pm \frac{P_2}{P_4}(4b) = 0,$$

$$K_{\pm c} \equiv (3c) \pm \frac{P_3}{P_4}(4c) = 0,$$

$$K_{\pm a_1} \equiv (2a_1) \pm \frac{P_2}{P_3}(3a_1) = 0, \quad K_{\pm b_1} \equiv (3b_1) \pm \frac{P_3}{P_1}(1b_1) = 0,$$

$$K_{\pm c_1} \equiv (1c_1) \pm \frac{P_1}{P_2}(2c_1) = 0.$$

Tegelijk volgt nog uit onze formules, dat voor drie in één punt B samenkomende lijnen, bijv. a_1, b_1, c_1, geldt

$$\frac{(2a_1)}{(3a_1)} \times \frac{(3b_1)}{(1b_1)} \times \frac{(1c_1)}{(2c_1)} = -1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (G)$$

En daarmede zijn de zes lijnen $a, b, \ldots c_1$ bepaald, elk van hen snijdt toch steeds twee der raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ en ligt verder in een van de bovenstaande complexen K, waarvan ik elders *) eenige eigenschappen onderzocht.

10. *De hyperboloïden* $H_{\pm a}$, $H_{\pm b}, \ldots H_{\pm c_1}$. Zoolang wij het raakpunt B_1 nog onbepaald laten, kan ieder der zes lijnen twee hyperboloïden beschrijven; de lijn a bijv. rust op t_2 en t_3 en moet liggen in een der beide complexen $K_{\pm a} = 0$. Wij noemen de beide hyperboloïden, die de lijn a kan doorloopen $H_{\pm a}$. Zoo worden zes paar van die oppervlakken gevonden, waartusschen merkwaardige betrekkingen bestaan. In de eerste plaats is het duidelijk, dat de gemeenschappelijke transversalen f' en f'' der vier raaklijnen $t_1, \ldots t_4$ beschrijvende lijnen zijn van alle twaalf hyperboloïden H. Dat brengt mede, dat ieder tweetal dier oppervlakken ook een paar gemeenschappelijke richtlijnen heeft, die dan noodzakelijk weder op f' en f'' rusten.

Wij zullen nu aantoonen, dat men op vier verschillende wijzen, uit elk der zes paar H's een oppervlak kiezende, een zestal regelvlakken kan verkrijgen met eene gemeenschappelijke richtlijn y.

Daartoe onderzoeken wij eerst de hyperboloïden H_{-a} en H_{-b}, die reeds de richtlijn t_3 gemeen hebben.

Voor de coördinaten van de lijn y mogen wij blijkbaar stellen

$$p_y = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_y = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4,$$

waarbij de nog onbekende coëfficienten $A_1, \ldots A_4$ moeten voldoen aan de voorwaarde

*) „Over stralenstelsels, die uit vier elkaar kruisende lijnen kunnen worden afgeleid," *Verslagen en Mededeelingen*, 3de Reeks, Deel VIII,

$$A_2 A_3 (23) + A_3 A_1 (31) + \ldots . (A_3 A_4) (34) = 0.$$

Uit

$$(2a) = 0, \quad (3a) = 0, \quad \frac{(1a)}{P_1} = \frac{(4a)}{P_4},$$
$$(3b) = 0, \quad (1b) = 0, \quad \frac{(2b)}{P_2} = \frac{(4b)}{P_4},$$

verkrijgen wij

$$(ya) = 0 = A_1 P_1 + A_4 P_4,$$
$$(yb) = 0 = A_2 P_2 + A_4 P_4.$$

Dientengevolge nemen wij

$$A_1 = \frac{1}{P_1}, \quad A_2 = \frac{1}{P_2}, \quad A_4 = -\frac{1}{P_4},$$

terwijl wij ter bepaling van A_3 de vergelijking vinden

$$A_3\left[\frac{(31)}{P_1} + \frac{(23)}{P_2} - \frac{(34)}{P}\right] + \left[-\frac{(24)}{P_2 P_4} - \frac{(14)}{P_1 P_4} + \frac{(12)}{P_1 P_2}\right] = 0.$$

Omdat nu

$$\frac{(24)}{P_2 P_4} = \frac{(31)}{P_3 P_1}, \quad \frac{(14)}{P_1 P_4} = \frac{(23)}{P_2 P_3}, \quad \frac{(12)}{P_1 P_2} = \frac{(34)}{P_3 P_4},$$

vinden wij

$$A_3 = \frac{1}{P_3},$$

en de gemeenschappelijke richtlijn y is voorgesteld door zes vergelijkingen van den vorm

$$p_y = \frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} - \frac{p_4}{P_4}.$$

Maar nu overtuigt men zich spoedig, dat de lijn y ook

richtlijn is van H_{-c}, H_{+a_1}, H_{+b_1}, H_{+c_1}, en op deze wijze kan men door verwisseling van letters vier lijnen y_1, y_2, y_3, y_4 vinden, wier ligging met behulp van onderstaande tabel is duidelijk gemaakt. Daarbij maken wij tusschen de vier lijnen y de volgende onderscheiding:

$$\left.\begin{aligned} p_{y_1} &= -\frac{p_1}{P_1}+\frac{p_2}{P_2}+\frac{p_3}{P_3}+\frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_2} &= +\frac{p_1}{P_1}-\frac{p_2}{F_2}+\frac{p_3}{P_3}+\frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_3} &= +\frac{p_1}{P_1}+\frac{p_2}{P_2}-\frac{p_3}{P_3}+\frac{p_4}{P_4}, \\ p_{y_4} &= +\frac{p_1}{P_1}+\frac{p_2}{P_2}+\frac{p_3}{P_3}-\frac{p_4}{P_4}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (H)$$

de lijn:	is gemeenschappelijke richtlijn van:					
y_1	H_{-a}	H_{+b}	H_{+c}	H_{+a_1}	H_{-b_1}	H_{-c_1}
y_2	H_{+a}	H_{-b}	H_{+c}	H_{-a_1}	H_{+b_1}	H_{-c_1}
y_3	H_{+a}	H_{+b}	H_{-c}	H_{-a_1}	H_{-b_1}	H_{+c_1}
y_4	H_{-a}	H_{-b}	H_{-c}	H_{+a_1}	H_{+b_1}	H_{+c_1}

Brengen wij nu door eene dezer lijnen, bijv. y_4, een willekeurig vlak, dat de lijnen t_1. t_2, t_3, t_4 in de punten B_1, B_2, B_3, B_4 ontmoet, dan zullen de zes verbindingslijnen $B_2 B_3, \ldots B_3 B_4$ of wel a, b, c, a_1, b_1, c_1 in volgorde gelegen zijn in de complexen

$$K_{-a}\,,\quad K_{-b}\,,\quad K_{-c}\,,\quad K_{+a_1}\,,\quad K_{+b_1}\,,\quad K_{+c_1}\,,$$

en de voorwaarden (G)

$$\frac{(2a_1)}{(3a_1)}\times\frac{(3b_1)}{(1b_1)}\times\frac{(1c_1)}{(2c_1)}=-1$$

zullen bevredigd zijn. Zulk een vlak bepaalt op t_1, t_2, t_3, t_4

vier punten, waar deze lijnen door een enkelvoudig oneindig aantal krommen R^4 kunnen worden geraakt.

Anders uitgedrukt, hebben wij de stelling bewezen: De omhullende der vlakken, die vier willekeurig gegeven lijnen in eene groep van vier geassocieerde raakpunten treffen, wordt door een tweede viertal rechte lijnen gevormd.

11. *Eigenschappen der lijnen y.* In het voorafgaande hebben wij thans reeds voldoende hulpmiddelen verkregen om de constructie van R^4 uit vier harer buigraaklijnen te ondernemen. Voor wij evenwel daarmede aanvangen, is het wenschelijk nog een paar belangrijke eigenschappen der lijnen y te vermelden, waarmede wij gedeeltelijk rekening hebben te houden.

Berekenen wij de onderlinge invarianten $(y_2\, y_3), \dots (y_3\, y_4)$ dezer lijnen met behulp van de vergelijkingen (H), dan is de uitkomst

$$(y_2\, y_3) = \frac{4\,(23)}{P_2\, P_3},\ (y_3\, y_1) = \frac{4\,(31)}{P_3\, P_1},\ \dots (y_3\, y_4) = \frac{4\,(34)}{P_3\, P_4}.$$

Stellen wij

$$a' = (y_2\, y_3)\,(y_1\, y_4),$$
$$b' = (y_3\, y_1)\,(y_2\, y_4),$$
$$c' = (y_1\, y_2)\,(y_3\, y_4),$$

dan vinden wij voor deze grootheden

$$a' = \frac{16\,(23)\,(14)}{P_2\, P_3\, P_1\, P_4} = \frac{16\,a}{s_3},\qquad b' = \frac{16\,(31)\,(24)}{P_3\, P_1\, P_2\, P_4} = \frac{16\,b}{s_3},$$
$$c' = \frac{16\,(12)\,(34)}{P_1\, P_2\, P_3\, P_4} = \frac{16\,c}{s_3}.$$

Derhalve alle invariante betrekkingen, waardoor de lijnen $t_1, \dots t_4$ onderling zijn verbonden, bestaan tegelijk tusschen de lijnen $y_1 \dots y_4$. Evengoed als wij uit de lijnen t de lijnen y hebben afgeleid, kunnen wij uit de lijnen y vier lijnen z afleiden.

Daarvoor is de berekening van de vier grootheden

$$P_1' = \sqrt{(y_1\, y_2)\,(y_3\, y_1)\,(y_1\, y_4)}, \dots P_4' = \sqrt{(y_1\, y_4)\,(y_2\, y_4)\,(y_3\, y_4)}$$

die evenals $P_1, \ldots P_4$ van $t_1, \ldots t_4$ nu van $y_1, \ldots y_4$ afhangen, benoodigd.

Wij vinden gemakkelijk

$$P_1' = P_2' = P_3' = P_4' = \frac{64}{s_3}.$$

De lijn z_1 is ingevolge (H) bepaald door de vergelijking

$$p_{z_1} = -\frac{p_{y_1}}{P_1'} + \frac{p_{y_2}}{P_2'} + \frac{p_{y_3}}{P_3'} + \frac{p_{y_4}}{P_4'}.$$

Substitueeren wij daarin de waarden van $p_{y_1}, \ldots p_{y_4}$, dan komt er

$$p_{z_1} = \frac{s_3}{16} p_1.$$

Dat wil zeggen, het verband tusschen de viertallen $t_1, \ldots t_4$ en $y_1, \ldots y_4$ is involutorisch. Wijst ieder vlak door eene lijn y op de vier lijnen t vier geassocieerde raakpunten aan, ieder vlak door eene lijn t doet hetzelfde op de vier lijnen y.

Er is nog eene tweede eigenschap, die op de lijnen y betrekking heeft. In mijn opstel »Over stralenstelsels enz.", toonde ik op blz. 57 aan, dat, wanneer een vlak wentelt om eene op de beide transversalen f' en f'' rustende lijn l, de diagonaalpunten van den vierhoek $B_1 \, B_2 \, B_3 \, B_4$, door de vier lijnen $t_1, \ldots t_4$ op het vlak aangewezen, rechte lijnen x beschrijven, die eveneens op f' en f'' rusten.

Had de lijn l de coördinaten, aangewezen door

$$p_l = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + A_4 p_4,$$

dan beschreef het snijpunt der lijnen $B_2 \, B_3$ en $B_1 \, B_4$ eene lijn x, wier coördinaten berekend werden met behulp van de vergelijking

$$p_x = A_1 A_2 A_3 (23) p_1 + A_1 A_2 A_4 (14) p_2 + A_1 A_3 A_4 (14) p_3 + \\ + A_2 A_3 A_4 (23) p_4.$$

Door deze vergelijkingen was eene involutorische overeenkomst tusschen l en x tot stand gebracht.

Wij nemen nu voor l de lijn y_1 en stellen derhalve

$$A_1 = -\frac{1}{P_1}, \quad A_2 = \frac{1}{P_2}, \quad A_3 = \frac{1}{P_3}, \quad A_4 = \frac{1}{P_4}.$$

Voor de lijn x verkrijgen wij daardoor

$$p_x = -\frac{(23)}{P_1 P_2 P_3} p_1 - \frac{(14)}{P_1 P_2 P_4} p_2 - \frac{(14)}{P_1 P_4 P_3} p_3 + \frac{(23)}{P_2 P_3 P_4} p_4,$$

of daar

$$\frac{(23)}{P_2 P_3} = \frac{(14)}{P_1 P_4},$$

$$p_x = -\frac{(14)}{P_1 P_4}\left(\frac{p_1}{P_1} + \frac{p_2}{P_2} + \frac{p_3}{P_3} - \frac{p_4}{P_4}\right) = -\frac{(14)}{P_1 P_4} p_{y_4}.$$

De lijn x aan y_1 toegevoegd is geene andere dan de lijn y_4.

Op deze wijze komen wij tot het besluit, dat de snijpunten van $B_2\,B_3$ en $B_1\,B_4$, van $B_3\,B_1$ en $B_2\,B_4$, van $B_1\,B_2$ en $B_3\,B_4$ in volgorde liggen op y_4, y_3, y_2, op y_3, y_4, y_1, op y_2, y_1, y_4, op y_1, y_2, y_3 al naargelang het vlak, dat op $t_1, \ldots t_4$ de vier punten B aanwijst, door y_1, y_2, y_3 of y_4 gaat. Ten laatste kan men gemakkelijk aantoonen, dat de hyperboloïden $(y_2\,y_3\,y_4)$, $(y_3\,y_1\,y_4)$, $(y_1\,y_2\,y_4)$, $(y_3\,y_2\,y_1)$ identiek zijn met de oppervlakken, die in de reeds aangehaalde verhandeling door H_1, H_2, H_3, H_4 werden aangeduid.

12, *Constructie van krommen R^4, die vier gegeven lijnen in vier in een vlak gelegen punten raken.* Op eene der vier gegeven lijnen $t_1, \ldots t_4$, bijv. t_1, nemen wij het raakpunt B_1 willekeurig aan. Wij hebben dan op t_2 het raakpunt B_2 zoo te bepalen, dat de lijn $B_1\,B_2$ of c gelegen is in een der beide complexen

$$K_{\pm c} \equiv (3\,c) \pm \frac{P_3}{P_4}(4\,c) = 0,$$

welke vergelijking wij ook kunnen schrijven in den vorm

$$\left\{(3\,c) - \frac{(31)}{(14)}(4\,c)\right\} \pm \sqrt{\frac{(31)(24)}{(23)(14)}}\left\{(3\,c) - \frac{(23)}{(24)}(4\,c)\right\} = 0.$$

Die vergelijkingen leeren ons, dat in den complexbundel, bepaald door de beide oneigenlijke complexen

$$(3c) = 0, \quad (4c) = 0,$$

de complexen $K_{\pm c} = 0$ harmonisch zijn toegevoegd, zoowel ten opzichte der genoemde ontaardingen, als ten opzichte der beide complexen uit den bundel

$$(3c) - \frac{(31)}{(14)}(4c) = 0,$$

$$(3c) - \frac{(23)}{(24)}(4c) = 0,$$

die men in volgorde door de lijnen t_1 en t_2 kan brengen.

Uit die overleggingen zullen wij de constructie der lijn $B_1 B_2$ afleiden. Aan het punt B_1 is in ieder complex een nulvlak toegevoegd, welke zes nulvlakken een vlakkenbundel vormen. De nulvlakken behoorende bij de complexen $K_{\pm c} = 0$, zijn daarbij harmonisch ten opzichte van de beide andere paren toegevoegd. Wij leggen een vlak V door B_1 en t_2 en bepalen achtereenvolgens de punten, waar de zes nulvlakken die lijn ontmoeten. Stel, dat het vlak V de lijnen t_3 en t_4 in C en D snijdt, en dat de lijnen $B_1 C$, $B_1 D$ en $C D$ de lijn t_2 in volgorde in E, F en G treffen, dan is het in te zien, dat door deze punten de nulvlakken gaan, behoorende bij de complexen

$$(3c) = 0, \quad (4c) = 0, \quad (3c) - \frac{(23)}{(24)}(4c) = 0.$$

Wij verkrijgen verder het nulvlak, behoorende bij het complex

$$(3c) - \frac{(31)}{(14)}(4c) = 0,$$

door eerst uit B_1 eene lijn te trekken, die t_3 en t_4 snijdt en vervolgens die lijn met t_1 door een vlak te verbinden, welk vlak de lijn t_2 in H moge snijden.

Wanneer wij nu eindelijk de dubbelpunten B_2 en B_2' van

de involatie $(EF;\ GH)$ zoeken, zal eene der lijnen $B_1 B_2$ en $B_1 B_2'$, bijv. de eerste, liggen in het complex $K_{+c} = 0$, de tweede in $K_{-c} = 0$.

Op dezelfde wijze zoeken wij op de lijn t_3 de punten B_3 en B_3' zoodanig, dat $B_1 B_3$ een straal is van $K_{+b} = 0$, $B_1 B_3'$ een straal is van $K_{-b} = 0$.

Vervolgens brengen wij de vier vlakken $B_1 B_2 B_3$, $B_1 B_2 B_3'$, $B_1 B_2' B_3$ en $B_1 B_2' B_3'$ aan. Uit de tabel van art. 10 blijkt, dat het eerste en het laatste vlak op t_4 een punt B_4 bepalen, welks verbindingslijn met B_1 in het complex $K_{+a_1} = 0$ is gelegen, terwijl de beide andere vlakken de lijn t_4 in het punt B_4' treffen, waarbij de lijn $B_1 B_4'$ straal is van het complex $K_{-a_1} = 0$.

Zoo hebben wij nu vier vierhoeken gevonden, in wier hoekpunten de lijnen $t_1, .. t_4$ door krommen R^4 kunnen worden geraakt. En die vierhoeken zijn op eigenaardige wijze verbonden.

Vooreerst heeft ieder tweetal eene zijde gemeen. Kiest men echter er een, bijv. den eersten $B_1 B_2 B_3 B_4$, dan vindt men in zijn vlak van elk der drie andere een diagonaalpunt, welke drie diagonaalpunten op eene rechte lijn liggen. Dat is volgens art. 11 de lijn y_1. Evenzoo treft men in de drie andere vlakken in volgorde de lijnen y_2, y_3 en y_4 aan. Ieder vlak, dat eene dezer lijnen bevat, snijdt, zooals wij zagen, de lijnen $t_1, .. t_4$ in eene groep van vier geassocieerde raakpunten $B_1, .. B_4$, en het heeft dan verder geen bezwaar om door een willekeurig aangenomen punt eene kromme R^4 te laten gaan, welke $t_1, .. t_4$ in $B_1, .. B_4$ aanraakt. De gebruikelijke constructie is daartoe voldoende *).

Eene enkele opmerking aangaande de zooeven gevonden figuur moge hier nog plaats vinden. Wij onderstelden, dat de lijn $B_1 B_2$ gelegen was in het complex K_{+c} 0, het is duidelijk, dat uit B_2 ook een lijn $B_2 B_1'$ naar t_1 getrokken kan worden, behoorende tot het complex $K_{-c} = 0$. Brengen wij nu een vlak aan door $B_1' B_2 B_3$, dan moet dit weer de lijn t_4 ontmoeten in een punt, dat met B_1', B_2,

*) Reye, *Geometrie der Lage*, II, blz. 152.

B_3 een viertal geassocieerde raakpunten vormt. Blijkbaar kan dit het punt B_4 niet zijn, noodzakelijk gaat het vlak derhalve door B_4', en bevat het eene der lijnen y.

Beschouwden wij zooeven vier vierhoeken $B_1\,B_2\,B_3\,B_4$, eigenlijk levert de figuur er ons acht, en wel zullen wij vinden

$$\text{door } y_1 \begin{cases} B_1\,B_2\,B_3\,B_4 \\ B_1'\,B_2'\,B_3'\,B_4' \end{cases}, \quad \text{door } y_2 \begin{cases} B_1\,B_2\,B_3'\,B_4' \\ B_1'\,B_2'\,B_3\,B_4 \end{cases},$$

$$\text{door } y_3 \begin{cases} B_1\,B_2'\,B_3\,B_4' \\ B_1'\,B_2\,B_3'\,B_4 \end{cases}, \quad \text{door } y_4 \begin{cases} B_1\,B_2'\,B_3'\,B_4 \\ B_1'\,B_2\,B_3\,B_4' \end{cases}.$$

Deze vierhoeken bezitten 24 diagonaalpunten, waarvan elke lijn y er 6 draagt. Het onderzoek dezer punten leert, dat die 24 punten te splitsen zijn in 3 groepen van 8. De 8 punten van zulk eene groep komen twee aan twee op de lijnen y voor Zij hebben voor de lijnen y dezelfde beteekenis als de 8 punten B voor de lijnen t. Zoo kan men er weer 8 vierhoeken mede vormen, die een hoekpunt hebben op elke lijn y, terwijl de vlakken dezer vierhoeken weder twee aan twee door de lijnen t gaan.

En eindelijk zouden wij nog er aan kunnen herinneren, dat door de 8 punten B, en dan ook door de 8 punten van iedere dergelijke groep, hetzij zij op de lijnen y of t voorkomen, oneindig veel ruimtekrommen R^4 gebracht kunnen worden, omdat door de 8 punten B vier in vlakkenparen ontaarde oppervlakken van den tweeden graad gaan.

Buitendien zal men zich kunnen overtuigen, dat de projecties der punten B uit een willekeurig punt op een willekeurig vlak een stelsel van vier paar geconjugeerde punten van eene vlakke kromme van den derden graad oplevert, zoodanig, dat uit een willekeurig punt dezer kromme de projecties van B_1 en B_1', B_2 en B_2', B_3 en B_3', B_4 en B_4' door een involutorischen stralenbundel worden geprojecteerd.

13. *Constructie van krommen R^4, welke $t_1, .. t_4$ tot buigraaklijnen hebben.* Wij zijn thans in staat, wanneer de lijnen $t_1, .. t_4$ aan de voorwaarde $s_1 = 0$ voldoen, de krommen

R^4 te construeeren, waarvoor de gegeven lijnen buigraaklijnen zijn, wier raakpunten in één vlak komen.

Volgens de constructie van art. 12 nemen wij B_1 op t_1 willekeurig aan en zoeken B_2, B_3, B_4 ; het vlak dezer vier punten bevat dan de lijn y_1. De vier raakpunten $B_1, .. B_4$ zijn geassocieerde raakpunten van een net Σ, de vraag is naar de bijbehoorende kegeltoppenkromme of kernkromme. Is deze in het algemeen van den zesden graad, voor het bijzondere net Σ is zij ontaard.

Er is overgebleven eene kromme R^3 van den derden graad, welke $t_1, .. t_4$ tot koorden heeft, en die, zooals men gemakkelijk bewijst, door de drie diagonaalpunten van den vierhoek $B_1 B_2 B_3 B_4$ gaat. Wij kunnen op drie verschillende wijzen die kernkromme construeeren. Beschouwen wij den vierhoek $B_1 B_2 B_3 B_4$ en zijne drie diagonaalpunten $(B_1 B_4, B_2 B_3)$, $(B_2 B_4, B_3 B_1)$, $(B_3 B_4, B_1 B_2)$, in volgorde L, M, N geheeten, dan kunnen wij in de eerste plaats opmerken, dat volgens art. 11 deze punten gelegen zijn op de lijnen y_4, y_3, y_2 ; de lijnen MN, NL, LM, welke wij z_4, z_3 en z_2 zullen noemen, zijn dan blijkbaar richtlijnen van de hyperboloïden $(y_3\, y_2\, y_1)$, $(y_1\, y_2\, y_4)$, $(y_3\, y_1\, y_4)$ of van H_4, H_3, H_2. Uit hetzelfde artikel mogen wij afleiden, dat de gezochte kernkromme is de gedeeltelijke doorsnede van de regelscharen $(t_1\, t_4\, z_4)$ en $(t_2\, t_3\, z_4)$ of van $(t_2\, t_4\, z_3)$ en $(t_3\, t_1\, z_3)$, of eindelijk van $(t_3\, t_4\, z_2)$ en $(t_1\, t_2\, z_2)$. Het feit, dat de kernkromme door drieërlei constructie kan worden gevonden, staat in verband met eene eigenschap der hyperboloïden H_1, H_2, H_3, H_4, waarop zoo aanstonds nog even zal worden gewezen.

Intusschen worden nu op ieder der lijnen $t_1, .. t_4$ twee punten Q_1 en Q_1', ... Q_4 en Q_4' verkregen, toppen van kegels uit het net Σ. Voldoen daarbij de lijnen $t_1, .. t_4$ aan de voorwaarde $s_1 = 0$, dan moet het mogelijk zijn uit ieder tweetal punten Q er een te kiezen, zoodanig dat men vier kegels van een bundel verkrijgt, wier gemeenschappelijke doorsnede eene R_4 zal zijn, die $t_1, .. t_4$ raakt, en $B_1, .. B_4$ tot buigpunten heeft. Door het vlak $B_1 B_2 B_3 B_4$ om y_1 te laten wentelen, verkrijgt men er oneindig veel. Die bewerking is ten slotte niets anders dan het toepassen van

eene homographische transformatie op de eerste kromme, waarbij de punten der lijnen f' en f'' met zichzelven overeenkomen.

Zijn wij hierbij van de lijn y_1 uitgegaan, evengoed hadden de lijnen y_2, y_3, y_4 kunnen dienen. In het geheel worden derhalve vier verschillende groepen van R^4 gevonden. De krommen van elke groep zijn blijkbaar gelegen op een regelvlak van den achtsten graad, dat $t_1, .. t_4$ tot dubbele beschrijvende lijnen en f' en f'' tot viervoudige lijnen heeft.

14. *Eene eigenschap der hyperboloïden* H_1, H_2, H_3, H_4. Zooals in de reeds meermaal aangehaalde verhandeling werd besproken, geven vier kruisende lijnen $t_1, .. t_4$ aanleiding tot de beschouwing van drie nulstelsels van de derde orde, die door (14; 23), (25; 31), (34; 13) werden aangeduid. Namelijk gaat door een willekeurig punt eene snijlijn van t_1 en t_4, eene snijlijn van t_2 en t_3; het vlak dezer snijlijnen kan het nulvlak genoemd worden van het punt voor het nulstelsel (14; 23). Bewezen werd, dat het nulpunt eene ruimtekromme R^3 doorloopt, die $t_1, .. t_4$ tot koorden heeft, wanneer het nulvlak om eene rechte lijn wentelt. Rust evenwel die rechte lijn op f' en f'', dan beschrijft het nulpunt eveneens eene rechte lijn, die ook f' en f'' snijdt. De overeenkomst tusschen die beide rechte lijnen droeg een involutorisch karakter. Er werd nu gezocht naar de krommen R^3, in de drie nulsystemen toegevoegd aan de lijnen z van het achttal hyperboloïden H_1, H_2, ... H_8, welke lijnen z telkens gemeenschappelijk waren aan een zestal der twaalf complexen $K_{\pm a} = 0, ... K_{\pm c_1} = 0$.

Het bleek, dat het laatste viertal hyperboloïden zich geheel anders gedroeg dan het eerste. De krommen R^3, behoorende bij de lijnen z van eene hyperboloïde H, hebben tot meetkundige plaats een regelvlak F^6 van den zesden graad. Zoo zou men uit ieder oppervlak H drie oppervlakken F^6 kunnen afleiden, al naargelang men daarbij het nulstelsel (14; 23), (24; 31) of (34; 12) te hulp nam. Zooals werd aangetoond bezitten de hyperboloïden H_5, H_6, H_7, H_8 de merkwaardige eigenschap, dat voor elk van hen de drie regelvlakken F^6

samenvallen. Die eigenschap missen de oppervlakken H_1, H_2, H_3, H_4; uit de constructie van het vorige artikel blijkt echter welke eigenschap zij daartegenover kunnen stellen. Die constructie leerde, dat met eene lijn z_4 van H_4 in het nulstelsel (14; 23), met eene lijn z_3 van H_3 in het nulstelsel (24; 31), eindelijk met eene lijn z_2 van H_2 in het nulstelsel (34; 12) dezelfde ruimtekromme R^3 overeenkomt. Door dergelijke overleggingen komt men tot het besluit, dat aan de hyperboloïden H_1, H_2, H_3, H_4 in het nulstelsel (14; 23), vier oppervlakken F^6 zijn toegevoegd, welke in dezelfde volgorde behooren bij H_2, H_1, H_4, H_3 in het nulstelsel (24; 31) of bij H_3, H_4, H_1, H_2 in het nulstelsel (34; 12). De krommen R^3, welke op deze oppervlakken F^6 (nog steeds in dezelfde volgorde genomen) voorkomen, hebben wij leeren kennen als te zijn kernkrommen voor de oppervlakkennetten Σ, waarbij dan het vlak der vier punten B door y_4, y_3, y_2 of y_1, is gelegd. De krommen R^3, daarentegen gelegen op de oppervlakken F^6, die bij H_5, H_6, H_7, H_8 behooren, hebben de eigenschap om onder zekere omstandigheden over te gaan in krommen, welke $t_1, .. t_4$ aanraken, wat bij de andere groep weder niet kan voorkomen.

15. *De invariante voorwaarde in de gevallen I, II en III.* Hebben wij in het voorafgaande vrij uitvoerig het eenvoudigste geval IV onderzocht, er blijft over, ook de drie eerste gevallen te bespreken. Zooals werd opgemerkt in art. 3, is hier de symmetrie verstoord. Dat maakt de betrekking tusschen de vier lijnen meer ingewikkeld en de gevolgen minder merkwaardig,

Wij zullen ons bepalen tot het afleiden der invariante voorwaarde, en daaraan eene enkele opmerking toevoegen, aangaande het complex, hetwelk met die voorwaarde samenhangt.

De argumenten der buigpunten $B_1, .. B_4$ weder $u_1, .. u_4$ noemende, gaan wij in het geval I uit van de vergelijkingen (C) van art. 2

$$\frac{\alpha^2}{a p'(u_2-u_3)p'(u_1-u_4)}=\frac{\beta^2}{b p'(u_3-u_1)p'(u_2-u_4)}=\frac{\gamma^2}{c p'(u_1-u_2)p'(u_3-u_4)}.$$

De argumenten zijn thans verbonden door de betrekkingen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \omega, \text{ of } u_2 + u_3 = u_1 + u_4.$$

Verder is

$$2\,u_1 = \omega, \quad 2\,u_2 = \omega + \omega', \quad 2\,u_3 = \omega', \quad 2\,u_4 = 0.$$

Wij stellen

$$v_1 = u_2 - u_3, \quad v_2 = u_3 - u_1, \quad v_3 = u_1 - u_2,$$

zoodat

$$2 v_1 = \omega, \quad 2\,v_2 = \omega + \omega', \quad 2\,v_3 = \omega',$$

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0,$$

$$u_1 - u_4 = v_1 + \omega', \quad u_2 - u_4 = -v_2, \quad u_3 - u_4 = v_3.$$

De vergelijkingen gaan dus over in

$$\frac{\alpha^2}{a p' v_1 p'(v_1 + \omega')} = \frac{\beta^2}{-b p'^2 v_2} = \frac{\gamma^2}{c p'^2 v_3}.$$

Zooals wij in art. 4 aantoonden, is weer

$$p' v_1 p'(v_1 + \omega') = \alpha^2 \beta^2 \frac{p'^2 v_1}{(p v_1 - e_3)^2} = 4 \alpha^2 \beta^2 \{p v_1 + p(v_1 + \omega) + e_3\},$$

waaruit volgt

$$p' v_1 p'(v_1 + \omega') = 4\,\alpha^2 \beta^2 \gamma^2,$$

onverschillig welke der vier waarden, die v_1 kan aannemen, men in het beschouwde product substitueert.

Anders is het met de uitdrukking $p'^2 v_2$. Daar v_2 hier de waarden $\pm \frac{\omega + \omega'}{2}$, $\pm \frac{\omega - \omega'}{2}$ kan aannemen, is *)

$$p' v_2 = \pm\, 2\,\alpha\,\gamma\,(\gamma \pm i\,\alpha),$$

*) Halphen I, blz. 54, formule (22).

en dus hebben wij voor $p'^2 v_2$ twee verschillende waarden

$$p'^2 v_2 = + 4\, \alpha^2 \gamma^2 (\gamma \pm i\alpha)^2.$$

Op volkomen dezelfde wijze hebben wij

$$p'^2 v_3 = + 4\, \alpha^2 \beta^2 (\alpha \pm i\beta)^2,$$

en dan, in aanmerking nemende, dat de dubbele teekens geheel onafhankelijk van elkaar zijn,

$$\frac{\alpha^2}{a\,\alpha^2 \beta^2 \gamma^2} = \frac{\beta^2}{-b\,\alpha^2 \gamma^2 (\gamma \pm i\alpha)^2} = \frac{\gamma^2}{c\,\alpha^2 \beta^2 (\alpha \pm i\beta)^2},$$

wat, daar

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

herleid kan worden tot

$$\frac{\alpha^2}{a} = \frac{(i\gamma \pm \alpha)^2}{b} = \frac{(i\beta \pm \alpha)^2}{c}$$

of tot

$$\frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{i\gamma \pm \alpha}{\sqrt{b}} = \frac{i\beta \pm \alpha}{\sqrt{c}}.$$

Dit levert

$$\frac{\alpha}{\sqrt{a}} = \frac{i\gamma}{\sqrt{b} \mp \sqrt{a}} = \frac{i\beta}{\sqrt{c} \mp \sqrt{a}}, \qquad \text{(K)}$$

zoodat

$$-a + (\sqrt{b} \pm \sqrt{a})^2 + (\sqrt{c} \pm \sqrt{a})^2 = 0.$$

Verdrijving der wortelteekens doet ten laatste vinden

$$(-a + b + c)^4 = 64\, a^2 b c.$$

Zijn de buigpunten B dus zoo gekozen, dat door de kromme R^4 en de koorden $B_2 B_3$ en $B_1 B_4$ een regelvlak

gaat, dan zijn de vier buigraaklijnen door eene bikwadratische betrekking verbonden.

Verwisseling der letters a, b, c geeft de voorwaarde in de gevallen II en III.

16. *Meetkundige beteekenis der gevonden vergelijking.* Nemen wij als in het geval IV de lijnen t_1, t_2, t_3 willekeurig aan, dan vormen alle lijnen t_4, die voldoen aan

$$(-a+b+c)^4-64\,a^2bc=0,$$

een bikwadratisch complex. De vergelijking is van zulk een bijzonderen aard, dat men zonder groote moeite voor een willekeurig punt P den complexkegel kan construeeren.

Doelmatig is het evenwel in plaats van dien kegel zelf zijne doorsnede te zoeken met het poolvlak van P ten opzichte van de regelschaar $(t_1\,t_2\,t_3)$.

Laat dit vlak de drie gegeven lijnen in A, B en C, de regelschaar volgens de kegelsnede K^2 snijden. Wij trekken in A, B en C de raaklijnen aan K^2, welke door hunne onderlinge doorsnijding den driehoek $A_1\,B_1\,C_1$ bepalen.

De lijnen AA_1, BB_1, CC_1 gaan daarbij door één punt. Trekken wij nog BC, welke lijn B_1C_1 in A_2 treft, dan is de figuur gereed, waarin wij de doorsnede van den gezochten complexkegel zullen aanwijzen.

Het is op zichzelf duidelijk, dat de lijnen B_1C_1, C_1A_1, A_1C_1, BC de doorsneden zijn van het vlak van teekening met de nulvlakken van P ten opzichte van de lineaire complexen

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad -a+b+c=0.$$

Wij kunnen derhalve in zeker opzicht de grootheden, a, b en c als trilineaire coördinaten beschouwen, waarbij $A_1\,B_1\,C_1$ als coördinatendriehoek is aangenomen.

Deze zienswijze leert, dat door de vergelijking

$$(-a+b+c)^4-64\,a^2bc=0$$

eene kromme van den vierden graad wordt voorgesteld, welke

in A_2 een „Selbstberührungspunkt" heeft met B_1C_1 tot raaklijn, en die in B en C twee buigpunten bezit, waar de raaklijnen C_1A_1 en A_1B_1 vier opvolgende punten met de kromme gemeen hebben.

Zij kan volledig worden geconstrueerd als meetkundige plaats der snijpunten van homologe elementen uit den involutorischen stralenbundel

$$\{(-a+b+c)+\lambda a)\}\ \{(-a+b+c)-\lambda a\}=0$$

en den daarmede projectivischen kegelsneebundel

$$\lambda^2(-a+b+c)^2-64\,bc=0.$$

Neemt men van de kromme de reciproke figuur ten opzichte van K^2, dan zal daardoor de complexkromme van het vlak van teekening worden verkregen.

17. *Absolute invariant der kromme.* Evenals in het geval IV zou men ook thans den absoluten invariant **A** in de coördinaten der gegeven lijnen kunnen uitdrukken. Aangezien er evenwel geene symmetrie bestaat, kan **A** bezwaarlijk uit de beide absolute invarianten worden berekend.

De vergelijkingen (K) geven

$$\frac{e_2-e_3}{-a}=\frac{e_3-e_1}{(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2}=\frac{e_1-e_2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2},$$

met behulp waarvan wij als in art. 7 kunnen afleiden

$$\varrho^2 g_2=\frac{2}{3}\{a^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b},^4\},$$

$$\varrho^3 g_3=\frac{4}{27}(b-c+2\sqrt{ac}-2\sqrt{ab})(-a+c-2\sqrt{ac})(a-b+2\sqrt{ab}).$$

Daaruit volgt

$$\mathbf{A}=\frac{g_2^{\,3}}{27\,g_3^{\,2}}=\frac{\{a^2+(\sqrt{a}-\sqrt{c})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4\}^3}{2(b-c+2\sqrt{ac}-2\sqrt{ab})^2(-a+c-2\sqrt{ac})^2(a-b+2\sqrt{ab})^2}.$$

De invariant **A** is geene rationale functie van de coördinaten der vier buigraaklijnen. Op dezelfde wijze als in art. 8 zou men ook hier weder eenige lineaire complexen kunnen opsporen, waarin de lijn t_4 gelegen zou moeten zijn, opdat de invariant **A** de waarde 0 of ∞ zou kunnen aannemen.

Breda, December 1890.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Februari 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, Voorzitter, WEBER, ZEEMAN, MAC GILLAVRY, VAN BEMMELEN, KORTEWEG, FRANCHIMONT, BIERENS DE HAAN, VAN DORP, STOKVIS, FORSTER, KAPTEIJN, PLACE, SCHOUTE, SCHOLS, VAN DIESEN, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, LORENTZ, MICHAËLIS, KOSTER, PEKELHARING, RAUWENHOFF, ENGELMANN, MULDER, MOLL, VAN RIEMSDIJK, MARTIN, BEHRENS, HOEK, BAKHUIS ROOZEBOOM, J. A. C. OUDEMANS, HOFFMANN, en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Worden gelezen Brieven van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van de navolgenden: 1°. L. VAN DER STEEN, Bibliothecaris van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen te 's Hertogenbosch, 4 Februari 1891; 2°. G. J. W. BREMER, Secretaris van het Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, 14 Februari 1891; 3°. W. F. C. VAN LAAK JR., Bibliothecaris van de Gemeente-Bibliotheek te Arnhem, 1891; 4°. A. AOSTLE, Bibliothecaris van de State University of Iowa te Iowa City, 20 Januari 1891; 5°. W. H. HOTTS,

Bibliothecaris van de Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters te Madison, 30 Januari 1891.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van de navolgenden: 1°. het Ministerie van Buitenlandsche Zaken te 's Gravenhage, 20 Februari 1891; 2°. het Ministerie van Waterstaat, Handel en Nijverheid te 's Gravenhage, 31 Januari 1891; 3°. W. P. Wolters, Bibliothecaris van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden, Januari 1891; 4°. J. F. L. Schneider, Bibliothecaris van de polytechnische School te Delft, 2 Februari 1891; 5°. den Directeur van het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut te Utrecht, Februari 1891; 6°. F. Nicholson, Bibliothecaris van de literary and philosophical Society te Manchester, 1890; 7°. F. von Hollen, Secretaris van het Reichs-Marine-Amt te Berlijn, 30 Januari 1891; 8°. H. Mohn, Voorzitter van de Norwegian North-Atlantic Expedition, 1890; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Ingekomen zijn:

1°. twee brieven van den Minister van Binnenlandsche Zaken (3 en 16 Februari 1891), waarin door de Regeering voorlichting gevraagd wordt omtrent de wijze, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen behoort plaats te hebben. De Voorzitter deelt mede, dat hij, ten einde tijd te winnen, kort na den 3den Februari eene Commissie benoemd heeft om de Afdeeling in deze te dienen van raad. Die Commissie bestaat uit de Heeren Hoffmann, Behrens en Weber. Het verlangen is te kennen gegeven, dat het advies in de Maart-vergadering ter tafel moge komen;

2°. brieven van de Heeren A. van Bemmelen en J. Büttikofer over het aanvaarden van eene benoeming van Regeeringswege als afgevaardigde naar het 2de ornithologisch Congres, te houden te Buda-Pesth. De Heer van Bemmelen kon zich niet beschikbaar stellen, doch de Heer Bütti-

KOFER zou het mandaat aanvaarden, indien zijne reiskosten werden vergoed. De verblijfkosten zou hij dan zelf wenschen te dragen. De inhoud van beide brieven werd aan den Minister meêgedeeld, en daarbij aangedrongen op de aanneming van de zeer weinig bezwarende voorwaarden van den Heer BÜTTIKOFER;

3°. eene circulaire, waarbij de Afdeeling door een Comité d'Organisation uit de Académie royale des Sciences, des Lettres en des Beaux Arts de Belgique, wordt uitgenoodigd, een adres van gelukwensching op te stellen bij gelegenheid van het op 5 Mei a.s. invallend 50-jarig jubilé, als lid van genoemde Instelling, van den Heer JEAN SERVAIS STAS, en dit vóór den genoemden datum toe te zenden aan een nader opgegeven adres. De Voorzitter meent, dat, zooals vroeger meermalen gebeurde, aan dit verzoek behoort te worden voldaan, en dat het wenschelijk is dat eene Commissie uit de Afdeeling, meer van nabij bekend met de verdiensten van den jubilaris, met de samenstelling van zulk een adres worde belast. Daar tegen deze opvatting geene bedenkingen worden vernomen, wenscht de Voorzitter de door hem bedoelde taak opgedragen te zien aan de Heeren GUNNING en FRANCHIMONT. De laatste, ter vergadering tegenwoordig, neemt de benoeming aan; aan den Heer GUNNING zal daarvan kennis worden gegeven;

4°. eene circulaire, waarbij de Afdeeling door een groot aantal vereerders van den Hoogleeraar HERMANN VON HELMHOLTZ wordt uitgenoodigd, een adres van gelukwensching in gereedheid te brengen tegen den 31sten Augustus a.s.: den datum, waarop voornoemde geleerde den 70-jarigen leeftijd bereikt zal hebben. Op dezelfde gronden als hierboven genoemd, worden de Heeren ENGELMANN, LORENTZ en VAN DER WAALS met de samenstelling van het adres belast. De eerste twee heeren nemen de benoeming aan; aan den Heer VAN DER WAALS zal daarvan kennis worden gegeven;

5°. een antwoord van het Bestuur der Akademie op het verzoek der Afdeeling om eene som van *f* 100 beschikbaar te stellen voor den Heer BIERENS DE HAAN, tot het doen overschrijven van titels van mathematische opstellen en ver-

handelingen uit tijdschriften, enz., voor een vroeger nader omschreven doel. Het Bestuur acht, om nader aangevoerde redenen, het verzoek voor geene inwilliging vatbaar.

— De Heeren BEHRENS en VAN BEMMELEN brengen een zeer gunstig verslag uit over de verhandeling van den Heer J. W. RETGERS, en bevelen de opneming daarvan in de 4^0 werken der Akademie aan. Aldus wordt besloten.

— De Heer VAN BEMMELEN vertoont twee nieuwe gekristalliseerde zouten: het $HgO.SO_3.H_2O$ en het basische $(HgO)^3 (SO_3)^2.2H_2O$, dat zich door zijne kleurloosheid onderscheidt van het reeds lang bekende gele zout $(HgO)^3.SO_3$. [1]).

De Heer HENSGEN, assistent aan het anorganisch scheikundig Laboratorium te Leiden, heeft deze zouten verkregen bij zijn onderzoek omtrent de evenwichtstoestanden tusschen HgO, SO_3 en H_2O. De uitkomsten daarvan zullen later aan de Akademie medegedeeld worden. Het is gebleken, dat meer dan één basisch zout daarbij kan ontstaan, en dat de evenwichtstoestanden dus ingewikkelder zijn dan vroeger gemeend werd.

In de tweede plaats vertoont de Heer v. B. zeer fraai gekristalliseerd Antimoniumchloruur, door sublimeering verkregen, en eenige buizen, met $Sb Cl_3$ en verdund zwavelzuur in verschillende verhoudingen gevuld. De Heer HENSGEN heeft ontdekt, dat daarin dezelfde merkwaardige verschijnselen van ontmenging tot twee lagen bij verwarming — en hermenging tot ééne homogene vloeistof bij afkoeling — kunnen voortgebracht worden, als waargenomen zijn bij

1) Uitkomsten der analysen:

Molekuulverhouding.

	Berekend	Gevonden I	Gevonden II
SO_3	2.	2.00	2.00
HgO	3.	2.96	2.92
H_2O	2.	2.04	2.04

Molekuulverhouding.

	Berekend	Gevonden I	Gevonden II
SO_3	1	1.00	1.00
HgO	1	1.01	1.00
H_2O	1	0.92^6	0.99^1

verschillende vloeistofmengsels (bijv. benzol en water, trimethylamine en water enz.). De onderste laag bestaat uit $Sb\,Cl_3$ met 1—2 mol. water en eenig zwavelzuur; de bovenste uit verdund zwavelzuur met eenig $Sb\,Cl_3$. De temperaturen van de mengpunten hangen van de verhouding der samengevoegde stoffen af. De Heer HENSGEN houdt zich met het onderzoek daarvan bezig.

— De Heer KORTEWEG begint met eene vroegere mededeeling (Verslagen en Mededeelingen, 3de Reeks, Deel V, p. 402) over plooipunten in herinnering te brengen. Sedert heeft hij in twee uitvoerige opstellen: het eene opgenomen in de *Wiener Berichte*, Bd. XCVIII 1889, en vertaald in de *Archives Néerland.*, T. XXIV, p. 57, het andere onlangs verschenen in hetzelfde deel der *Archives*, p. 295, dit onderwerp en 'tgeen er mede samenhangt nader behandeld. Op één punt echter heeft hetgeen daar gegeven wordt nog nadere aanvulling noodig. Dit betreft het gedrag der plooipunten met bijbehoorende spinodale en connodale lijnen bij de vervorming door een kegelpunt heen.

Spreker gaat bij de beschrijving van dit gedrag uit van den toestand als het kegelpunt juist aanwezig is. Is alsdan $H_2 + H_3 + H_4 + \ldots = 0$ de vergelijking van het oppervlak met het kegelpunt als oorsprong, dan gaan er door het kegelpunt zes takken der spinodale lijn, welke in het kegelpunt tot raaklijnen bezitten de zes lijnen $H_2 = 0$, $H_3 = 0$.

Van deze takken kunnen er dus *zes*, *vier*, *twee* of *nul* bestaanbaar zijn. Iedere tak loopt door het kegelpunt heen over beide bladen van het oppervlak. Ieder blad wordt daardoor in even zoovele segmenten verdeeld als er bestaanbare takken zijn der spinodale lijn. Deze segmenten zijn beurtelings positief en negatief gekromd, de overeenkomstige segmenten op beide bladen *tegengesteld.*

Iedere bestaanbare tak der spinodale lijn is vergezeld van een bestaanbaren tak der connodale lijn. In het kegelpunt raken beide takken elkander. Zij gaan aldaar *niet* door elkander heen, waarvan het gevolg is, dat de tak der connodale lijn op beide bladen op gelijksoortig gekromd gebied voortloopt.

De beteekenis van zulk een tak der connodale lijn is *deze*: dat zij de meetkundige plaats is der punten, wier raakvlakken door het kegelpunt gaan, of, wil men liever, de contactlijn van het oppervlak met den omhullenden kegel, die het kegelpunt tot top heeft. Dewijl ieder vlak, gaande door het kegelpunt, als een raakvlak moet worden opgevat, is het duidelijk dat zulk eene lijn als eene connodale lijn moet worden beschouwd, waarvan de ééne connode voortdurend in het kegelpunt blijft, de andere langs het oppervlak voortloopt.

Spreker gaat daarop over tot den invloed, dien eene geringe vervorming van het kegelpunt op den loop der spinodale en connodale lijnen heeft. Bij *scheiding* der beide in het kegelpunt samenkomende bladen breidt het positief gekromde deel zich uit ten koste van het negatief gekromde. De takken der connodale lijn, welke op negatief gekromd gebied verliepen, verdwijnen spoorloos, de anderen verdubbelen zich. Eén der beide door verdubbeling ontstane takken raakt de spinodale lijn in een plooipunt, de andere tak loopt, zoover beiden zonder nadere kennis van de gedaante van het oppervlak op eindigen afstand vervolgd kunnen worden, met deze ongeveer evenwijdig. De zoo beschreven figuur vertoont zich natuurlijk op beide bladen. Er ontstaan dus bij scheiding dubbel zooveel bestaanbare plooipunten als er bestaanbare takken der connodale lijn op positief gekromd gebied verliepen toen het kegelpunt aanwezig was. Daar na de scheiding alle connodale lijnen zich op positief gekromd gebied bevinden, zijn de plooipunten allen van de eerste soort. Van de door verdubbeling ontstane takken bezitten die met plooipunt, connoden, welke beiden op hetzelfde blad gelegen zijn; bij de anderen met deze evenwijdig verloopenden, liggen de connoden op verschillende bladen.

Bij *verbinding* doen zich tegengestelde verschijnselen voor, die gemakkelijk te gissen zijn.

Spreker hoopt over het behandelde onderwerp en eenige andere verwante een opstel voor de Verslagen en Mededeelingen gereed te maken.

— Namens den Heer Kamerlingh Onnes, die verhinderd is

de vergadering bij te wonen, biedt de Heer LORENTZ voor de boekerij een exemplaar aan van de onlangs verschenen dissertatie van den Heer L. M. J. STOEL *) en deelt in het kort de uitkomsten mede van het daarin beschreven onderzoek.

Het doel daarvan was: de verandering der inwendige wrijving eener vloeistof met de temperatuur te leeren kennen tusschen het kookpunt onder den druk van 1 atm. en de kritische temperatuur, en aldus eene leemte aan te vullen, die de tot nog toe verrichte metingen lieten bestaan. Als vloeistof werd chloormethyl gekozen, dat onder een druk van 1 atm. bij — 23° C. kookt, en waarvan de kritische temperatuur 143° C. is.

In den gebezigden toestel bevonden zich twee verticale, op kleinen afstand van elkander geplaatste buizen, die, boven en beneden met elkander verbonden, eene langgerekte () vormden. Het eene been A was betrekkelijk wijd, het andere bestond uit een nog wijder reservoir B beneden en eene capillaire buis van 55 cM. lengte daarboven. Van het laagste punt der () liep naar beneden eene buis, die met haar open einde in de persbus van een toestel van CAILLETET geplaatst was, zoodat van onder kwik in den toestel kon worden gedreven. Te dien einde stond de bedoelde persbus in gemeenschap met een tweede met kwik gevuld vat; op den vloeistofspiegel in dit laatste, kon door middel van koolzuur of lucht een hooge druk worden uitgeoefend, hetgeen noodig was, daar bij de hoogste temperatuur, waarbij men werkte, de spanning van den verzadigden chloormethyldamp ruim 40 atm. bedroeg.

Van het bovenste punt der ()-vormige buis verhief zich eene verticale buis, die aanvankelijk geopend en, met het oog op het reinigen, het luchtledig pompen en het vullen van den toestel door het overdestilleeren van chloormethyl (waar bij de buis werd afgekoeld door een mengsel van vast kool-

*) L. M. J. STOEL. Metingen over den invloed van de temperatuur op de inwendige wrijving van vloeistoffen tusschen het kookpunt en den kritischen toestand. Leiden 1891.

zuur en alcohol), van eene bijzondere inrichting voorzien was, maar naderhand werd dichtgesmolten. Het benedenste deel dier buis was een reservoir C, ruim tweemaal zoo groot als het reservoir B.

De beschreven, uit glas vervaardigde, toestel was geplaatst in een even hoogen mantel, waardoor men absoluten alcohol liet stroomen, die door een mengsel van alcohol en vast koolzuur was afgekoeld, of wel water van de verlangde temperatuur, of eindelijk verhitte glycerine. Op deze wijze konden proeven genomen worden bij temperaturen tusschen — 28° C. en + 123° C.

Bij het begin eener proef stond het kwik tot even beneden de 0, het vloeibare chloormethyl tot even in het reservoir C, terwijl daarboven de toestel slechts den damp der vloeistof bevatte. Perste men nu het kwik omhoog, dan steeg het spoedig in de buis A tot een daarop, nabij het boveneinde, aangebracht merkteeken; door regeling van den druk werd dan de kwikspiegel op dat merk gehouden, terwijl het van beneden komende kwik langzaam het chloormethyl uit het reservoir B door de capillaire buis naar C dreef. Op den wand van B waren een drietal merkteekens aangebracht, waarop aflezingsmikroskopen met kruisdraden waren gericht; met behulp van een registreer-toestel werden de oogenblikken bepaald, waarop de stijgende kwikspiegel deze merken bereikte; tienden van secunden konden aldus met zekerheid worden bepaald, en zelfs honderdste deelen geschat.

Daar boven in den toestel steeds eene met damp gevulde ruimte overbleef, was de druk aan het boveneinde der capillaire buis slechts weinig grooter dan het maximum van spanning van den damp bij de temperatuur der proef. De druk aan het benedeneinde wordt gemeten door de hoogte van het kwik in de buis A.

In de verhandeling wordt de invloed, dien afwijkingen van de wet van Poiseuille en de uitzetting der vloeistof gedurende het opstijgen kunnen hebben, uitvoerig besproken. Voor de afwijkingen van de wet van Poiseuille zullen dere proeven nog de juiste correctiën moeten leeren kennen

Uit de verkregen uitkomsten zal het mogelijk zijn, naderhand met behulp van de afmetingen der capillaire buis absolute waarden voor den wrijvings-coëfficient af te leiden, waartoe men ook zal kunnen geraken door dezelfde buis voor proeven met eene vloeistof van bekenden wrijvings-coëfficient te bezigen. Reeds thans echter geven de niet gecorrigeerde waargenomen doorlooptijden ϑ een voldoend beeld van de veranderingen der inwendige wrijving met de temperatuur. Zij kunnen, in secunden uitgedrukt, met voldoende nauwkeurigheid worden voorgesteld door de empirische formule:

$$\log \vartheta = \frac{896 - T}{250},$$

waarin T de absolute temperatuur is. Dit blijkt uit de volgende tabel, ontleend aan die van den Heer STOEL, welke 61 waarnemingen omvat.

$T-273$	ϑ (waargenomen)	ϑ (berekend)	Afwijking in proc.
— 28°	408.50	401.79	+ 1.7 pCt.
— 20.75	379.91	375.84	+ 1.1
— 11.3	339.41	344.51	— 1.5
+ 0.75	305.72	308.32	— 0.8
10.8	280.21	281.06	— 0.3
19.0	259.81	260.62	— 0.3
27.8	236.17	240.33	— 1.7
35.9	220.995	223.05	— 0.9
45.2	204.595	204.74	— 0.1
55.8	186.58	185.69	+ 0.5
66.6	169.99	168.11	+ 1.1
75.2	157.59	155.31	+ 1.5
85.1	143.46	141.78	+ 1.2
93.15	133.38	131.64	+ 1.2
104.3	120.88	118.80	+ 1.8
110.7	112.68	112.00	+ 0.6
122.95	97.06	100.04	— 3.0

— De Heer VAN DE SANDE BAKHUIJZEN spreekt over de verandering van de poolshoogte. Hij toont aan, dat de veranderingen, in de jaren 1889—1890 te Berlijn, Potsdam en Praag waargenomen, bezwaarlijk aan waarnemingsfouten kunnen worden toegeschreven, en geeft daarna verslag van zijn onderzoek der waarnemingen van de poolster, in de jaren 1851—1890 te Greenwich volbracht. Uit de waarnemingen van de jaren 1851—1882 leidde hij af, dat een groot deel van de jaarlijksche afwijkingen, welke de hoogtemetingen van de poolster vertoonen, moest worden toegeschreven aan abnormale straalbreking in de waarnemingszaal, doch dat een klein deel dier afwijkingen door werkelijke veranderingen der poolshoogte moest worden verklaard. Voor de jaren 1884—1885 en 1889—1890 vond hij echter veel grootere afwijkingen, die heenwezen op grootere wijzigingen in de poolshoogte, in vrij goede overeenstemming met de uitkomsten, die elders, ook in Leiden, waren verkregen, en die dus doelden op buitengewone oorzaken, welke in die jaren de richting van de aardas hadden veranderd.

— Voor de bibliotheek der Akademie worden aangeboden, door den Heer FRANCHIMONT: Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas, IX, n°. 5, en door den Heer SCHOLS zijn werk over Landmeten en Waterpassen (4e druk) en verder: Waterbouwkunde van HENKET, SCHOLS en TELDERS, I Afd., VII, afl. 4.

— Daar er verder niets te verhandelen is, sluit de Voorzitter de Vergadering.

VERSLAG

OVER DE VERHANDELING:

DE SAMENSTELLING VAN HET DUINZAND VAN NEDERLAND,

DOOR

Dr. J. W. RETGERS,
Mijn-Ingenieur te 's Gravenhage.



Reeds herhaaldelijk zijn zanden aan een mineralogisch onderzoek onderworpen geworden; tot heden echter ontbrak een dergelijk onderzoek van zeezand. Nogtans zou juist dit, als grondslag onzer eenigszins zwevende voorstellingen over de wording van zandbanken en zandstuivingen, in hooge mate gewenscht zijn. Eene verhandeling, die over de samenstelling van duinzand licht tracht te verspreiden, heeft om deze reden aanspraak op eene gunstige beoordeeling, al liet de uitkomst van het onderzoek te wenschen over. Maar wanneer, gelijk in de verhandeling, waarover thans verslag wordt uitgebracht, het onderwerp met groote nauwgezetheid en volledigheid is afgehandeld, mag aan den onderzoeker wel dubbel hulde gebracht worden, met het oog op de eigenaardige moeielijkheden, die hij alléén door eigen vinding en arbeid heeft moeten overwinnen. De Heer Retgers was voor het onderzoek van zand als het ware geroepen door de schitterende uitkomsten, die hij bij zijn onderzoek van de vulkanische asch der Krakatau-uitbarsting van 1883 verkregen had. Hij heeft dan ook getracht, dezelfde methode van

onderzoek in toepassing te brengen: scheiding naar het soortelijk gewicht, door middel eener oplossing van joodkwik-joodkalium. Toch zag hij zich spoedig genoopt, aan deze methode eene aanzienlijke uitbreiding en aanvulling te geven, door het aanwenden van andere scheidingsvloeistoffen en van optische hulpmiddelen van onderzoek. Nagenoeg de helft der verhandeling is aan de uiteenzetting der methode van onderzoek gewijd, en dit gedeelte mag, om zijne oorspronkelijkheid en om de beteekenis voor latere onderzoekingen van denzelfden of van soortgelijken aard, geacht worden van ten minste even groote waarde te zijn als het tweede, waarin de uitkomsten van het onderzoek zijn neergelegd.

Terwijl men zich bij het onderzoek van vulkanische asch binnen een betrekkelijk engen kring van mineralen beweegt, en er oprekenen mag, van die allen goed ontwikkelde kristallen te zullen vinden, heeft men in zeezand nagenoeg enkel rotsvormende mineralen te verwachten, en dan nog wel versletene, door schuring afgeronde exemplaren. Daartegenover staat het niet onbelangrijke voordeel, dat men slechts met homogene korrels van niet al te kleine afmeting te doen heeft, hetgeen bij de scheiding door middel van zware vloeistoffen veel gemak en tijdbesparing aanbrengt.

De eerste scheiding, met behulp van THOULET'sche vloeistof van het soort. gew. 2.7, dient om de groote hoeveelheid kwarts (ca. 85 pCt.) te verwijderen. Eene tweede scheiding met THOULET'sche vloeistof van s. g. 3.0, levert hoofdzakelijk kalkspaat en brokken van schelpen. Voor de derde scheiding dient joodmethyleen (s. g. 3.3); zij levert amphibool en toermalijn. Eene vierde scheiding met eene oplossing van jodium en jodoform in joodmethyleen (s. g. 3.6) geeft augiet en epidoot. Voor de verdere splitsing van het hierin bezonken roodachtig zand, werd van het dubbelzout $Tl\,Ag\,N_2\,O_6$ gebruik gemaakt, hetwelk, bij 75° C. smeltend, een s. g. = 5.0 heeft, terwijl door toevoeging van een weinig water het s. g. tot 4.0, en het smeltpunt tot 50° teruggebracht kan worden. Met behulp van dit zout werden granaat, rutiel, zirkoon en ijzererts gescheiden.

Het optisch onderzoek der mineraalkorrels wordt door hare dikte (0.25 mM.), haar ronden vorm en de oneffenheid harer oppervlakte bemoeielijkt. De Heer Retgers heeft hierin voorzien door voorzichtige verbrijzeling, die tevens dienen moest om splijtvakken op te sporen en daarvan voor kristallographische en optische orienteering partij te trekken, en voorts door vernuftige toepassing van vloeistoffen van verschillend brekingsvermogen. Deze vloeistoffen, voornamelijk *benzol* ($n = 1.5$) en joodmethyleen ($n = 1.74$), werden gebruikt om de doorzichtigheid der korrels en schilfers te verhoogen, en tevens om bij benadering het lichtbrekend vermogen der onderzochte mineralen vast te stellen. Eindelijk heeft hij van enkele mikrochemische reactiën gebruik gemaakt, o. a. voor K, Ca, Ti, Zr, P ; terwijl hardheidsproeven niet in toepassing gebracht zijn, ofschoon die allicht voor enkele mineralen, o. a. voor korund, goede diensten hadden kunnen bewijzen.

Door Thoulet'sche vloeistof van s. g. 3.00 worden 95 pCt. van het zand afgescheiden, en wel 85 pCt. kwarts, 7.5 pCt. kalkspaat en brokken van schelpen, en 2.5 pCt. orthoklaas en mikroklien. Onder de groote hoeveelheid kwarts schuilt een weinig cordiëriet en plagioklaas. Dat mineralen van een zoo uitnemend splijtingsvermogen als veldspaat in eene zoo groote hoeveelheid in het zeezand voorkomen, wekt reeds bevreemding, maar opvallend is voorzeker de groote hoeveelheid gevonden kalkspaat, met het oog op zijne gemakkelijke splijting en zijne geringe mate van hardheid. Men dient te veronderstellen, dat het kalkspaat door de Maas uit België aangevoerd wordt. In de amphiboolgroep (s. g. 3—3.3) werden aangetroffen : hoornblende, straalsteen, een weinig smaragdiet en glaukophaan, voorts apatiet en tamelijk veel toermalijn ; gezamenlijk bedrag : 1.5 pCt. In de pyroxeengroep (s. g. 3.3—3.6) : augiet, epidoot, titaniet, sillimaniet en olivien ; het laatstgenoemd mineraal waarschijnlijk uit Rijnpruisen afkomstig ; gezamenlijk gewicht 1 pCt. In de granaatgroep (s. g. 3.6—4.2) : roode granaten, stauroliet, een weinig

distheen, korund en enkele octaëders van spinel; gezamenlijk bedrag 2.4 pCt. Het residu, ten bedrage van 0.15 pCt., bevat rutiel, zirkoon, titaanijzer en magnetiet.

Verreweg de meeste der genoemde mineralen wijzen op graniet, gneiss en glimmerlei. Enkele zijn bepaald typisch voor de twee laatstgenoemde gesteenten, bijv. cordiëriet, stauroliet, distheen, sillimaniet, granaat en glaukophaan. Maar, wanneer het zand der Nederlandsche duinen in hoofdzaak van archeïsche gesteenten afkomstig is, dan rijst de vraag, of het wellicht slechts voor een klein gedeelte door Rijn, Maas en Schelde aangevoerd is, en of zijn oorsprong niet elders gezocht moet worden. De schrijver stelt de hypothese, dat het in diluvialen tijd door ijs uit het Noorden zoude aangevoerd zijn. Hij heeft het voornemen, met het oog op dit vraagstuk, het zand der Nederlandsche rivieren te onderzoeken. Strikt genomen, zou zich daarbij een onderzoek van Noordzee-zanden uit noordelijker streken en ook uit het kanaal La Manche moeten aansluiten.

In afwachting eener dergelijke voortzetting, aarzelen de verslaggevers, niet der Natuurkundige Afdeeling de verhandeling des Heeren J. W. Retgers ten zeerste ter publikatie in hare Verhandelingen aan te bevelen.

Delft en *Leiden*,
Februari 1891.

Th. H. BEHRENS.
J. M. VAN BEMMELEN.

PROCES-VERBAAL

VAN DE

GEWONE VERGADERING DER AFDEELING NATUURKUNDE,

op Zaterdag 28 Maart 1891.

Tegenwoordig de Heeren: VAN DE SANDE BAKHUYZEN, Voorzitter, MULDER, LORENTZ, VAN BEMMELEN, VAN DIESEN, HOFFMANN, MARTIN, BEHRENS, BIERENS DE HAAN, MOLL, FRANCHIMONT, RAUWENHOFF, J. A. C. OUDEMANS, VAN RIEMSDIJK, VAN DORP, GUNNING, FORSTER, MAC GILLAVRY, BEIJERINCK, ZEEMAN, VAN 'T HOFF, STOKVIS, PLACE, KOSTER, KAPTEIJN, VAN DER WAALS, SCHOUTE, KORTEWEG, BRUTEL DE LA RIVIÈRE, BAKHUIS ROOSEBOOM en C. A. J. A. OUDEMANS, Secretaris.

— Het Proces-Verbaal der vorige zitting wordt gelezen en goedgekeurd.

— Wordt gelezen een Brief van Dankzegging voor ontvangen werken der Akademie van den Heer R. ETHERIDGE, Bibliothecaris van het Department of Mines, N. S. W. te Sydney, 30 Januari 1891.

Aangenomen voor bericht.

— Voorts Brieven ten geleide van Boekgeschenken van: 1°. het Ministerie van Justitie te 's Gravenhage, 14 Maart 1891; 2°. E. LIENENKLAUS, Secretaris van het naturwissenschaftliche Verein te Osnabrück, 2 Maart 1891; 3°. R. HILDEBRAND te Leipzig, 6 Maart 1891;

4°. T. C. Wendenhall, Superintendent van het U. S. Coast and geodetic Survey te Washington, 27 Februari 1891; waarop het gewone besluit valt van schriftelijke dankbetuiging en plaatsing in de Boekerij.

— Tot de ingekomen stukken behooren:

1°. brieven van de Heeren A. C. Oudemans jr., Hoek, Weber en Michaëlis, waarbij zij hunne afwezigheid verontschuldigen;

2°. brieven van de Heeren Gunning en van der Waals, waarin zij mededeelen, dat zij het hun in de vorige vergadering opgedragen mandaat aanvaarden;

3°. eene missive van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken (18 Maart 1891), de mededeeling behelzend, dat Z.Ex. den Heer Büttikofer, Conservator aan 's Rijks Museum van Natuurlijke Historie te Leiden, heeft opgedragen, 's Lands Regeering te vertegenwoordigen op het in de maand Mei 1891 te Buda-Pesth te houden 2e Ornithologisch Congres.

Op eene des betreffende vraag van den Voorzitter, deelt de Heer Martin mede, dat het hem bekend is, dat de Minister de door den Heer Büttikofer gestelde voorwaarde heeft aangenomen;

4°. een brief van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken ter begeleiding van 100 exemplaren van het Verslag over zijn wetenschappelijk onderzoek aan het botanisch Station te Buitenzorg, van den Heer Dr. F. A. F. C. Went;

5°. eene circulaire van den Heer Maurits Snelllen, de kennisgeving behelzend, dat H. M. de Koningin-Regentes hem benoemd heeft tot Hoofd-Directeur van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut;

6°. eene uitnoodiging ter bijwoning van het in Mei a. s. te Buda-Pesth te houden 2e Ornithologische Congres;

7°. eene uitnoodiging ter bijwoning van het 5e internationale Geologische Congres te Washington op 26 Augustus e. k.

— De Heeren Hoffmann, Behrens en Weber brengen verslag uit over de in hunne handen gestelde ministerieele stukken betrekkelijk de wijze, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen, door den chef der geologische opneming van Java, door tusschenkomst van het Departement van Koloniën aan den Directeur van het Geologische Museum te Leiden toegezonden, behoort plaats te hebben.

Dit verslag, met de conclusiën 12 pagina's folio groot, wordt door de vergadering goedgekeurd en zal in zijn geheel aan den Minister van Binnenl. Zaken worden toegezonden.

— De Heer Gunning leest, ook uit naam van den Heer Franchimont, het adres van gelukwensching voor, op verlangen der Afdeeling door hen ontworpen naar aanleiding van het weldra door den Heer J. S. Stas te vieren jubilé van zijn 50-jarig lidmaatschap der Belgische Academie. Het adres wordt bij acclamatie goedgekeurd.

— De Heer Behrens deelt eenige waarnemingen mede betreffende het verband tusschen de kristallisatie en de samenstelling der oplossingen, waarin de kristallen gevormd worden. Ammonium-magnesiumphosphaat vormt tweelingen van geheel afwijkenden habitus, wanneer de oplossing, waarin de kristallen gevormd worden, aluminium bevat. · Cupri-mercurirhodanide bevat geen kristalwater, wanneer het gelijktijdig met een groote overmaat van zink-mercurirhodanide tot kristallisatie komt. De mengkristallen vertoonen eene zeer eigenaardige violet-bruine tint, geheel afwijkend van de geelgroene kleur van het cupri-mercurirhodanide. — Zilverchromaat, gelijktijdig met veel zilversulfaat tot kristallisatie gebracht, vormt daarmede mengkristallen, die den rhombischen vorm van het sulfaat vertoonen, en dus het normale chromaat moeten bevatten, niettegenstaande de aanwezigheid eener aanzienlijke hoeveelheid vrij salpeterzuur.

— De Heer van der Waals spreekt over den druk bij coëxisteerende phasen van mengsels, en in het bijzonder bij

zoutoplossingen. Hij toont aan, dat door de hypothese der electrolytische dissociatie dan alleen de gang der drukvermindering kan verklaard worden, als bovendien nog een physische werking tusschen oplosmiddel en opgeloste stof wordt aangenomen: een werking, die uit zijn theorie voor een mengsel is af te leiden. Uit den gezamenlijken invloed dezer twee werkingen (dissociatie en physische werking) volgt, dat voor de drukvermindering per molekuul opgeloste stof steeds een maximumwaarde moet bestaan. Dat bovendien bij die oplossingen, waarbij de betrekking van 2 parameters (die der dissociatie C en die der physische werking α) aan de vergelijking

$$C(\alpha - 2) < 1$$

voldoet, ook een minimumwaarde aangetoond moet kunnen worden.

Met behulp van waarnemingen, gedaan door REGNAULT en TAMMAN, kan men bij de 1ste groep der oplossingen een maximumwaarde en bij de 2de groep die minimum- en maximumwaarde beide aantoonen. Bij de eerste groep, waarvan KOH als vertegenwoordiger mag beschouwd worden, begint de betrekkelijke drukvermindering per molekuul met de waarde 2 en stijgt tot zekere maximumwaarde, die bij een concentratiegraad van 0,15 ongeveer bereikt is.

Bij de 2de groep, waarvan SO_4H_2 als vertegenwoordiger mag gelden, begint die drukvermindering wel evenzeer met de waarde 2, maar daalt snel tot zekere minimumwaarde, die gewoonlijk bij zoo geringen graad van concentratie ligt, dat zelfs de geringste graad van concentratie, die bij de proeven van TAMMAN voorkomt, nog te groot is om ze aan te toonen. Bij andere oplossingen, tot de 2de groep behoorende, valt die graad van concentratie wèl binnen de grenzen der waarnemingen, en is de minimumwaarde dan ook uit de proeven aan te wijzen.

Voor de formule van den druk bij zekeren concentratiegraad x, geldt

$$p = p.\,(1 - x)\,\frac{e^{-\quad x^2}}{1 + y},$$

als p_1 de drukking van den verzadigden waterdamp voorstelt, en y berekend is uit de formule der dissociatie

$$y^2 = C(x - y).$$

Moet meer samengestelde dissociatie worden aangenomen dan splitsing van de zoutmolekulen in 2 ïonen, dan blijft in hoofdzaak de gang dezelfde, maar de waarde der betrekkelijke drukvermindering begint met 3.

— De Heer BEIJERINCK handelt over ophooping van atmospherische stikstof in culturen van Bacillus radicicola. De talrijke proeven, door den spreker genomen, hadden tot uitkomst, dat er bij die culturen ophooping van stikstof plaats heeft, en dat de atmospherische stikstof als zoodanig hoogst waarschijnlijk als de bron daarvan mag worden beschouwd. Toch moet het absolute bewijs, dat geene stikstofverbingen uit den atmospheer daarbij werkzaam zijn, nog geleverd worden.

— Voor de Bibliotheek der Akademie worden aangeboden, door den Heer VAN T' HOFF: »J. E. MARSH, Chemistry in space"; en door den Heer SCHOUTE, uit naam van den Heer KAPTEYN, diens: »Bestimmung von Parallaxen durch Register-Beobachtungen am Meridiankreise".

— De Vergadering wordt gesloten.

RAPPORT

OVER EEN

ONDERZOEK VAN VERSTEENINGEN, AFKOMSTIG VAN JAVA.

(Uitgebracht in de Vergadering van 28 Maart 1891).



De Commissie, in Uwe vergadering van 28 Februari benoemd om praeadvies uit te brengen over eene vraag der Regeering, de wijze betreffende, waarop, in het belang der wetenschap, een onderzoek van Javasche versteeningen behoort plaats te hebben, heeft de eer U het volgende te berichten.

In het najaar van 1889 zond de Chef der geologische opneming van Java, Dr. R. D. M. Verbeek, door tusschenkomst van het Departement van Koloniën, aan den Directeur van het Geologisch Museum te Leiden, Prof. K. Martin, eene uitgebreide verzameling van op Java bijeengebrachte versteeningen, met verzoek die voor hem te willen determineeren en, op grond dier determinatie, hem een aantal vragen te willen beantwoorden aangaande de geognostische gesteldheid van Java.

De Heer Verbeek wenschte namelijk van de antwoorden, hem door Prof. Martin te verstrekken, gebruik te maken bij het bewerken en het kleuren van de geologische kaart van Java, waarmede hij thans bezig is. Zonder die gegevens kan hij die kaart niet voltooien. De Heer Martin verklaarde zich tot medewerking bereid, maar schreef tevens aan den Minister van Koloniën (dato 18 December 1889

N°. 47), dat hij aan den wensch van den Heer VERBEEK, om hem spoedig met de verkregen uitkomsten in kennis te stellen, onmogelijk gevolg konde geven, omdat het ondoenlijk is — en naar de meening uwer Commissie volkomen terecht — zulk eene groote verzameling, *binnen betrekkelijk korten tijd* te determineeren, terwijl het zonder deze determinatie niet mogelijk is, het percentgehalte der nog levende soorten te berekenen en op grond daarvan den ouderdom der lagen te bepalen. De verzameling, door den Heer VERBEEK aan den Heer MARTIN toegezonden, bevat ruim 7500 voorwerpen, alle, zooals gemakkelijk te begrijpen is, oorspronkelijk alleen naar de vindplaatsen gerangschikt. Maar voor het determineeren moesten eerst al die fossielen zoölogisch worden gesorteerd: eene werkzaamheid, welke op zich zelve reeds zeer veel tijd vorderde. Elk voorwerp toch moest nauwkeurig worden onderzocht, om te weten bij welke groep en bij welk geslacht het behoorde. Kost zulk een voorloopige arbeid voor het bijeenzoeken van verwante geslachten en soorten van thans nog levende dieren reeds veel tijd, nog veel meer is dit het geval bij fossielen, waar men, in stede van met gave en volkomen voorwerpen, dikwijls slechts met brokstukken daarvan te doen heeft en de meeste voorwerpen bovendien hunne natuurlijke kleur verloren hebben.

Eerst wanneer zulk een voorloopige arbeid is afgeloopen, kan met het determineeren een aanvang worden gemaakt. Daarvoor moet de palaeontoloog elk voorwerp met verwante levende en uitgestorven soorten vergelijken, en hij kan dit slechts doen, als hij in staat is, de rijke verzameling te Leiden en die van andere Musea, vooral dat van Londen, te raadplegen; want zonder nauwkeurige vergelijking kan hij niet uitmaken of hij eene nog levende of wel eene reeds uitgestorvene, eene nieuwe of wel eene reeds bekende soort voor zich heeft. Daaruit volgt dan ook, dat hij onmogelijk, zonder zeer groot tijdverlies, de versteeningen van elke laag afzonderlijk kan determineeren, en dat de eenige wijze van bewerking, die aanbeveling verdient, die is, welke Prof. MARTIN in zijne missive van 12 Juni 1890 aan Zijne

Excell. den Minister van Koloniën voorgesteld en uitvoerig heeft toegelicht. De palaeontoloog zou anders hetzelfde werk bijna even zoo vele malen moeten doen als hij lagen te onderzoeken heeft. Wij willen dit nog met een enkel voorbeeld ophelderen. De door den Heer Verbeek bijeengebrachte verzameling van versteeningen bevat onder anderen een aantal Echinodermen. Door eerst alle tot die groep van dieren behoorende voorwerpen bijeen te zoeken, en onderling zoowel als met verwante levende en uitgestorven vormen te vergelijken, kunnen zij met nauwkeurigheid worden gedetermineerd. Maar, als men de Echinodermen voor elke laag afzonderlijk zou willen bewerken, zooals de Heer Verbeek meent dat mogelijk is, dan zou men hetzelfde genus en alle daartoe behoorende soorten evenvele malen moeten onderzoeken, als het aantal lagen, waarin het genus wordt aangetroffen, groot is. Niet alleen zou de bewerking daardoor nog tijdroovender worden, maar tevens de gegronde vrees ontstaan, dat men voorwerpen uit de eerst onderzochte laag of lagen als nieuwe soorten zou beschrijven, die later zouden blijken alleen mutatiën of variatiën voor een en dezelfde soort te zijn. En, wat voor de Echinodermen geldt, dat geldt in nog veel hooger mate voor de Gastropoden en voor de Lamellibranchiaten.

Indien de collectie Verbeek grootendeels uit voorwerpen bestond, waarvan reeds representanten in de collectie van 's Rijks Museum te Leiden voorhanden waren, dan zou het determineeren der Javasche verzameling in betrekkelijk korten tijd kunnen geschieden. De Chef der geologische opneming van Java schijnt dit te meenen, zooals blijkt uit zijn schrijven van 11 September 1890 n⁰. 22, gericht aan den Hoofdingenieur, Chef der Afdeeling Mijnwezen, maar dat dit geenszins het geval is, zal uit de volgende mededeeling duidelijk blijken.

Onder de ruim 7500 voorwerpen, die gedetermineerd moeten worden, bevinden zich 4600 Gastropoden, van welke de Heer Martin er reeds 587 onderzocht en in manuscript heeft gebracht — de Commissie heeft zich hiervan overtuigd. Deze 587 gedetermineerde voorwerpen vormen 52

verschillende soorten, waarvan slechts een klein gedeelte volkomen overeenstemt met reeds bekende recente of fossiele vormen; de meesten zijn nieuw of nieuwe mutatiën of variatiën, zoodat zij alle zonder uitzondering uitvoerig beschreven moeten worden.

Prof. MARTIN verklaart, dat de beschrijving van de genoemde 52 soorten en de vergelijking daarvan met levende en fossiele vormen uit het Leidsche Museum hem ruim 4 maanden onafgebroken werkzaamheid heeft gekost en een blik op het reeds gereed zijnde, lijvige manuscript, wettigt die verklaring zeker volkomen. Wanneer men nu bedenkt, dat die 52 soorten thans nog vergeleken moeten worden met gelijksoortige vormen in andere Musea en met tal van beschrijvingen van levende en uitgestorven Schelpdieren, en dat gezegde 52 soorten slechts een klein gedeelte der geheele verzameling uitmaken, dan blijkt daaruit voldoende, dat de wensch van den Heer VERBEEK om binnen betrekkelijk korten tijd met de uitkomsten der onderzoekingen van Prof. MARTIN in kennis te worden gesteld, niet voor vervulling vatbaar is.

Uwe Commissie heeft verder ernstig de vraag overwogen, of die collectie niet in korter tijd gedetermineerd zou kunnen worden. De Chef der geologische opneming van Java namelijk zegt het te bejammeren, dat de geheele collectie naar Leiden is gezonden, in plaats van haar onder 5 of 6 Palaeontologen te verdeelen, die gezamentlijk het onderzoek in veel korter tijd hadden kunnen doen, dan wanneer één enkel persoon daarmede belast wordt. Misschien zoude de Heer VERBEEK langs genoemden weg spoediger in het bezit van eenige gegevens gekomen zijn, dan wanneer de geheele collectie door een enkel persoon wordt gedetermineerd. Zeker is het echter, dat de zóó verkregen uitkomsten tot zeer groote verwarring aanleiding zouden geven. De verzameling van den Heer VERBEEK was niet zoölogisch, maar geologisch gerangschikt, zoodat men aan elken medewerker een aantal lagen (of: ongesorteerde voorwerpen van een aantal vindplaatsen) ter onderzoeking had moeten toezenden. Nieuwe soorten of mutatiën van soorten zou de bewerker der

éóne laag onder dezen, die der andere laag onder genen naam beschrijven; ook zou eene en dezelfde soort onder verschillende benamingen in de wetenschap worden ingevoerd. Bovendien zou elke medewerker de fossielen, die hij op zich genomen had te determineeren, moeten gaan vergelijken met gelijksoortige versteeningen, die reeds in het geologisch Museum te Leiden gedetermineerd aanwezig zijn. Liet hij dit na, dan zouden zijne uitkomsten niet te vertrouwen zijn. Eindelijk zou de rijke verzameling fossielen, welke nu de basis kan worden voor een standaard-werk over fossielen van Java, bij eene verdeeling over verschillende Palaeontologen versnipperd worden. Kortom, het zou in alle opzichten zeer te betreuren zijn geweest, wanneer die collectie over 5 of 6 Palaeontologen verdeeld ware geworden, vooral wanneer men bedenkt, dat in Nederland, behalve Prof. Martin, geen Palaeontologen zijn. Tegen eene nog twijfelachtige winst in tijd, staan zulke ontwijfelbaar groote nadeelen, dat eene zoodanige handelwijze uit een wetenschappelijk oogpunt niet te rechtvaardigen zou wezen. Hoe, volgens onze meening, aan den alleszins billijken wensch van den Heer Verbeek, om gelijdelijk met de uitkomsten der onderzoekingen van Prof. Martin in kennis te worden gesteld, kan worden voldaan, zullen wij zoo aanstonds nog nader bespreken, maar eerst willen wij nog op de wenschelijkheid wijzen, om voor het uittegeven werk niet de Nederlandsche taal, maar een der Europeesche hoofdtalen: Duitsch, Engelsch of Fransch te gebruiken.

Het bezigen der Hollandsche taal, door den Heer Verbeek gevraagd, hoe gewenscht ook in 't algemeen, komt ons in dit bijzondere geval noch doelmatig, noch wenschelijk voor. Niet doelmatig, omdat men toch voortdurend van vreemde kunsttermen gebruik zal moeten maken, aangezien er voor de vereischte termen nog geen Nederlandsche woorden bestaan; niet wenschelijk, omdat bedoelde Monographie een standaardwerk voor de Geologie van den Indischen Archipel belooft te zullen worden. Zulk een werk dient in eene taal geschreven te zijn, die het elk geoloog mogelijk zou maken daarmede zijn voordeel te doen, en dit zou zeker het geval

niet wezen, indien daarvoor de Hollandsche taal werd gebruikt. (Menzie verder wat de firma Brill daarover in haren brief van 30 December 1890 aan Prof. Martin heeft geschreven en de missive van den Heer Martin aan den Minister van Koloniën d.d. 12 Juni van het vorige jaar).

Evenmin als op het gebruik der Duitsche taal, meent de Commissie op de andere-voorstellen van den Heer Martin, de wijze van uitgeven betreffend, aanmerkingen te mogen maken. De vrees toch van den Heer Verbeek, uitgedrukt in zijn schrijven van 11 September 1890, dat de beschrijving der door hem verzamelde versteeningen niet een afzonderlijk werk zou vormen, is der Commissie gebleken ongegrond te zijn; evenzoo de veronderstelling van den Directeur van Onderwijs, Eeredienst en Nijverheid »dat de beschrijving der Javasche fossielen tusschen andere beschrijvingen verspreid zal voorkomen" (zie missive van 2 October 1890, gericht aan Zijne Excellentie den Gouverneur-Generaal van Nederlandsch Indië). Zooals door Prof. Martin reeds bij schrijven van 12 Juni 1890 aan Zijne Excellentie den Minister van Koloniën is uiteengezet, zal een *afzonderlijk* werk worden uitgegeven, waarvan de titel door hem werd overgelegd. Terwijl de Commissie tegen dien titel »Die Fossilien von Java" geen bezwaar heeft, drukt zij tevens den wensch uit, dat het uittegeven werk ook inderdaad zij eene monographische bewerking van de versteeningen van Java; zij spreekt de verwachting uit, dat, al moge de verzameling Verbeek den grondslag vormen voor die Monographie, daarin toch ook, voor de volledigheid, de beschrijving van andere voorwerpen zal worden opgenomen, die op hetzelfde onderwerp betrekking hebben.

Aan den wensch van den Heer Verbeek om geleidelijk met de uitkomsten van het onderzoek van den Heer Martin in kennis te worden gesteld, zou naar onze meening het best op de volgende wijze voldaan kunnen worden. Voor de ouderdomsbepalingen der geologische lagen is de kennis der fossiele Foraminiferen en Gastropoden van het meeste gewicht. De eerstgenoemde diergroep is door Prof. Martin

reeds geheel bewerkt; het manuscript met de daarbij behoorende plaat is kant en klaar. Het komt ons derhalve wenschelijk voor, dat dit gedeelte van het onderzoek zoo spoedig mogelijk worde uitgegeven. Met de bewerking der Gastropoden is de Heer MARTIN, zooals wij vermeld hebben, eveneens reeds begonnen. Nu kan, wel is waar, de daarbij behoorende tekst eerst worden afgedrukt, wanneer *alle* tot die groep behoorende voorwerpen nauwkeurig zijn gedetermineerd, maar toch zou men de platen, welke op die voorwerpen betrekking hebben, kunnen laten drukken, naar mate de bewerking vordert en de teekeningen gereed komen. Die platen kunnen in afleveringen van 5—10 stuks verschijnen, en wordt hierbij nu eene voorloopige verklaring gegeven, dan zal de Heer VERBEEK van zelf voortdurend op de hoogte van den stand der onderzoekingen blijven. Om te voorkomen dat de uitgaaf van het werk ook de minst mogelijke vertraging ondervinde, komt het der Commissie zeer gewenscht voor, dat jaarlijks ten minste 10 platen worden uitgegeven, want er zullen vermoedelijk wel ± 100 platen voor het geheele werk vereischt worden.

Deze begrooting van het aantal platen berust op eene berekening der voorwerpen, die geteekend moeten worden voor het reeds bewerkte gedeelte der Gastropoden. Daar eene dergelijke berekening vroeger niet mogelijk was, heeft de Heer MARTIN in zijne missive van 18 December 1889 het vereischte aantal platen te laag geraamd.

Indien nu Dr. VERBEEK, tegen den tijd dat de tekst der Gastropoden voor den druk gereed zal zijn gekomen, aan den Heer MARTIN al de hem bekende gegevens over de ligging der lagen verstrekt, vergezeld van eene nauwkeurige opgave van de vindplaatsen der fossielen, dan zal het mogelijk zijn, reeds na afloop van het onderzoek der Gastropoden, in groote en algemeene trekken den ouderdom der lagen te bepalen. Aangezien nu van den kant des Heeren VERBEEK tegen het verstrekken dier gegevens geenerlei bezwaar bestaat, zooals uit de gevoerde correspondentie blijkt, zoo vertrouwt de Commissie, dat op bovengenoemde wijze het

beoogde doel: de ouderdoms-bepaling zoo spoedig mogelijk vast te stellen, het best zal worden bereikt.

Uwe Commissie weet geen anderen weg aantewijzen. Zij heeft zich ook overtuigd, dat het niet mogelijk is, voorloopig meer over het karakter der Javasche lagen te zeggen, dan de Heer MARTIN in zijn voorloopig rapport van 8 September 1890 heeft vermeld. In dat rapport, waarvan Prof. MARTIN ons eene kopie heeft gegeven, zijn door hem de vragen van den Heer VERBEEK, voor zooverre dit slechts eenigszins mogelijk was, beantwoord, en Uwe Commissie is van oordeel, dat het rapport zelf wel is waar klein is, maar dat de inhoud daarvan stellig niet met den naam van „zeer sober" mag worden bestempeld.

Kort samengevat komt het ons het meest doelmatig voor:

1°. dat de bewerking der Javasche fossielen, welke van zeer groot belang voor de wetenschap belooft te zullen worden, aan den Heer MARTIN worde opgedragen en op de door hem voorgestelde wijze, namelijk in zoölogische volgorde, geschiede;

2°. dat de uitkomsten van het onderzoek worden nedergelegd in een afzonderlijk, in het Duitsch, Fransch of Engelsch geschreven werk — de keuze daarvan aan den bewerker over te laten — welk werk dan tevens als een afzonderlijke band en als onderdeel van het tijdschrift van het Geologisch Rijks-Museum kan verschijnen;

3°. dat de titel luide, zooals hij door den Heer MARTIN is voorgesteld, maar dan ook zooveel mogelijk gezorgd worde, dat de inhoud van het werk aan dien titel »Die Fossilien von Java" beantwoorde;

4°. dat het gereedliggend manuscript over Foraminiferenhoudende gesteenten onmiddellijk ter perse worde gelegd;

5°. dat op de Foraminiferen het eerst de Gastropoden mogen volgen, en dat de bij die groep van fossielen behoorende platen in bundels van 5 tot 10 stuks, toegelicht door eene voorloopige verklaring, uitgegeven en de tekst eerst worde afgedrukt, als het manuscript over de Gastropoden geheel gereed is gekomen. De uitgave der platen kan gelijken tred houden met de bewerking van het materiaal;

6°. dat de overige diergroepen op dezelfde wijze worden uitgegeven. Om vertraging bij het drukken te vermijden, kan elke groep afzonderlijk worden gepagineerd;

7°. dat jaarlijks ten minste 10 platen worden uitgegeven, tenzij door onvoorziene omstandigheden de bewerking der voorwerpen vertraging mocht ondervinden;

8°. dat de verdere bijzonderheden, de uitgave betreffend, aan den Heer MARTIN worden overgelaten, in het vertrouwen, dat Prof. MARTIN zooveel van zijn beschikbaren tijd aan de bewerking der door den Heer VERBEEK bijeengebrachte verzameling versteeningen zal willen wijden, als hem mogelijk zal blijken.

De Commissie,

C. K. HOFFMANN.
TH. H. BEHRENS.
MAX WEBER.

DE GROOTTE DER DRUKKING

BIJ

COËXISTEERENDE PHASEN VAN MENGSELS IN HET BIJZONDER BIJ ZOUTOPLOSSINGEN.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.



In mijne »théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes", opgenomen in de *Archives Néerlandaises*, T. XXIV, heb ik in de vergelijkingen *A* van § 5 de differentiaalvergelijking gegeven, waardoor wordt aangegeven hoe de drukking afhangt van de samenstelling van coëxisteerende phasen van mengsels *). Voor zeer verdunde oplossingen verkregen deze vergelijkingen een zeer eenvoudige gedaante, en voor het geval dat een der stoffen niet in de dampphase voorkomt, vereenvoudigde de eerste dezer vergelijkingen zich zelfs tot $\frac{dp}{dx_1} = -p$, terwijl de tweede haar beteekenis verloor. De vergelijking

$$\frac{dp}{dx_1} = -p \quad \text{of} \quad -\frac{\Delta p}{p \Delta x} = 1$$

stelt, zooals bekend is, in staat het molekulairgewicht te bepalen van opgeloste stoffen. De overige methoden daartoe

---

*) *Zeitschrift für physikalische Chemie.* V 2. S. 143.

in den laatsten tijd aangegeven, staan met deze vergelijkingen in zoo onmiddellijk verband, dat zij tegelijk met deze vergelijking staan of vallen. Nu leert de ondervinding echter, dat in vele gevallen slechts bij zeer hoogen graad van verdunning uitkomsten verkregen worden, die de stelling bevestigen, dat de drukvermindering, door opgeloste stoffen teweeggebracht, gedeeld door het produkt van den oorspronkelijken druk en het aantal opgeloste molekulen in een hoeveelheid, die voor het geheele mengsel één molekuul bedraagt, juist gelijk aan de eenheid zijn zou. Daarenboven komen, speciaal voor zoutoplossingen en mengsels van zuren in water, zelfs in hoogen graad van verdunning, nog zooveel afwijkingen voor, dat zij geleid hebben tot de hypothese van Arrhenius, die ik de hypothese der Electrolytische dissociatie zal noemen.

Een nader onderzoek omtrent den invloed der samenstelling op de drukking boven een mengsel moet dus alleen reeds om bovengenoemde toepassing van gewicht geacht worden.

Nu heb ik juist in mijn theorie mij tot doel gesteld om bij mengels van twee stoffen in alle gevallen, hetzij bij verdunning, hetzij bij hoogen graad van concentratie, het evenwicht en dus ook de drukking te kunnnen aangeven, en daarbij moeten de gevallen, waarin twee of drie phasen naast elkander bestaan kunnen, als van zelf op den voorgrond treden. Geometrisch als eenmaal de constanten der vergelijking

$$\psi = f\,(x,\ V,\ T)$$

gegeven zijn, bleek mij dit eenvoudig te zijn. Maar zelfs als de constanten bekend zijn, is de berekening in vele gevallen een ingewikkelde. Een eenvoudige formule bijv. voor den druk bij coëxisteerende phasen liet zich niet aangeven. Neemt men in aanmerking de uitgebreide reeks van gevallen waarvoor die formule de oplossing zou moeten geven, ik noem maar: »oplossing van zouten, oplossing van vluchtige stoffen, wet van Henry enz." dan liet zich dat ook niet verwachten.

Toch heb ik beproefd den vorm te vinden voor een al-

gemeene benaderings-formule, die in al de bovengenoemde gevallen dien druk leert kennen, en in elk geval, naar ik meen, licht kan geven over de afwijkingen bij zoutoplossingen.

§ 1. Kunnen twee phasen van een enkelvoudige stof coëxisteeren, dan moet, zooals door Gibbs is aangetoond, behalve T en p, nog een derde grootheid voor beide phasen gelijk zijn, namelijk de waarde van

$$\varepsilon - T\eta + pV$$

welke per eenheid van gewicht door hem met den naam van thermodynamische potentiaal is bestempeld, en door μ wordt aangeduid. Voor een mengel van twee stoffen moeten, behalve T en p, nog twee grootheden aanelkander gelijk zijn, door Gibbs de thermodynamische potentialen der bestanddeelen genoemd. In de theorie van een mengsel, zooals die door mij is ontwikkeld, komt daarvoor in de plaats, dat behalve T en p, nog twee functiën van V, T en x aan elkander gelijk moeten zijn, n. l. $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT}$ en $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} + pV$, terwijl p gelijk is aan $-\left(\frac{d\psi}{dV}\right)_{xT}$. Daar $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} - V\left(\frac{d\psi}{dV}\right)_{XT}$ de waarde is van de thermodynamische potentiaal voor een molekuul der eerste stof en $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT}$ het verschil dezer potentialen voor de twee stoffen, is er dus geen wezenlijk onderscheid tusschen de gevolgen uit de behandeling van het ψ-vlak afgeleid en die uit de wijze, waarop Gibbs het evenwicht behandelt. Alleen werd o. a. het voordeel verkregen, dat de voorwaarden voor het evenwicht, die door Gibbs steeds gedacht worden als uitgedrukt in functiën van p en x en T, nu vanzelf uitgedrukt worden in functiën van V, x en T; terwijl ze uit te drukken in p, x en T onuitvoerbaar moet

geacht worden, wegens den aard der afhankelijkheid van p en V.

Nemen wij voor de waarde van ψ per molekulaire hoeveelheid *):

$$\psi = -MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} + MRT\{(1-x)\log(1-x) + x\log x\}$$

dan is

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} = MRT\frac{\frac{d\,b_x}{d\,x}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V} + MRT\log\frac{x}{1-x}$$

en $\psi - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{VT} - V\left(\frac{d\,\psi}{d\,V}\right)_{XT}$ wordt gelijk gevonden aan:

$$pV - MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} - x\left\{MRT\frac{\frac{db_x}{dx}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}\right\} + MRT\log(1-x)$$

Dit stelt dus ook voor de waarde der molekulaire potentiaal voor de eerste stof.

Daar $\left(\frac{d\,\psi}{dx}\right)_{VT} = M_2\,\mu_2 - M_1\,\mu_1$ vinden wij voor de waarde der thermodynamische potentiaal der tweede stof.

$$M_2\,\mu_2 = M_1\,\mu_1 + \left(\frac{d\,\psi}{dx}\right)_{VT}$$

of

$$pV - MRT\log(V-b_x) - \frac{a_x}{V} + (1-x)\left\{MRT\frac{\frac{db_x}{d\,x}}{V-b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}\right\} + MRT\log x.$$

§ 2. De grootheid $pV - MRT\log(V - b_x) - \frac{a_x}{V}$ zou de waarde der thermodynamische potentiaal uitdrukken voor

---

*) Men zie *Arch. Neerl.* T. XXIV of *Zeitschrift für physikalische chemie* V. 2.

een enkelvoudige stof, die dezelfde waarde voor a en b heeft, als a_x en b_x voor het mengsel, en denkt men V geëlimineerd met behulp der vergelijking:

$$p = \frac{MRT}{V - b_x} - \frac{a_x}{V^2}$$

dan is de loop dezer waarde aangegeven door de grafische constructie in fig. 1 *) n.l. voor bepaalde waarde van x en T.

Deze figuur zal dus bij andere waarde van x en T gemodificeerd worden. Zoodra $MRT > \frac{8}{27} \frac{\frac{a_x}{b_x}}{(1 + a_x)(1 - b}$ heeft de kromme een continue kromming.

Denkt men drie assen, een p-as, een x-as en een loodrecht daarop, en construeert men voor elke waarde van x tusschen $x = 0$ en $x = 1$ dusdanige krommen, dan verkrijgt men een oppervlak. De waarde der derde ordinaat of die van

$$pV - MRT \log (V - b_x) - \frac{a_x}{V}$$

zal ik door de letter μ_x aanduiden.

Voor $x = 0$ valt zij dus samen met $M_1 \mu_1$ en voor $x = 1$ met $M_2 \mu_2$. In die gevallen is μ_x dus de waarde der molekulaire potentiaal. In de andere gevallen is dit niet zoo.

Een doorsnede van dit oppervlak loodrecht op de p-as, zal in het algemeen uit drie geïsoleerde takken bestaan, waarvan de bovenste den labielen toestand aangeeft, en de twee anderen den gastoestand en den vloeistoftoestand aangeven.

De grootheid $MRT \frac{\frac{db_x}{dx}}{V - b_x} - \frac{\frac{da_x}{dx}}{V}$ is het differentiaal-

*) Men zie *Arch. Neerl.* T. XXIV of *Zeitschrift für physikalische chemie* V. 2.

quotient naar x (V en T standvastig) van het eerste gedeelte van ψ, n.l. van $-MRT\log(V-b_x)-\frac{a_x}{V}$. Maar zij kan ook beschouwd worden als het differentiaalquotient naar x (p en T standvastig) van μ_x en kan dus gebracht worden onder den vorm $\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$.

De molekulaire potentiaal voor de eerste stof kan dus voorgesteld worden door

$$MRT\log(1-x)+\mu_x-x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$$

en de eisch, dat in de coëxisteerende phasen die potentiaal gelijke waarde heeft, door de vergelijking:

$$MRT\log(1-x_1)+\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}=$$

$$=MRT\log(1-x_2)+\mu_{x_2}-x_2\left(\frac{d\mu_{x_2}}{dx_2}\right)_{pT} \quad \ldots\ldots (1)$$

§ 3. Beperken wij ons nu tot die gevallen, waarin de tweede phase van zoodanigen aard is, dat daarop de wetten der volkomen gassen kunnen worden toegepast, dan is

$$\mu_{x_2}=MRT\log\frac{p}{MRT}+MRT,\text{ en }\left(\frac{d\mu_{x_2}}{dx_2}\right)_{pT}=0.$$

De vergelijking (1) kan dan geschreven worden:

$$MRT+MRT\log\frac{p(1-x_2)}{MRT}=MRT\log(1-x_1)+\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}$$

of

$$p(1-x_2)=MRT(1-x_1)\,e^{\frac{\mu_{x_1}-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1}.$$

Uit deze vergelijking kunnen wij x_2 verwijderen door gebruik te maken van de omstandigheid, dat

$$\left(\frac{d\,\psi}{d\,x_1}\right)_{V_1T} = \left(\frac{d\,\psi}{d\,x_2}\right)_{V_2T} \quad \text{moet zijn}$$

of

$$\frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1}{1-x_1}\, e^{\frac{\left(\frac{d\mu x_1}{d\,x_1}\right)_{pT}}{MRT}}$$

of

$$\frac{1}{1-x_2} = 1 + \frac{x_1}{1-x_1}\, e^{\frac{\left(\frac{d\mu x_1}{d\,x_1}\right)_{pT}}{MRT}}.$$

Wij vinden dan voor p de volgende waarde

$$p = MRT(1-x_1)e^{\frac{\mu x_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1} + MRTx_1 e^{\frac{\mu x_1 + (1-x_1)\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1} \quad ..(2)$$

De waarde van den druk, uitgedrukt, zooals zij is, in x_1 (de samenstelling der vloeistofphase) bestaat dus uit 2 deelen, waarvan het tweede gedeelte natuurlijk onmiddellijk uit het eerste kan afgeleid worden door x_1 in $1-x_1$ en omgekeerd te veranderen.

Wij kunnen het eerste gedeelte n.l. $MRT(1-x_1)e^{\frac{\mu x_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}-1}$ beschouwen als teweeggebracht door het aantal molekulen der eerste stof en het tweede gedeelte n.l. $MRTx_1\, e^{\frac{\mu x_1 + (1-x)\frac{d\mu x_1}{dx_1}}{MRT}-1}$ door de molekulen der tweede stof. In zoover kunnen wij den totalen druk als de som van partieel-spanningen beschouwen. Natuurlijk, dat hier het woord partieelspanning anders gebruikt wordt dan men dit gewend is, als men den druk beschouwt als de som van twee spanningen, teweeggebracht door de bestanddeelen der gasphase.

Neemt men $x_1 = 0$, dan wordt $p_1 = MRT\, e^{\frac{\mu_1}{MRT}}$, waarin

p_1 den druk van den verzadigden damp der eerste stof voorstelt, en μ_1 de potentiaal van de eerste vloeistof, als zij staat onder dezen druk. Evenzoo vindt men voor $x_1 = 1$

$$p_2 = MRT\, e^{\frac{\mu_2}{MRT}-1} .$$

Met behulp van p_1 en p_2 wordt de formule van den druk:

$$p = p_1(1-x_1)e^{\frac{\mu_{x_1}-\mu_1-x_1\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}} + p_2 x_1 e^{\frac{\mu_{x_1}-\mu_2+(1-x_1)\left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}} .$$

De druk, door de $1-x_1$ molekulen der eerste stof in het mengsel voorhanden uitgeoefend, is dus evenredig aan het aantal, maar de drukking per molekuul is niet volkomen dezelfde als wanneer deze $1-x_1$ molekulen zich naast x_1 molekulen derzelfde stof bevinden zouden. In dat geval zouden zij een drukking gelijk aan $p_1(1-x_1)$ uitoefenen. Nu wordt de drukking verkregen door $p_1(1-x_1)$ nog met zekeren factor te vermenigvuldigen — een factor die dus rekenschap geeft van de *wijziging* in den druk teweeggebracht door de aanwezigheid der vreemde molekulen. En hetzelfde geldt voor den partieeldruk der x molekulen der 2de stof. De waarde van dien factor zal dus moeten afhangen van de grootheden die ik door a_{12}, a_1, b_1 enz. heb aangeduid.

§ 4, De factor, die de grootte der wijziging aangeeft, heeft een belangrijke eigenschap. Het is n.l. gemakkelijk in te zien, dat als x_1 van de eerste orde van kleinheid is, het verschil tusschen de waarde van dien factor en de eenheid van de tweede orde van kleinheid is. Evenzoo als $1-x_1$ van de eerste orde van kleinheid is, is de wijziging in p_2 van de tweede orde van kleinheid. Hebben wij een functie van x, n.l. $f(x)$, en denken wij die, en hare differentiaalquotienten voor een bepaalde waarde van x bekend, dan is

$$f(0) = f(x) - x f'(x) + \frac{x^2}{12} f''(x) \text{ enz.}$$

Is die functie μ_x , dan geeft dat

$$\mu_1 = \mu_x - x\frac{d\mu_x}{d\,x} + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{dx^2} -$$

of

$$\mu_x - \mu_1 - x\frac{d\mu_x}{d\,x} = -\frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{d\,x^2} +$$

Daar μ_x niet alleen van x maar ook van p afhangt is

$$\mu_1 = \mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{d\,x}\right)_p - (p - p_1)\left(\frac{d\mu_x}{dp}\right)_x + \frac{x^2}{1.2}\frac{d^2\mu_x}{dx^2} + \text{enz.}$$

De afhankelijkheid van μ van p is in den vloeistoftoestand echter zoo gering, dat met hoogen graad van benadering mag gesteld worden

$$\mu_1 = \mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$$

Zeker mag dit geschieden, als de druk zoo weinig uiteenloopt, als bij zoutoplossingen het geval is. Daar bij standvastige waarde van x, $d\mu_x = V dp$ is, zal in al die gevallen, waarin men gewoonlijk het vloeistofvolume verwaarloost tegen dat van den damp, mogen gesteld worden:

$$\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p = -\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p +$$

Evenzoo mag gesteld worden:

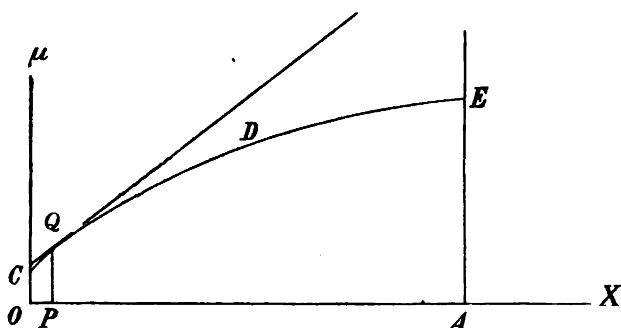
$$\mu_x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\,\mu_x}{d\,x}\right)_p = -\frac{(1-x)^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$$

of

$$e^{\frac{\mu x_1 - \mu_1 - x_1\left(\frac{d\mu x_1}{dx_1}\right)_{pT}}{MRT}} = e^{-\frac{\frac{x_1^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu x_1}{dx_1^2}\right)_{pT}}{MRT}}$$

Uit deze eigenschap volgt dat de spanning door een stof uitgeoefend, waarin een zeer kleine hoeveelheid van een andere is opgelost, per molekuul als limietwaarde even groot is als vóór de oplossing. De drukvermindering die dan plaats heeft is alleen toe te schrijven daaraan, dat er minder molekulen aanwezig zijn. De druk door het bijmengsel uitgeoefend mag dan evenwel niet gelijk aan $p_2 x_1$ gesteld worden, want de factor van $p_2 x_1$ behoeft dan niet slechts weinig van de eenheid te verschillen.

De volgende figuur kan dit verduidelijken



Zij CDE de kromme, die het beloop van μ_x aangeeft en laat OP een kleine waarde van x voorstellen, dan is $PQ = \mu_x$. Een raaklijn in Q aan de kromme getrokken, snijdt van de vertikale lijn, door O gaande, een stuk af grooter dan OC. Dit verschil is gelijk aan $\mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p - \mu_1$. Maar diezelfde raaklijn verlengd zou de vertikale lijn boven het punt A $(OA = 1)$ snijden in een punt, dat zeer ver boven E kan liggen en de afstand van het snijpunt tot het punt E stelt de waarde voor van $\mu_x + (1 - x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p - \mu_2$. Alleen in het geval dat μ_x een lineaire functie van x zou zijn zouden de beide verschillen $= 0$ zijn en dus de factor, zoowel die van p_1 als die van p_2 gelijk aan de eenheid. Past men dit toe voor gevallen als waarvoor de wet van Henry bij benadering geldt, bijv. als SO_2 in water wordt opgelost, dan wil dit zeggen: Is een zeer kleine hoeveelheid SO_2 in water opgelost, bijv. x molekulen dan is de uit-

wendige druk van het water met hoogen graad van benadering gelijk aan $p_1(1-x_1)$. Maar de uitwendige druk van de opgenomen hoeveelheid SO_2 is niet bij benadering gelijk aan $p_2 x_1$. Alleen in die gevallen waarin p_2 gelijk nul mag beschouwd worden, blijft de totale uitwendige druk beperkt tot p_1 $(1-x_1)$. Dit is dus het geval bij zoutoplossingen en enkele zuren als bijv. $SO_4\,H_2$ en dan nog maar bij lage T. Zoodra echter x_1 niet zeer klein is zal het van de grootte van $e^{-\frac{x_1^2}{1.2}\left(\frac{d^2\mu_x}{dx_1^2}\right)_p \frac{1}{MRT}}$ dus van de waarde van $\left(\frac{d^2\mu_x}{dx_1^2}\right)_p$ afhangen in hoever $p_1(1-x_1)$ als benadering mag aangenomen worden.

Ik doe hier, tot voorkoming van misverstand, bij opmerken, dat ik in het bovenstaande alleen den *uitwendigen* druk op het oog heb. Tot dezen dragen zoutmolekulen in een oplossing, waarboven zich waterdamp bevindt, niet bij, ten minste als $p_2 = 0$ is. Wel leveren zij, evengoed als de watermolekulen, hun bijdragen tot het weerstandbieden aan den molekulairdruk.

A. Zoutoplossingen.

§ 5. Alvorens nader onderzoek te doen naar den vorm, die de theorie voor de exponent van e als hoogsten grond van benadering aanwijst, zullen wij zien in hoever het experiment de opgegeven waarde van p bevestigt. Daarvoor kiezen wij het eenvoudigste geval n.l. dat waarin $p_2 = 0$ is. Dan is

$$p = p_1(1-x_1)\, e^{-\alpha x_1^2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (4)$$

dus een benaderde waarde voor den druk boven een zoutoplossing. Hierbij is α gelijk gesteld aan $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mu_{x_1}}{dx_1^2}\right)_p \frac{1}{MRT}$. De laatste uitdrukking is wel geen standvastige maar ook

met x veranderlijk; zoolang wij echter geen hoogere mach-ten van x_1 dan de tweede macht behouden, kunnen w voor $\left(\frac{d^2\mu_{x_1}}{dx_1^2}\right)_p$ de waarde nemen die deze uitdrukking i het punt $x=0$ heeft en ze dus standvastig beschouw Ofschoon de fig. 1 zoo is geteekend alsof $\frac{d^2\mu_x}{dx^2}$ negatief is zij in alle gevallen waarin ik ze heb trachten te bepal positief gevonden.

Uit (4) volgt *):

$$-\frac{dp}{p_1 dx}=e^{-\alpha x^2}\left\{1+2\alpha x(1-x)\right\} \ldots\ldots$$

en

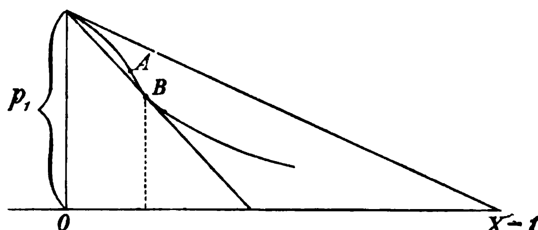
$$-\frac{1}{p_1}\frac{d^2p}{dx^2}=2\alpha e^{-\alpha x^2}\left\{1-2x-2\alpha x^2(1-x)\right\}\ldots$$

Uit (5) blijkt, dat de druk altijd afneemt en $-\frac{1}{p_1}$ voor x gelijk 0 een waarde gelijk aan de eenheid hee en dat bij $x=1$ de waarde dezer uitdrukking gelijk a $e^{-\alpha}$ is, waarbij echter moet opgemerkt worden, dat het o waarschijnlijk zijn zou, dat voor zoo hoogen graad va concentratie de vorm (4) nog als voldoende benadering zo gelden. Uit (6) blijkt, dat voor kleine waarden van x de lijn $p=f(x)$ beneden de raaklijn ligt, maar dat vanaf zekere waarde van x het omgekeerde plaats vindt. Het buigpunt vinden wij uit $0=1-2x-2\alpha x^2(1-x)$.

Zoolang α positief is, heeft deze vergelijking een wortel $<\frac{1}{2}$. Die wortel ligt bij $x=\frac{1}{3}$ voor $\alpha=2^1/_4$, bij $x=\frac{1}{4}$ voor $\alpha=5^1/_3$, bij $x=\frac{1}{10}$ voor $\alpha=45$ ongeveer. Naarmate α grooter is, verandert dus de kromme $p=f(x)$ spoe-

*) Daar voortaan slechts de samenstelling der vloeistof ter sprake zal komen, is er geen reden meer voor x het teeken x_1 te gebruiken.

diger van concaaf in convex. De loop der kromme is voorgesteld in Fig. 3.



Zij begint rakende aan de rechte lijn, die het boven uiteinde van p_1 vereenigt met het punt $x = 1$, welke rechte lijn zelve de druklijn zijn zou als $\alpha = 0$ is.

Beschouwt men niet den druk zelf, maar de drukvermindering, dan zou de bekende regel voor de drukverlaging voeren tot $\frac{p_1 - p}{p_1 x} = 1$.

Uit de figuur ziet men dat deze uitdrukking voor uiterste verdunning wel aan de eenheid gelijk is, maar al spoedig grooter dan de eenheid is, en tot zekere maximumwaarde aangroeit. Deze maximumwaarde verkrijgt men als men uit het boveneinde van p_1 een raaklijn aan de kromme trekt. Dit voert tot een waarde van x, die natuurlijk grooter is dan die, waarbij het buigpunt ligt. Het punt A der figuur geeft de plaats van het buigpunt aan en B het punt waarvoor $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ een maximumwaarde heeft. Vereenigt men het boveneinde van p_1 met een willekeurig punt der kromme en noemt men den hoek φ, die zulk een koorde maakt met een lijn evenwijdig aan de X-as, dan is tg. $\varphi = \frac{p_1 - p}{p_1 x}$. Wordt die koorde een raaklijn dan, is $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ ook gelijk aan $-\frac{dp}{p_1 dx}$ zooals zij in het raakpunt is.

§ 6. Om het bestaan van een maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$

aan te toonen, heb ik geraadpleegd de uitkomsten door REGNAULT verkregen bij oplossingen van $SO_4 H_2$ in water, medegedeeld in de physikalisch-chemische Tabellen van LANDOLT en BÖRNSTEIN, pag, 52.

$x =$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
bij 35°	3.002	3.58	3.74	3.967	3.94	3.873	3.47	2.86	1.99
» 30°	3.077	3.56	3.78	4.03	3.966	3.887	3.48	2.87	1.99
» 20°	2.986	3.49	3.76	4.08	4.00	3.926	3.43	2.85	1.98
» 5°	2.84	3.83	3.67	4.10	4.02	4.005	3.47	2.82	1.97

De gang der waarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ is zoo regelmatig, dat wij recht hebben het tweede cijfer der benedenste horizontale rei aan een foutieve opgave toe te schrijven.

Het maximum moet dus liggen bij een waarde van x, die bij elk der opgegeven temperaturen niet veel van $x = {}^1/_8$ kan verschillen.

Nu ligt de maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$, als wij ten minste $p = p_1 (1 - x) e^{-\alpha x^2}$ mogen stellen, bij een waarde van x, die aan de volgende vergelijking moet voldoen

$$e^{x^2} = 1 + 2 \alpha x^2 (1 - x).$$

Kennen wij x, dan is α uit deze vergelijking te bepalen — en dit zou voor $x = {}^1/_8$ voeren tot een waarde van α, die dicht bij 60 zou liggen. Vóór ik dit kenmerk ter bepaling van α had toegepast, had ik door herhaalde beproeving de waarnemingen vrij wel sluitend gevonden met $\alpha = 37$ bij 35° en daar α omgekeerd met T is, met een iets grootere waarde bij lagere temperaturen. Dit verschil in de waarde van α, n.l. 37 of 60, was een eerste vingerwijzing, dat ter bepaling van p als functie van x nog iets

anders in rekening moest worden gebracht, dan hierboven gedaan is *).

Noemt men $\frac{p_1 - p}{p_1 x} = K$, dan levert elke waarneming een middel om α te bepalen, en wel is dan $e^{\alpha x^2} = \frac{1-x}{1 - Kx}$.

Op deze wijze vindt men voor α bij 35° uit de verschillende getallen der horizontale rei

$\alpha = 40$ 39 36.5 35.3 34.2 31.6 28.7 24 20

Al is het waar dat de laatste getallen, waar de druk tot zoo gering bedrag is gedaald, bijv. 0.28 mM. niet te vertrouwen zijn, dan valt een voortdurende afname van α niet te miskennen. Maar dit alleen zou niet behoeven te leiden tot het aannemen van een dissociatie van $SO_4 H_2$.

De theorie, zooals straks zal blijken, doet de afname van α met toenemende concentratie verwachten. Maar een dwingende reden om $p = p_1 (1-x) e^{-\alpha x^2}$ onvoldoende te verklaren zal geleverd worden als bij uiterst geringen graad van concentratie, de waarde van K nog veel van de eenheid verschilt. Voor kleine waarde van x, n.l. zulke waarvoor in plaats van $e^{-\alpha x^2}$ de waarde $1-\alpha x^2$ kan gesteld worden, is

$$K = 1 + \alpha x.$$

Hoe groot ook α moge zijn, men kan dus x zoo klein nemen, dat K niet merkbaar boven 1 ligt. Bij de medegedeelde waarnemingen van Regnault was de kleinste waarde $x = \frac{1}{18}$ niet klein genoeg om te beslissen. Daarom moet het gelukkig geacht worden, dat ook vertrouwbare waarnemingen gedaan zijn bij kleinere waarden van x. Daarvoor was het echter noodig tot hoogere temperaturen de toe-

*) Ik had natuurlijk wel direkt nog bovendien een dissociatietheorie op den voorgrond kunnen stellen; maar ik wilde beproeven in hoever de verschijnselen van den druk alleen mij tot zulk een aanname zouden dwingen.

vlucht te nemen. Bij 100^0 is door TAMMAN een uitgebreide reeks van waarnemingen gedaan, waarbij ook waarnemingen omtrent $SO_4 H_2$ voorkomen; en waarbij x daalt tot 0,00892. Zij zijn o. a. opgenomen in OSTWALD, *Lehrbuch der allgemeinen Chemie*, Band I, Seite 733. Zelfs bij deze kleine waarde van x vindt TAMMAN $p_1 - p = 12.9$ mM., wat tot een waarde van $K = 1.89$ voert. Bij andere stoffen vindt men bij dezelfde waarde van x nog grootere verhouding, en alles wijst er op, dat de limietwaarde vau K voor $x = 0$ gelijk gesteld moet worden aan 2, en men dus bij oplossing van zouten en zuren en bases in water in het algemeen dissociatie zal moeten aannemen. Wel blijft de gang der waarde van K een dusdanige, dat zij door dissociatie alleen niet te verklaren is, iets wat trouwens algemeen erkend wordt. In het volgende hoop ik aan te toonen, dat de gang in zijn hoofdtrekken begrijpelijk wordt, als men naast de dissociatie (de chemische reden der afwijking van de eenheid) ook in aanmerking neemt dat er een physische reden voor de afwijking is, die door den factor α wordt aangeduid. Daarvoor is het echter noodig te zoeken welke verandering het ψ-vlak, dat aan mijn onderzoek ten grondslag ligt, ondergaat als de tweede stof zich dissocieërt.

§ 7. Betrof het alleen zouten, die in water opgelost afwijkingen voor K van 1 vertoonden, dan zou het voor de hand liggen de dissociatie te zoeken in splitsing in zuur en basis.

Maar nu ook $SO_4 H_2$, KOH, enz. dezelfde soort afwijkingen vertoonen, kan, ten minste bij die stoffen, van geen andere dissociatie sprake zijn, dan van de electrolytische. Wij zullen dus $SO_4 H_2$ gesplitst moeten denken ten minste partieel in de ïonen SO_4 en H_2, terwijl wij tegelijk ten minste van een der ïonen moeten aannemen, dat die niet in de dampphase kan overgaan; dus dat daarvoor de hiervoor genoemde grootheid $p_2 = 0$ is, zooals dat voor $SO_4 H_2$ in zijn geheel aangenomen werd. Die eigenschap behoeft niet voor beide ïonen afzonderlijk te bestaan. Ten minste als wij, zooals de theorie der electrolyse doet, de ïonen als

dragers van electriciteit, mogen beschouwen — en dat ook mogen doen niet alleen als er electrische inductie is, maar ook in een neutraal veld. In dat geval zal zoodra H_2, de drager der positieve electriciteit, slechts voor een gering gedeelte in de gasphase is overgegaan, zooals H_2 in onelectrischen toestand noodwendig schier geheel doen zou, door het enorme potentiaalverschil dat dan tusschen vloeistof en damp bestaan zou, dit bestanddeel in de vloeistof worden teruggetrokken. Wij nemen met de theorie der electrolyse in het volgende aan dat dit potentiaalverschil zoo groot is, dat wij de hoeveelheid, die in de dampphase overgaat, mogen verwaarloozen.

§ 8. Brengen wij bij elkander $1-x$ molekulen water en x molekulen SO_4H_2, dan zal na menging voorhanden zijn $1-x$ mol. water, $x-y$ mol. zuur, y mol. SO_4 en y mol. H_2 *). Voor een homogene phase van dit mengsel is $p=\frac{MRT(1+y)}{V-b}-\frac{a}{V^2}$, waarin a en b nu functiën van x en y zijn. Zij bijv. bij benadering

$$b=b_1(1-x)+b_2(x-y)+b_3y+b_4y,$$

zoodat dan alleen $\frac{db}{dy}=0$ is als wij mogen aannemen $b_3+b_4=b_2$ — ingeval dus het molekulairvolume van de 2 ïonen gelijk is aan dat vóór de splitsing.

Ook a is een functie van x en y, waarbij het mogelijk is dat $\frac{da}{dy}$, zoo niet rigoreus gelijk nul, toch als klein beschouwd mag worden. Maar voorloopig ten minste zullen wij deze onderstelling niet invoeren. De functie ψ is nu gelijk aan

$$-MRT(1+y)\log(V-b)-\frac{a}{V}+\varphi(xy)$$

en $\varphi(x,y)$ kan op dezelfde wijze gevonden worden als in

*) Het geval wordt behandeld van splitsing in 2 ïonen — en SO_4H_2 als voorbeeld gekozen, ofschoon de binaire splitsing in dat geval niet zeker is.

de *Théorie moléc* etc., § 4 of § 14 geschied is met wat toen alleen een functie van x was. Men vindt dan

$$\psi = -MRT(1+y)\log(V-b) - \frac{a}{V} +$$
$$+ MRT\{(1-x)\log(1-x) + (x-y)\log(x-y) + 2y\log y\}$$
$$+ (1-x)(E_1 - TH_1) + (x-y)(E_2 - TH_2)$$
$$+ y(E_3 - TH_3) + y(E_4 - TH_4).$$

In hetzelfde volume en bij onveranderde x kunnen wij voor y alle mogelijke waarden denken tusschen 0 en x. Maar slechts die waarde zal inderdaad voorhanden zijn, welke ψ tot een minimum maakt — of met andere woorden — y wordt bepaald door $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{VXT} = 0$ te stellen

Men vindt dan:

$$\mathrm{og}\frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = -\frac{E_3 + E_4 - E_2}{MRT} + \frac{H_3 + H_4 - H_2}{MR} -$$
$$-1 - \frac{\left(\frac{MRT}{V-b}\frac{db}{dy} - \frac{da}{dy}\frac{1}{V}\right)}{MRT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In deze formule stelt $E_3 + E_4 - E_2$ het energieverlies voor, wanneer de twee ïonen zich tot een mol. SO_4H_2 verbinden. Evenzoo $H_3 + H_4 - H_2$ het entropieverlies bij die vereeniging. V is het uitwendig volume der $1+y$ molekulen en $V-b$ dat, wat aan de warmtebeweging ten goede komt.

Deze formule is reeds door Ostwald, ofschoon op geheel andere wijze, gevonden *) — en met afwijkingen trouwens. Vooreerst komt de laatste term niet voor. Maar die term zou, zooals hiervoor opgemerkt is, misschien kunnen wegvallen, ten minste als het gezamenlijk molekulairvolume der SO_4H_2 molekulen hetzelfde mag gesteld worden vóór en na de splitsing. Evenzoo zou $\frac{da}{dy}$ wegvallen, als men mag

*) *Physik. Chemie,* Band II, S. 278.

aannemen, dat de molekulairattractie volkomen hetzelfde blijft voor al of niet gesplitste molekulen, als men die attractie dus als de stof maar dezelfde blijft steeds even groot mag beschouwen — iets dat mogelijk is, maar geheel onzeker *).

Ostwald schrijft de formule in een vorm die op het volgende neerkomt;

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} = \left(\frac{V}{x} - \beta\right)C$$

en beschouwt β als het volume der zuurmolekulen.

Na weglating van den laatsten term kan de hier gevondene formule geschreven worden:

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-\frac{y}{x}} = C\frac{V-b}{x} = C\left[\frac{V-b_1}{x} - (b_2-b_1)\right].$$

Men mag echter hierbij niet over het hoofd zien dat V zelf een functie van x is. Het stelt namelijk het molekulair-volume van het mengsel voor en neemt dus met x toe. Bij gegeven temperatuur zal

$$y^2 = C(x-y)\left(1 + \frac{b_2-b_1}{b_1}x\right)$$

een formule zijn die met hoogen graad van benadering het aantal gesplitste molekulen doet vinden. Bij geringen graad van concentratie kan $y^2 = C(x-y)$ gesteld worden.

§ 9. De waarde van y uit (8) opgelost en in ψ gesubstitueerd geeft nu ψ in functie van x en V, en dit gewijzigd ψ-vlak kan nu voeren tot de waarde van p; als, evenals vroeger, de thermodynamische potentiaal voor een watermolekuul bepaald wordt. Wij hebben dus te bepalen de

*) Men zie omtrent deze kwestie een volgenden arbeid: „De formule der electrolytische dissociatie."

waarde van $\psi + pV - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{Y.VT}$ en die voor de damp- en vloeistof-phase aan elkander gelijk te stellen. Daar $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT} = 0$ is, kan men evengoed bepalen:

$$\psi + pV - x\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{YVT} - y\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT}$$

Stellen wij nu:

$$pV - MRT(1 + y)\log\frac{V-b}{1+y} - \frac{a}{V} = \mu_{xy}$$

dan vinden wij

$$M_1\mu_1 = MRT\log\frac{1-x}{1+y} + \mu_{xy} - x\frac{d\mu_{xy}}{dx_{ypT}} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy_{xpT}} + E_1 - TH_1.$$

Is nu in de dampphase zoowel x als y voor elk der ïonen $= 0$, dan is

$$MRT + MRT\log\frac{p}{MRT} = MRT\log\frac{1-x}{1+y} + \mu_{xy} - x\frac{d\mu_{xy}}{dx_{ypT}} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy_{xpT}}$$

Is $x = 0$ dan is ook $y = 0$ en $p = p_1$, en dus

$$p = p_1\frac{1-x}{1+y}e^{-\frac{\mu_{xy} - \mu_1 - x\frac{d\mu_{xy}}{dx} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy}}{MRT}} \quad \ldots . (9)$$

Evenals hiervoor is opgemerkt, kunnen wij als benadering μ_x voor een bepaalde waarde van p kiezen bijv. p_1 en de verandering verwaarloozen die veranderde waarde van p in de waarde van μ_{xy} teweeg brengt, met andere woorden μ_{xy} als functie van x en y alleen beschouwen, en daar y van x afhangt eigenlijk van x alleen.

Voor $\mu_{xy} - \mu_1 - x\frac{d\mu_{xy}}{dx} - y\frac{d\mu_{xy}}{dy}$ kunnen wij schrijven

$$- \frac{1}{2}\left\{x^2 \frac{d^2\mu_{xy}}{dx^2} + 2xy \frac{d^2\mu_{xy}}{dxdy} + y^2 \frac{d^2\mu_{xy}}{dy^2}\right\}$$

en de formule (9) in den vorm:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} \quad \ldots\ldots (10)$$

§ 10. Nemen wij voor een oogenblik aan dat α, β en $\gamma = 0$ is, dus dat er geen invloed van zuiver physischen aard op de grootte der drukking aanwezig is, dan zouden wij mogen stellen:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y}$$

$$-\frac{dp}{p_1 dx} = \frac{1}{1+y} + \frac{1-x}{(1+y)^2} \frac{dy}{dx}$$

en

$$-\frac{1}{p_1}\frac{d^2p}{dx^2} = -\frac{2}{(1+y)^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2(1-x)}{(1+y)^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{1-x}{1+y}\frac{d^2y}{dx^2}$$

De tweede dezer vergelijking leert ons dat de waarde van $-\frac{1}{p_1}\frac{dp}{dx}$ steeds positief is, dus de druk steeds afnemende als x aangroeit. De waarde voor $x = 0$ is gelijk aan 2, daar tegelijk met x ook $y = 0$ is en $\frac{dy}{dx}$ voor $x = 0$ gelijk is aan de eenheid. Uit $y^2 = C(x - y)$, vinden wij n.l. $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{C + 2y}$.

Dit zijn uitkomsten die door de ervaring bevestigd worden — zeker niet tegengesproken. Uit de derde dezer vergelijkingen volgt, daar $\frac{d^2y}{dx^2}$ negatief is, dat $\frac{d^2p}{dx^2}$ positief is, dus dat de kromme steeds boven de raaklijn ligt. Van uit het boveneinde van p_1 kan dus geen andere raaklijn aan de kromme getrokken worden dan in het beginpunt zelf —

dus voor $\frac{p_1-p}{p_1 x}$ bestaat noch maximumwaarde, noch minimumwaarde — en dit wordt door de waarnemingen van TAMMAN, zooals straks zal aangetoond worden, beslist tegengesproken. De waarde van $\frac{p_1-p}{p_1 x}$ zou dus met een waarde gelijk aan 2 beginnen en voortdurend afnemen. Reeds bij SO_4H_2 is ons gebleken, dat integendeel deze waarde tot 4 kan stijgen. Zonder dus aan α, β en γ waarde toe te kennen, kunnen wij de verschijnselen niet verklaren.

Schrijven wij

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-x^2\left[\alpha + 2\beta \frac{y}{x} + \gamma \frac{y^2}{x^2}\right]},$$

dan zal de factor van x^2 dus variabel kunnen zijn. Daar $\left(\frac{y}{x}\right)$ met de waarde 1 begint en in den regel snel afneemt, zal die factor beginnen met de waarde $\alpha + 2\beta + \gamma$ en met een waarde bijna α eindigen.

Alleen dus als β en γ gelijk aan 0 zijn, zal de factor van x^2 bij standvastige temperatuur als een standvastige mogen beschouwd worden. Ook nog als α de waarde van β en γ vèr overtreft. Ik zal beginnen met de gevolgen na te gaan van deze onderstelling. Wij stellen dus

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-\alpha x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

waarin $y^2 = C(x-y)$ bij benadering.

Uit (11) volgt

$$-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{1-x} + \frac{\frac{dx}{dy}}{1+y} + 2\alpha x$$

en

$$-\frac{1}{p}\frac{d^2p}{dx^2} + \left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{(1+y)^2} + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+y} + 2\alpha.$$

Uit de eerste dezer vergelijking volgt dat de waarde van $-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$, en dus ook de waarde van $\frac{p_1-p}{p_1 x}$, begint met 2, en dat $\frac{dp}{dx}$ voortdurend negatief is. Er kan dus geen maximum- of minimumdruk zijn. Uit de tweede volgt, dat het mogelijk is, dat de kromme in het beginpunt een buigpunt bezit. Dan moet n.l. voor x en $y = 0$ ook $\frac{d^2p}{dx^2} = 0$ zijn en dus

$$4 = 1 - 1 - \frac{2}{C} + 2\,\alpha$$

of

$$(\alpha - 2)\,C = 1.$$

Is die voorwaarde niet juist vervuld, dan vindt men he teeken van $\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{x=0}$ uit de vergelijking:

$$-\frac{1}{p}\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{x=0} = -4 - \frac{2}{C} + 2\,\alpha = +\frac{2}{C}[(\alpha - 2)\,C - 1].$$

Is dus $(\alpha - 2)\,C > 1$ dan ligt de kromme in het beginpunt beneden de raaklijn en zal dus $\frac{p_1-p}{p_1 x}$ met de waarde 2 beginnen en bij iets grootere waarde van x grooter dan 2 zijn. Is daarentegen $(\alpha - 2)\,C < 1$ dan begint deze waarde wel met 2, maar is zij spoedig kleiner.

Nu is C altijd een kleine grootheid, afwisselende in de gevallen, waarin ik ze heb trachten te bepalen, tusschen 0.056 en 0.002. Zoodra dus $(\alpha - 2)\,C$ merkbaar van de eenheid verschilt, is de kromming in den beginne groot, en moet dus de waarde van $\frac{p_1-p}{p_1 x}$, behalve als $(\alpha - 2)\,C - 1$ zelve klein is, snel veranderen.

Het geval $(\alpha - 2)\,C > 1$ komt voor telkens als in de opgaven voor de drukverlaging van TAMMAN het eerste cijfer merkbaar meer bedraagt dan 13.56 mM., een cijfer, dat men vindt, door $p_1 - p$ te berekenen uit $\frac{p_1-p}{p_1 x} = 2$, in aanmer-

king nemende, dat $p_1 = 760$ en $x = 0.00892$ is. In verreweg de meeste gevallen is het cijfer lager. Bij KOH en LiOH is het hooger, terwijl bij anderen, waar het veel hooger is, zeker wel meer samengestelde dissociatie, dan hier ondersteld is, in het spel komt. Ook bij LiJ is het eerste cijfer iets boven 13.56 en wel bedraagt het 13.6. Het verschil is hier zoo gering, dat wij wel tot $(\alpha - 2)\, C = 1$ kunnen besluiten.

Is $(\alpha - 2)\, C \geqq 1$, dan is de loop der kromme eenvoudig, en komt overeen met die in Fig. 2 — met dit verschil dat de beginrichting niet samenvalt met een lijn die naar het punt gericht is, waarvoor $x = 1$ is, maar waarvoor $x = {}^1/_2$ is. Het buigpunt komt voor, eveneens als de maximumwaarde van $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$. Men vindt de waarde van x waarvoor $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ maximumwaarde heeft uit de vergelijking:

$$(1 + y)\, e^{\alpha x^2} = 1 + x\,(1 - x) \left\{ \frac{\frac{dy}{dx}}{1 +} + 2\,\alpha\, x \right\} \quad . \; . \; (12)$$

terwijl, als wij weder $\frac{p_1 - p}{p_1 x}$ door K voorstellen

$$(1 + y)\, e^{\alpha x^2} = \frac{1 - x}{1 - K x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

De vergelijking (12) heeft steeds een wortel ook in het geval dat $(\alpha - 2)\, C < 1$ zooals bij SO_4H_2 het geval is. Wij kunnen ze dus ook gebruiken bij SO_4H_2 en doen zien, dat hoe groot men ook het bedrag der electrolytische dissociatie zou willen stellen zelfs tot volkomen splitsing in ïonen toe, de grootheid α een hooge waarde heeft.

Door verbinding van (12) met (13) verkrijgt men n.l.

$$\frac{1 - x}{1 - K x} = x\,(1 - x) \left\{ \frac{\frac{dy}{dx}}{1 + y} + 2\,\alpha\, x \right\} + 1.$$

Bij de proeven van REGNAULT kon bij 35⁰ $K = 4$ en $x = \frac{1}{8}$ gesteld worden, en dus

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y} + \frac{4}{\alpha} = 6.7$$

of

$$\alpha = 27 - 4\,\frac{\frac{dy}{dx}}{1+y}.$$

Nam men volledige dissociatie aan, dan zou α nog circa 23 zijn — of met andere woordan — uit de waarnemingen omtrent de plaats van het maximum en van de waarde van K_m vindt men α tusschen 27 en 23.

Terwijl zelfs, als die waarnemingen volkomen scherp zich lieten doen èn α èn C daaruit te bepalen zouden zijn. Maar juist in de genoemde gevallen waar $(\alpha - 2)\,C > 1$ is zijnde waarnemingen van TAMMAN niet ver genoeg voortgezet om het maximum te toonen. De waarnemingen zijn gedaan bij waarden van x:

	0,00892	0,01768	0,03475	0,05123	0,06715	0,08257	0,09747	0,12587	0,15242
KOH	2,210	2,191	2,424	2,548	2,743	2,894	2,981	3,236	3,348
LiJ	2,006	2,128	2.450	2,70	3,027	3,283	3,53	3,732	3,842

De cijfers der twee laatste rijen zijn de waarden van K. Het maximum is dus nog niet bereikt bij $x = 0{,}15242$, maar schijnt niet veel verder te zullen liggen. Het eerste cijfer in de recks bij KOH zal wel foutief zijn. Bij beide stoffen is van den beginne af aan $K > 2$ en stijgt tot een vermoedelijk maximum en zal dus $(\alpha - 2)\,C > 1$. Voor KOH had ik door herhaalde beproeving gezocht welke waarde voor C en α moeten gekozen worden. Met $C = 0{,}056$ en $\alpha = 20{,}8$ had ik een goede overeenstemming gekregen. Het product $(\alpha - 2)\,C = 1{,}023$ dus slechts weinig grooter dan 1. Maar was dit product veel grooter dan 1, dan is hierboven opgemerkt dat de drukkromme zoo sterk gekromd

zou zijn, dat reeds bij $x = 0{,}00892$ de waarde van K ver boven 2 zou liggen.

§ 11. Het geval $(\alpha - 2)\,C < 1$ vertoont meer complicaties. Daartoe behoort ook SO_4H_2. De waarden van K zijn voor dezelfde waarden van x:

x	0,00892	0,01768	0,03475	0,05123	0,06715	0,08257	0,09747	0,12587
k	1,89	1,971	2,379	2,67	2,9	3,184	3,3	3,59

De waarde van K die bij $x = 0$ gelijk aan 2 is, is dus eerst gedaald tot beneden 2, is bij zekere waarde van x weder gelijk aan 2 geworden om van daaruit verder toe te nemen tot zekere maximumwaarde die bij 100° dus ligt bij een waarde van $x > {}^1/_8$. Er moet dus een waarde van x aan te wijzen zijn, waarvoor K een minimum geweest is. Maar dat was dan ook eigenlijk uit het vroeger opgemerkte reeds af te leiden. Zoodra $(\alpha - 2)\,C < 1$ is, ligt de kromme in den beginne boven de raaklijn en moet dus de waarde van K verminderen — maar niet onbeperkt, daar reeds uit de waarnemingen van Regnault gebleken was dat er nog bovendien een maximum bestond. Ik had door herhaald beproeven de waarde van $C = 0{,}01$ gevonden. Neemt men die waarde aan en berekent men voor elke x der waarnemingen de waarde van y door $y^2 = C\,(x - y)$, dan kan uit elke waarde van p der proef den factor van x^2 berekend worden in de vergelijking:

$$p = p_1 \frac{1 - x}{1 + y} 10^{-\alpha' x^2}$$

In gewone logarithmen waren de verschillende waarden van α':

$12\,{}^1/_8$ 11,6 12,2 12,5 12,02 12,18, 11,99 11,87

en dus in Nep. log gemiddeld 28. De waarde van $(\alpha - 2)\,C = 0{,}26$, dus zooveel kleiner dan 1, dat de kromming der lijn sterk moet zijn. Spoedig moet de waarde van K dus beneden 2 dalen. Het minimum ligt reeds vòór

de eerste waarde van x. Daar x zoo klein is kunnen wij met een benaderingsformule volstaan om x te berekenen en voor $e^{-\alpha x^2}$ de waarde $(1 - \alpha x^2)$ schrijven, en dus $K = 1 + \frac{y}{x} + \alpha x$ stellen.

$$\frac{dK}{dx} = \frac{d\frac{y}{x}}{dx} + \alpha = 0$$

Uit $y^2 = C(x - y$, vindt $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{C}{x}\left(1 - \frac{y}{x}\right)$

of

$$\frac{x}{C} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{dx}{C} = \left(-\frac{2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3} + \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) d\frac{x}{y}$$

of

$$\alpha C = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{2 - \frac{y}{x}} = 0{,}28 \;\ldots\ldots\ldots\; (14)$$

Aan deze vergelijking voldoet $\frac{y}{x} = 0{,}71$ en met $\frac{x}{C} = \frac{1 - \frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

berekent men met $C = 0{,}01$, $x = 0{,}00576$.

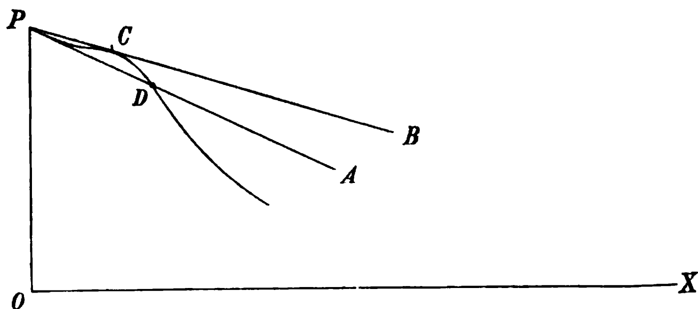
Waren de proeven dus vóór die waarde van x begonnen, dan zou men eerst eenigszins afnemende waarde van K gezien hebben en niet evenals nu steeds klimmende. Met $\alpha = 28$ wordt de minimumwaarde van K echter maar weinig verschillend gevonden van de eerste door TAMMAN opgegevene n.l. $K_m = 1{,}87$

De waarde van x waarvoor K opnieuw gelijk aan 2 is, kan uit de volgende benaderingsvergelijkinge gevonden

worden, ten minste als ook deze waarde van x nog klein genoeg is om $e^{-\alpha x^2} = 1 - \alpha x^2$ te mogen stellen:

$$(1 - \alpha x)^2 = C(\alpha - 2)(1 - 2x)$$

Een wortel dezer vergelijking is gelijk aan $x = 0{,}018$ wat met de getallen van TAMMAN vrij goed sluit. De andere wortel ligt te vèr weg om als benaderingswaarde te kunnen gelden voor de plaats waar later K weder 2 is, na zijn maximumwaarde. Binnen dat kleine interval dus, van $x = 0$ tot $x = 0{,}018$ is, bij SO_4H_2, de complicatie ten einde gespoed, die het geval $(\alpha - 2)\,C < 1$ bezit boven het geval $(\alpha - 2)\,C > 1$.



In Fig. 3 moet de lijn PA gedacht worden de X-as te snijden op afstand van $O = 1/2$ en de lijn PB op grooteren afstand van O. Nu begint de kromme rakend aan PA met de convexe zijde naar beneden; maar die wijze van kromming keert spoedig om. In C raakt de kromme aan de lijn PB. In D snijdt zij de lijn PA weder. Bij SO_4H_2 is de x van $C = 0{,}00576$ en die van $D = 0{,}018$, terwijl de plaats van het nieuwe buigpunt natuurlijk nog voor C liggen moet.

Bij benadering kan men die plaats berekenen uit

$$1 + \frac{4x}{C} = \frac{1}{\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}C(\alpha-2)}}.$$

Bij SO_4H_2 geeft dit $x = 0.0035$.

Van $x = 0$ tot $x = 0.0035$ is dus de bolle zijde der

kromme naar beneden gekeerd; van $x = 0.0035$ tot $x < 0.125$ daarentegen de holle zijde. Voor grootere waarde weder de bolle zijde.

§ 12. Ook voor oplossingen van NaCl heb ik de waarden van C en α bepaald, die noodig zijn om aan de waarnemingen van TAMMAN te voldoen — en heb p kunnen voorstellen door

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} 10^{-6x^2}$$

als y berekend wordt uit $y^2 = 0.01453\ (x-y)$.

C is dus gelijk aan 0.01453 en $\alpha = 13.6$.

De loop der kromme komt met die van SO_4H_2 oplossing overeen. De waarden van K zijn voor de hierboven opgegeven waarden van x:

1.817	1.875	1.974	2.054	2.175	2.274	2.36.

De in Fig. 3 voorgestelde complicatie der lijn duurt hier echter langer en eerst bij $x = 0.05$ is de waarde van $K = 2$ geworden. Volgens de formule zou dit echter eerst bij $x = 0.06$ het geval zijn.

Nu kan de waarde van C en α zoodanig zijn, dat ook het minimum van K ver naar voren verschoven is en wel zoover, dat het valt binnen de grenzen van x, die bij de proeven van TAMMAN voorkomen.

Een dergelijk geval komt voor o. a. bij oplossingen van NH_4Cl. De waarden van K zijn:

1.77	1.766	1.71	1.78	1.845	1.885	1.85	1.885	1.85

Het 7de cijfer der reeks (1.85) staat vreemd tusschen de vorige en volgende in — en men zou geneigd zijn dit tot 1.89 te willen verhoogen. De drukvermindering, die door TAMMAN 138.2 mM. wordt opgegeven, zou dan 141.4 mM. moeten bedragen hebben. Maar ook dan nog is de waarde van x voor de maximumwaarde te dicht gelegen bij die voor de minimumwaarde om ze te kunnen verklaren door de form:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-\alpha x^2}$$

ten minste als α constant blijft. Ik meen dus hier een geval te mogen zien, dat alleen verklaard kan worden door aan te nemen:

$$p = p_1 \frac{1-x}{1+y} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)} \text{ *)}.$$

En dit geval staat niet alleen. Telkens wanneer de factor van x^2 klein gevonden wordt, kan, welke waarde van C ook gekozen wordt, geen standvastige waarde gevonden worden, maar neemt zij af als x toeneemt. Het zou natuurlijk mogelijk zijn voor C, α, β en γ uit 4 waarnemingen van elke oplossing een stel waarden te bepalen, waardoor behoorlijk de waarnemingen worden wedergegeven — maar als dan ook met de overigen, die niet tot de bepaling hebben gediend, sluiting gevonden werd, zou de bewijskracht gering zijn, zoolang het niet gelukt is theoretisch aan te toonen in welk verband die grootheden tot elkander moeten staan. In dat opzicht ben ik nog niet tot zekerheid gekomen.

B. Wet van Henry.

§ 13. Onder den naam van »wet van Henry" zullen wij die verschijnselen samenvatten, waarbij in de formule (2) de eerste term kan weggelaten worden of in de formule

$$p = p_1 (1-x)\, e^{\frac{\mu x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_p}{MRT}} + p_2\, x\, e^{\frac{\mu x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\mu}{dx}\right)_p}{MRT}}$$

de grootheid p_1 verwaarloosd kan worden tegenover $p_2 x$. Wordt SO_2 in water opgelost, dan stelt dus p_2 de drukking

*) Of door physische redenen, die α doen afnemen. (Zie later).

van den verzadigden damp van SO_2 bij de temperatuur der waarneming voor en p_1 die van water, welke laatste ten minste bij lagere temperaturen en bij een totale drukking die p_1 vèr·overtreft verwaarloosd kan worden. Dat men in zulke gevallen van den totalen druk steeds p_1 aftrekt, is, volgens het vorige, wel niet strikt juist, maar de fout. die hierdoor begaan wordt, kan niet van invloed zijn op den algemeenen gang der verschijnselen.

Bij SO_2 oplossingen is dus de beteekenis van p_2 duidelijk aan te wijzen. Maar bij oplossingen van stoffen als O_2, CO enz., waarvoor de temperatuur der waarneming hooger ligt dan haar kritische temperatuur, heeft p_2 een waarde die niet door proefneming te bepalen zou zijn; dan is het beter tot de vergelijking (2) terug te gaan.

Wij stellen dus

$$p = p_2 \, x \, e^{\frac{\mu_x - \mu_1 + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}}{MRT}}$$

of

$$p = MRT \, x \, e^{\frac{\mu_x + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}}{MRT} - 1}.$$

Uit beiden volgt:

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT} + \left(\frac{d\mu_x}{dp}\right)_{xT}\frac{dp}{dx} + (1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx\,dp}\right)_T\frac{dp}{dx}}{MRT}.$$

Nu is bij standvastige temperatuur

$$d\left\{pV - MRT\log(V-b) - \frac{a}{V}\right\} = \left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p dx + V\,dp$$

waarin V het volume van 1 molekuul van het mengsel in vloeistoftoestand voorstelt en dus $\left(\frac{d\mu}{dp}\right) = V$ is, terwijl

$$\frac{d^2\mu_x}{dp\,dx} = \left(\frac{dV}{dx}\right)_p$$ is.

Zoolang nu $\frac{p\,V}{MRT}$ en $\frac{p\left(\frac{d\,V}{d\,x}\right)_p}{MRT}$ zeer kleine breuken zijn, kan gesteld worden;

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT}}{MRT}$$

of

$$\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1 + \frac{x\,(1-x)\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_{pT}}{MRT}$$

De wet van HENRY, als volkomen juist aannemende, zou $\frac{x}{p}\frac{d\,p}{d\,x} = 1$ moeten zijn. Zoo die wet dus streng goldt, zou $\left(\frac{d^2\,\mu_x}{d\,x^2}\right) = 0$ moeten zijn. Als eerste benadering kan, zoolang x klein is, $\frac{x}{p}\frac{d\,p}{d\,x} = 1$ worden aangenomen. Maar de afwijking is hier niet van de 2de orde van kleinheid, maar slechts van de 1ste orde.

Zien wij die afwijking over het hoofd dan zou men misschien kunnen meenen dat $p = p_2 x$ als de formule moet worden aangenomen, maar ten onrechte, want ook als $p = kp_2\,x$ (k een willekeurige constante) wordt gesteld, is $\frac{x}{p}\frac{dp}{dx} = 1$. Was inderdaad, van $x = 0$ tot $x = 1$ toe, μ_x een lineaire functie, dan eerst zou de formule $p = p_2 x$ gelden; maar gevallen waarin dat gelden zal, komen bij de verschijnselen waarbij de wet van HENRY wordt toegepast, niet voor. Is daarentegen μ_x een lineaire functie, of daarmede practisch gelijk te stellen, alleen binnen zekere grenzen van x, van 0 af tot zekere waarde x_3 bijv., zoodat $\mu_x + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_p = \mu_3$ kan gesteld worden, dan wordt

$$p = p_2\,x\,e^{\frac{\mu_3-\mu}{MRT}}.$$

wat met $p = k\,p_2\,x$ overeenkomt. Daaruit volgt dat, tenzij men μ_3 en μ_2 leert kennen, aan de wet van HENRY geen middel kan ontleend worden om het aantal molekulen in een oplossing te bepalen. Wat hier gezegd is komt overeen met in Fig. 1 de kromme voor kleine waarden van x een zwakke kromming te geven, maar een richting die ver boven E heenwijst. Als allereerste benadering zou men ze als een rechte kunnen beschouwen, dus $\left(\frac{d^2\mu}{d\,x^2}\right)_{pT} = 0$ stellen. Wij zullen een waarde voor $\left(\frac{d^2\mu}{d\,x^2}\right)_{pT}$ aannemen, maar die als constant beschouwen, en dus stellen

$$p = p_2\, e^{\frac{\mu_3 - \mu_2}{MRT}}\, x\, e^{\frac{\alpha x(1 - \frac{1}{2}x)}{MRT}}$$

of met nog eenige vereenvoudiging:

$$p = C\,x\,e^{\beta x} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

waaruit

$$\frac{dp}{dx} = C\,e^{\beta x}\,(1 + \beta x)$$

en

$$\frac{d^2p}{dx^2} = C\,e^{\beta x}\,\beta\,(2 + \beta x)$$

Waar afwijkingen van de wet van HENRY met zekerheid bekend zijn is de afwijking in dien zin dat $\frac{x}{p}$ met toenemenden druk afneemt. Dit beteekent dus dat β positief is, en daar β hier voorstelt, wat α bij de zoutoplossingen beteekende, zijn deze uitkomsten in overeenstemming. Alleen bij NH_3 bij 0°, is dit slechts in den beginne waar, waaruit blijkt, dat $\left(\frac{d^2\mu_x}{dx^2}\right)_p$ slechts approximatief standvastig mag genomen worden en, wat wel de regel zijn zal, eigenlijk afnemende is.

C. Invloed der temperatuur.

§ 14. Zij p de druk in een ruimte waarin zich twee phasen van een mengsel bevinden, de vloeistofphase gegeven door x_1 en de dampphase door x_2. Verandert de temperatuur dan zullen in het algemeen x_1 en x_2 veranderen. Door verandering van het volume is het altijd mogelijk x_1 op het oorspronkelijk bedrag terug te brengen. Zij dT de verandering in temperatnur dan kan gemakkelijk bewezen worden:

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_{x_1} - 1 = \frac{\frac{a_{x_1}}{V_1} + (x_2 - x_1)\frac{d\left(\frac{a_x}{V_1}\right)}{dx}_{pT}}{MRT} \quad . \; . \; . \; (1)$$

Wij zullen het bewijs doen volgen, om tegelijk te doen zien, dat deze vergelijking alleen geldt als bij de dampphasen de gaswetten als volkomen geldig worden aangenomen.

Verandert bij een homogene phase ook de temperatuur dan is $Vdp = \eta\, dT + d\, M_1\mu_1 + x\, d\,(M_2\mu_2 - M_1\mu_1)$ als wij door η de entropie voorstellen en door $M_1\mu_1$ en $M_2\mu_2$ de thermodynamische potentialen der 2 stoffen, en dus geldt de vergelijking

$$(V_2 - V_1)\, dp = (\eta_2 - \eta_1)\, dT + (x_2 - x_1)\, d\,(M_2\mu_2 - M_1\mu_1)$$

of

$$(V_2 - V_1)\, dp = (\eta_2 - \eta_1)\, dT + (x_2 - x_1)\, d\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)_{VT}$$

en daar

$$d\left(\frac{d\psi}{dx_1}\right)_{VT} = \left(\frac{d^2\psi}{dx_1^2}\right)_{pT} dx_1 + \left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT} dp - \left(\frac{d\eta_1}{dx_1}\right)_{pT} dT$$

is

$$\left\{ V_2 - V_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT} \right\}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x = \left\{ \eta_2 - \eta_1 - (x_2 - x_1)\left(\frac{d\eta_1}{dx_1}\right)_{pT} \right\}$$

Deze vergelijking verbonden met

$$(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-T(\eta_2-\eta_1)+p(V_2-V_1)=(x_2-x_1)\frac{d\{\varepsilon_1-T\eta_1+pV_1\}}{dx_{1pT}}$$

leidt tot

$$\left\{(V_2-V_1)-(x_2-x_1)\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT}\right\}\left\{T\left(\frac{dp}{dT_x}\right)-p\right\}=$$

$$=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)-(x_2-x_1)\left(\frac{d\varepsilon_1}{dx_1}\right)_{pT}.$$

Is de tweede phase nu een dampphase, dan kan V_1 en $\left(\frac{dV_1}{dx_1}\right)_{pT}$ verwaarloosd worden en voor $(\varepsilon_2-\varepsilon_1)$ de waarde $\frac{a_x}{V_x}$ gesteld worden, waaruit (1) volgt.

Voor een enkelvoudige stof wordt dit:

$$\frac{T}{p}\frac{dp}{dT}-1=\frac{\frac{a}{V}}{MRT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

terwijl als integraal dezer vergelijking de uitdrukking

$$\log\frac{p}{MRT}=\frac{\mu}{MRT}-1 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

kan beschouwd worden.

Voor een zoutoplossing, waarbij $x_2=0$ is, (en geen dissociatie plaatsgrijpt) wordt dit

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x-\frac{T}{p_1}\frac{dp_1}{dT}=\frac{\frac{a_x}{V_x}-x\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}-\frac{a_1}{V_1}}{MRT} \quad \ldots (4)$$

Voor oplossingen van gassen, waarbij $x_2=1$ kan gesteld worden

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dT}\right)_x-\frac{T}{p_2}\frac{dp_2}{dT}=\frac{\frac{a_x}{V_x}+(1-x)\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}-\frac{a_2}{V_2}}{MRT} \quad \ldots (5)$$

terwijl wij de integralen dezer vergelijkingen hierboven vonden. Voor zoutoplossingen:

$$\log \frac{p}{p_1} = \log(1-x) + \frac{\mu_x - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} - \mu_1}{MRT} \quad . . (6)$$

en voor gasoplossingen:

$$\log \frac{p}{p_2} = \log x + \frac{\mu_x + (1-x)\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} - \mu_2}{MRT} \quad . . (7)$$

Integreert men de vergelijking (4) en (5), aannemende dat $\frac{a_x}{V_x}$ een grootheid is, die slechts weinig met de temperatuur verandert, dan vindt men

$$\log \frac{p}{p_1} = f(x) - \frac{\frac{a_x}{V_x} - x\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} - \frac{a_1}{V_1}}{MRT} \quad . . . (8)$$

en

$$\log \frac{p}{p_2} = \varphi(x) - \frac{\frac{a_x}{V_x} + (1-x)\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT} - \frac{a_2}{V_2}}{MRT} \quad . . (9)$$

Als men nu (6) met (8) vergelijkt en (7) met (9) komt men tot de vraag: kan

$$-\left\{\frac{a_x}{V_x} - \frac{a_1}{V_1} - x\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}\right\}$$

ten minste bij benadering gelijk gesteld worden aan

$$\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT} \text{ en } -\left\{\frac{a_x}{V_x} - \frac{a_2}{V_2} + (1-x)\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}\right\}$$

met $\mu_x - \mu_2 + (1-x)\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}$? Was dit zoo, dan was de waarde van $\left\{\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}\right\}$, die bijv. bij SO_4H_2 zoo groot gevonden werd en bij andere oplossingen kleiner was, met andere bekende eigenschappen der stoffen in verband gebracht.

Stellen wij door W_x de warmte voor, die bij de menging van $(1-x)$ molekulen der 1ste stof met x der 2de stof vrij komt, en door E_x de energie van het mengsel, door E_1 en E_2 de energie per molekuul voor de bestanddeelen vóór de menging, dan is

$$W_x = (1-x)E_1 + x E_2 - E_x$$

of

$$E_x = (1-x)E_1 + x E_2 - W_x$$

en

$$E_x - x\frac{dE_x}{dx} - E_1 = -\left(W_x - x\frac{dW_x}{dx}\right)$$

of

$$E_x - E_1 - x\frac{dE_x}{dx} = x^2\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{dx}$$

$$-\frac{a_x}{V_x} + x\frac{d\frac{a_x}{V}}{dx} + \frac{a_1}{V_1} = x^2\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{dx}$$

of de teller van het 2de lid van (4) gelijk aan $+x^2\frac{d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{dx}$ en dan zou ook de teller van den laatsten term van (6) eveneens gelijk zijn, ten minste bij benadering, aan

$$+x^2\frac{d\frac{W_x}{x}}{dx}$$

of

$$p = p_1 (1 - x) e^{\frac{x^2 d\left(\frac{W_x}{x}\right)}{MRT}}.$$

Nu kan ten minste bij SO_4H_2 oplossingen $\frac{W_x}{x}$ gelijk gesteld worden volgens de onderzoekingen van THOMSEN aan

$$\frac{A(1-x)}{1-x+rx} \text{ en dus } \frac{d\frac{W_x}{x}}{dx} = -\frac{Ar}{(1-x+rx)^2}.$$

De waarde van p wordt dan gelijk aan $p_1(1-x)e^{-\frac{x^2 \frac{Ar}{(1-x+rx)^2}}{MRT}}$, alleen dus als $r = 1$ is zou een standvastige waarde voor de grootheid, die vroeger door α is voorgesteld, gevonden worden.

Natuurlijk dat eer dit mag gesteld worden den invloed der dissociatie bij de zoutoplossingen ook zou moeten nagegaan worden — en opheldering gevonden worden, waarom ook zouten, die negatieve verdunningswarmte bezitten, toch den factor α positief wordt gevonden, zooals bij Na Cl. Nu is er natuurlijk geen gelijkheid tusschen

$$\mu_x \text{ en } -\frac{a_x}{V_x}$$

want

$$\mu_x = pV - MRT \log(V-b) - \frac{a}{V}.$$

Maar dat neemt niet weg dat

$$\mu_x - \mu_1 - x\left(\frac{d\mu_x}{dx}\right)_{pT}$$

toch niet veel zal kunnen verschillen van

$$-\left\{\frac{a_x}{V_x} - \frac{a_1}{V_1} - x\left(\frac{d\frac{a_x}{V_x}}{dx}\right)_{pT}\right\}$$

in alle gevallen waarin $\frac{d^2 \frac{a_x}{V_x}}{dx^2}$ een zeer groote waarde heeft.

Het verschil n.l. tusschen μ_x en $-\frac{a_x}{V_x}$ is, als wij pV verwaarloozen mogen gelijk aan $-MRT \log (V-b)$ of bijna gelijk aan $MRT \log \frac{MRT}{\frac{a_x}{V_x^2}}$ en het 2de differentiaalquotient dezer uitdrukking blijkt bij uitrekening slechts weinig malen MRT te kunnen zijn, terwijl $\frac{d^2 \frac{a_x}{V_x}}{dx^2}$ o. a. bij SO_4H_2 oplossingen tot ruim 30 MRT stijgen kan. Daar dit in het limiet geval samenvalt met $\frac{d^2 \frac{a_x}{b_x}}{dx^2}$, meen ik dat de grootte van den coëfficient α niet veel verschilt van $\frac{2a_{12}}{b_1 b_2} - \frac{a_1}{b_1^2} - \frac{a_2}{b_1^2}$, waarvan de beteekenis in § 20 mijner *Théorie Mol.* enz. is besproken.

Ofschoon dus verschillende punten, die hier ter sprake zijn gekomen, nog niet tot volkomen klaarheid zijn gebracht, en nader onderzoek eischen, meen ik dat een zaak duidelijk genoeg in het licht is getreden, n.l. dat men verkeerd doet, om, als een stof opgelost wordt in een andere, het oplosmiddel allen invloed op de opgeloste stof te ontzeggen — en omgekeerd — iets wat iu den laatsten tijd toch herhaaldelijk is geschied. De afwijkingen voor de drukverlaging door zouten zijn hoofdzakelijk toe te schrijven niet aan invloeden die van het zout op het zout zelf uitgaan, maar die van het oplosmiddel op het zout worden uitgeoefend.

DE FORMULE DER ELECTROLYTISCHE DISSOCIATIE.

DOOR

J. D. VAN DER WAALS.

In mijn vorigen arbeid »over de drukking van zuur- en zout-oplossingen", ben ik tot het besluit gekomen dat de waarnemingen ons noodzaken om, behalve electrolytische dissociatie, aan te nemen, dat door het oplosmiddel een sterke invloed uitgeoefend wordt op de opgeloste stof. Tengevolge van dien invloed komt in de formule voor die drukking een factor, dien ik door $e^{-\alpha x^2}$ heb voorgesteld. Bij benadering kon α als standvastig worden beschouwd — en voor een paar oplossingen heb ik de waarden van α medegedeeld. Sedert heb ik bij tal van oplossingen de waarde van α trachten te bepalen — en bij sommige zeer groote waarden voor die grootheid gevonden. Voor het oogenblik zal ik die waarden niet mededeelen, maar enkele opmerkingen maken over den anderen invloed, die der dissociatie, welke zich op de grootte der drukking merkbaar maakt. Met het doel om te vinden in hoever α als constante mag behandeld worden, had ik voor vele oplossingen een stel van waarden voor de 2 parameters C en α gezocht, die zoo na mogelijk de waarnemingen wedergeven. Aannemende, dat de formule der dissociatie $y^2 = C(x - y)$ nauwkeurig genoeg is, zocht ik eigenschappen van α — en dan bleek mij, dat in bijna alle gevallen α met den concentratiegraad afneemt. Niet in die mate dat het bestaan van die grootheid twijfelachtig wordt, want de afname bedraagt dan in

de meeste gevallen slechts 10 pCt. Het is natuurlijk, dat als de dissociatie niet volkomen beantwoordt aan de formule $y^2 = C(x-y)$, ook de gang der waarden van α anders zal gevonden worden, dan hij in werkelijkheid is. En nu blijkt bij de berekeningen dat de standvastigheid van α in hooge mate kan gevonden worden, als y niet zoo sterk met x toenemend aangenomen wordt als de formule $y^2 = C(x-y)$ zou eischen. Daar dit geheel in overeenstemming is met de eigenschappen der geleidbaarheid, die op een maximumwaarde van y wijzen, heb ik de formule der dissociatie aan een nauwkeuriger onderzoek onderworpen, dan ik in mijn vorigen arbeid had gedaan.

§ 1. Beperken wij ons tot het geval dat het zoutmolekuul zich slechts in 2 ïonen splitst, dan zijn in de oplossing aanwezig: $(1-x)$ molekulen water, $(x-y)$ molekulen ongesplitst zout, y molekulen van de 1ste ïone en evenzoo y molekulen van de 2de ïone. Dan zijn in het geheel aanwezig $1+y$ molekulen. Voor een homogene phase geldt dan de vergelijking:

$$p = \frac{MRT(1+y)}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

In deze vergelijking is V het volume van het mengsel zooals het gesplitst is, dus van de $1+y$ molekulen.

Evenzoo is b en a het molekulairvolume van de $1+y$ molekulen en de spec. attractie. De waarde van b is dan met hoogen graad van benadering

$$b = b_1(1-x) + b_2(x-y) + b_3 y + b_4 y$$

als b_1 de grootte van het molekuul water, b_2 van het zout, b_3 van de 1ste ïone en b_4 van de 2de ïone voorstelt. De waarde van $\frac{db}{dy} = b_3 + b_4 - b_2$ kan dan gelijk aan 0 gesteld worden als wij het volume van het zoutmolekuul mogen gelijk stellen aan dat der 2 ïonen. Dit als benadering aan te nemen, zal wel weinig bezwaar ontmoeten.

De grootheid a heeft een samengestelden vorm, n.l.

$$a = a_{11}(1-x)^2 + a_{22}(x-y)^2 + a_{33}y^2 + a_{44}y^2 +$$
$$+ 2a_{12}(1-x)(x-y) + 2a_{13}(1-x)y + 2a_{14}(1-x)y +$$
$$+ 2a_{23}(x-y)y + 2a_{24}(x-y)y + 2a_{34}y^2 \text{ *)}$$

en

$$\frac{1}{2}\frac{da}{dy} = (1-x)(a_{13} + a_{14} - a_{12}) + (x-y)(a_{23} + a_{24} - a_{22}) +$$
$$+ y(a_{33} + a_{44} + 2a_{14} - a_{23} - a_{24}).$$

De factor van $(1-x)$ is de meerdere waarde der aantrekking, die een molekuul water uitoefent op de 2 geïsoleerde ïonen dan op het verbonden zoutmolekuul — de factor van $x-y$ stelt voor de meerdere aantrekking, die een zoutmolekuul uitoefent op de 2 geïsoleerde ïonen dan op een zoutmolekuul zelf — en de factor van y is de meerdere aantrekking die de gesplitsten ïonen op elkander uitoefenen dan een zontmolekuul op haar uitoefent.

Hebben wij recht ook $\frac{da}{dy} = 0$ als benadering aan te nemen? Het volgende dient hoofdzakelijk om te doen uitkomen, dat het antwoord op deze vraag ontkennend moet luiden.

§ 2. Daar wij de voorwaarde voor het evenwicht aan $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{xVT} = 0$ zullen ontleenen, moeten wij er nu toe overgaan om den vorm van ψ te bepalen †). Zij moet zijn van de gedaante:

$$\psi = -\int p\, dV + \varphi(x, y)$$

---

*) Stelde men door V voor het volume van een molekulaire hoeveelheid, dan zou b door $1+y$ moeten gedeeld worden en a door $(1+y)^2$. Maar na herleiding zou voor p toch dezelfde waarde worden gevonden.

†) Zie § 4. Théorie moléculaire etc. *Arch. Néerl.*, T. XXIV, of Moleculartheorie. *Phys. Chemie*, V, 2.

of

$$\psi_T = -MRT(1+y)\log(V-b) - \frac{a}{V} + \varphi(x,y)$$

en het komt er dus op aan $\varphi(x,y)$ te bepalen. Noemen wij E_1, E_2, E_3 en E_4 de hoeveelheid arbeidsvermogen van plaats, die elk der 4 soorten van molekulen zou bezitten, als zij afzonderlijk in oneindig groot volume waren; evenzoo $\int C_1\,dT$, $\int C_2\,dT$, $\int C_3\,dT$ en $\int C_4\,dT$ de kinetische energie in dat geval. Hebbe de entropie voor de $(1-x)$ molekulen water tot limietwaarde $(1-x)\left\{MR\log\frac{V}{1-x} + H_1 + \int\frac{C_1\,dT}{T}\right\}$ enz. na de menging in zeer groot volume, dan vinden wij:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y) = MRT\{(1-x)\log(1-x) + (x-y)\log(x-y) + 2y\log y\}\\ +(1-x)\left\{E_1 + \int C_1\,dT - \left(H_1 + \int C_1\frac{dT}{T}\right)T\right\}\\ +(x-y)\left\{E_2 + \int C_2\,dT - \left(H_2 + \int C_2\frac{dT}{T}\right)T\right\}\\ +\ y\ \left\{E_3 + \int C_3\,dT - \left(H_3 + \int C_3\frac{dT}{T}\right)T\right\}\\ +\ y\ \left\{E_4 + \int C_4\,dT - \left(H_4 + \int C_4\frac{dT}{T}\right)T\right\}\end{aligned}\right\} \quad ..(1)$$

En dus:

$$\begin{aligned}\psi_T = -MRT(1+y)\log\frac{V-b}{1+y} - \frac{a}{V} + \\ + MRT\{(1-x)\log(1-x) + (x-y)\log(x-y) + \\ + 2y\log y - (1+y)\log(1+y)\}\end{aligned}$$

+ de 4 termen van (1) die lineair van x en y afhangen.

Wordt nu gezocht $\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{xVT}$, en nemen wij:

$$u_{xy} = \left\{pV - MRT(1+y)\log\frac{V-b}{1+y} - \frac{a}{V}\right\}$$

dan vinden wij:

$$\left(\frac{d\psi}{dy}\right)_{XVT} = 0 = \left(\frac{d\mu_{xy}}{dy}\right)_{XpT} + MRT \log \frac{y^2}{(x-y)(1+y)} +$$

$$+ \left\{(E_3 + E_4 - E_2) + \int (C_3 + C_4 - C_2)\, dT - \right.$$

$$\left. - T(H_4 + H_3 - H_2) - T\int (C_3 + C_4 - C_2) \frac{dT}{T}\right\} . \; . \quad (2)$$

Nu is

$$\left(\frac{d\mu_{xy}}{dy}\right)_{XpT} = -MRT \log \frac{V-b}{1+y} + MRT + MRT(1+y)\frac{\frac{db}{dy}}{V-b} - \frac{\frac{da}{dy}}{V}$$

en deze waarde gesubstitueerd zijnde in vergelijking (2), vinden wij, als wij $\frac{db}{dy}$ bij benadering gelijk aan 0 stellen,

$$0 = MRT \log \frac{y^2}{(x-y)(V-b)} + MRT - \frac{\frac{da}{dy}}{V} + \{(E_3 + E_4 - E_2) \text{ enz.}\}$$

of

$$\log \frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = \frac{H_3 + H_4 - H_2 - MR + \int (C_3 + C_4 - C_2)\frac{dT}{T}}{MR} -$$

$$- \frac{(E_3 + E_4 - E_2) + \int (C_3 + C_4 - C_2)\, dT - \frac{\frac{da}{dy}}{V}}{MRT} . \; . \; . \quad (3)$$

Is de temperatuur standvastig, dan herleidt zich het tweede lid geheel tot een constante, als wij n.l. $\frac{da}{dy}$ gelijk 0 mogen stellen — en dan vinden wij de formule, die ik in mijn vorigen arbeid heb toegepast, en die door OSTWALD het eerst is afgeleid.

§ 3. Stellen wij $\frac{da}{dy} = 0$, dan is uit vergelijking (3) verdwenen alles, of ten minste nagenoeg alles, wat betrekking heeft op het oplosmiddel. Alleen $V—b$ blijft dan nog aan het oplosmiddel herinneren. Bij zeer groote verdunning mogen wij daarvoor een constante nemen, afhankelijk van het intermolekulair-volume van het oplosmiddel. Maar de invloed van een andere waarde dezer constante, als wij bijv. het zout niet in water maar in een andere vloeistof opgelost denken, kan alleen den graad der dissociatie iets grooter of kleiner maken — maar geeft geen rekenschap van het feit, dat wij de dissociatie van zouten in andere media dan water gelijk 0 of ten minste nagenoeg $= 0$ mogen stellen. Dit is een eerste reden geweest, waarom ik tot het besluit ben gekomen, dat als zich een zoo sterke invloed van het oplosmiddel openbaart, wij ongerijmd zouden handelen met juist uit vergelijking (3) den eenigen term weg te laten, die van de specifieke werking van het oplosmiddel kan rekenschap geven.

Nemen wij eerst uiterste verdunning, dan is

$$\frac{da}{dy} = 2\,(a_{13}{}' + a_{14} - a_{12})$$

en handelen wij alsof $C_3 + C_4 = C_2$ was, dan is

$$\log \frac{y^2}{(x-y)(V-b)} = K - \frac{(E_3 + E_4 - E_2) - 2\dfrac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}}{MRT} \quad . . (4)$$

De grootheid K heeft alleen betrekking op het zoutmolekuul en op de ïonen, is dus van het oplosmiddel onafhankelijk. Evenzoo is dit het geval met $E_3 + E_4 - E_2$. Deze laatste grootheid stelt het energieverlies voor als de 2 ïonen zich vereenigen in een oplosmiddel, dat geen attractie op haar uitoefent, bijv. in een ledige ruimte, of in een oplosmiddel, dat de 2 ïonen gezamenlijk even sterk aantrekt als het het zoutmolekuul aantrekt. Maar de grootheid

$(E_3 + E_4 - E_2) - 2\frac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}$ stelt het energieverlies voor in een medium, dat op de ïonen een spec. attractie gelijk aan a_{13} en a_{14} en op het zoutmolekuul gelijk aan a_{12} uitoefent. Deze grootheid stelt dus ook voor de warmte, die er vrij komt, als de twee ïonen zich tot een zoutmolekuul vereenigen — en het is dus deze grootheid, die door ARRHENIUS is bepaald geworden, *Phys. Chemie*, Band IV, § 105 u. 106. Ofschoon ik wat de bijzonderheid der berekeningen aangaat bedenkingen heb, geldt dit niet de hoofdzaak — en wij kunnen als een niet te weerspreken feit aannemen 1° dat die warmte opvallend klein is en 2° dat zij in bijna evenveel gevallen negatief als positief is. Om het laatste, dat werkelijk in staat zou zijn het geloof aan de electrolytische dissociatie te schokken, te verklaren, herinnert ARRHENIUS aan het feit, dat twee molekulen O_3 zich dissocieerend tot 3 molekulen O_2, warmte vrijmaken — doch dit heeft niets bevreemdends. Maar dat een atoom Cl zich met een atoom H zou verbinden onder warmteverlies en dat nog al, wanneer zij zoo sterk tegengesteld electrisch zijn, is niet aan te nemen. In dat geval staat er tegenover een verbinding, geen splitsing, zooals bij de vorming van O_3 uit O_2 wel het geval is. Mijns inziens moet men beginnen met $E_3 + E_4 - E_2$ een zeer groote waarde toe te kennen, maar dan ook aan $2\frac{a_{13} + a_{14} - a_{12}}{V}$. Mocht $W = 0$ gevonden worden, dan zijn zij even groot, is $W > 0$, dan overweegt $E_3 + E_4 - E_2$ en omgekeerd.

En het besluit is dus, dat water bijv. het atoom K en het atoom Cl of beiden of een der twee veel sterker aantrekt dan het zoutmolekuul — of met andere woorden, dat het in ïonen gesplitste zoutmolekuul in het medium water veel meer arbeidsvermogen van plaats heeft verloren, dan het vóór de splitsing verloren had. Dat de aantrekking van water op K of Na of SO_4 zoo groot ondersteld wordt, heeft zeker niets bevreemdends — en dat in een ander medium bijv. alcohol, die sterke attractie op de ïonen niet behoeft aangenomen te worden, zal evenzeer niet verwonderen. Ik

hel er dan ook toe over om de verschillen geheel aan molekulaire of atomistische werking toe te schrijven, al acht ik het ook mogelijk dat de oorzaak van electrischen aard is.

§ 4, Beschouwen wij vergelijking (4) voor een zelfde zout bij een zelfden graad van concentratie in tweëerlei media geplaatst; noemen wij $\frac{y}{x} = z$ in het eerste medium en $\frac{y'}{x'} = z'$ in het tweede medium, dan vinden wij

$$\log \frac{\frac{z^2}{1-z} \frac{1}{V-b}}{\frac{z'^2}{1-z'} \frac{1}{V'-b'}} = 2 \frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT} \quad . . (5)$$

en door C en C' de parameters der dissociatie voorstellende wordt (5)

$$\log \frac{C}{C'} \frac{V'-b'}{V-b} = 2 \frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT}$$

of

$$\frac{C'}{C} = \frac{V'-b'}{V-b} e^{-2 \frac{\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V} - \frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}}{MRT}} .$$

Is $\frac{a_{13}+a_{14}-a_{12}}{V}$ groot en $\frac{a'_{13}+a'_{14}-a'_{12}}{V'}$ of klein of gelijk aan 0, dan is C' zulk een klein gedeelte van C, dat de dissociatie niet te constateeren valt, of volgens de waarnemingen niet bestaat. Stoffen die zich dus in water geplaatst dissocieeren behoeven dit in het ledige niet te doen bijv. Cl H.

§ 5. De vergelijking (4) geeft de dissociatie alleen in uiterste verdunning terug — zij stelt, al is het dan ook met andere duiding van den parameter de gewone formule der electrolytische dissociatie voor, die geen rekenschap geeft van het bestaan van een maximumwaarde van y. Wij heb-

ben den waren vorm van $\frac{da}{dy}$ noodig om den werkelijken loop der dissociatie te kunnen overzien. Ik herinner hier aan de omstandigheid, dat juist, waar de dissociatie sterk is, de parameter zeer veranderlijk is gevonden, reeds als de waarde van x maar weinig varieerde, en dat voor grootere waarde van x het bestaan van een maximum-waarde voor de geleidbaarheid met de benaderde formule niet in overeenstemming te brengen is.

Met andere woorden als men stelt:

$$y^2 = C\,(x - y)$$

is C zelve een functie van x.

Volgens vergelijking (3) is bij gegeven temperatuur dan ook:

$$\frac{y^2}{x-y} = K\,(V-b)\,e^{-\frac{(E_3 + E_4 - E_2) - \frac{\frac{da}{dy}}{V}}{MRT}} \quad . \; . \; . \; . \; (6)$$

Reeds $V - b$ is een functie van x, maar bovenal $\frac{da}{dy}$ Wij kunnen uit deze vergelijking de voorwaarde vinden waarbij $\frac{dy}{dx} = 0$ is. Vooraf echter deze opmerking. Hiervoor hebben wij de mogelijkheid erkend, dat $\frac{db}{dy} = 0$ is, en dit in elk geval als benadering aangenomen. Bij de differentiatie naar x , die wij nu hebben uit te voeren, ontmoeten wij de grootheid $\frac{db}{dx}$ en $\frac{dV}{dx}$ Nu is $\frac{db}{dx}$ zeker niet gelijk aan 0. Hier geldt het de verandering in het molekulairvolume, als wij een watermolekuul vervangen door een zoutmolekuul, en $b_2 - b_1$ zal bij benadering de waarde van $\frac{db}{dx}$ zijn. Als wij $\frac{db}{dx}$ en $\frac{dV}{dx}$ verwaarloozen vinden wij een zeer eenvoudige voorwaarde voor $\frac{dy}{dx} = 0$, nl.

$$\frac{1}{x-y} = \frac{2}{V\,MRT}\{(a_{12}+a_{13}-a_{14})-(a_{23}+a_{24}-a_{22})\}\,.\,.\;(7)$$

De grootheid $a_{23}+a_{24}-a_{22}$, die de meerdere attractie voorstelt die een zoutmolekuul uitoefent op de ïonen dan op het niet gesplitste molekuul, behoeft niet groot te zijn maar is zeker wel niet negatief. Een chloornatrium-molekuul of zwavelzuur-molekuul zal zijn gesplitste bestanddeelen wel niet zwakker aantrekken dan het ongesplitste molekuul. Was dus (7) nauwkeurig genoeg, dan konden wij stellen, dat y de maximumwaarde bereikt, als

$$\frac{1}{x-y} < \frac{2\,\dfrac{a_{12}+a_{13}-a_{14}}{V}}{MRT}$$

wat dus een middel zou opleveren om als x en y_m bekend zijn een benedenste waarde voor den factor $\frac{a_{12}+a_{13}-a_{14}}{V\,MRT}$ te bepalen.

In dezelfde onderstelling, dat dus $V-b$ als onafhankelijk van x mocht ondersteld worden, zouden wij kunnen schrijven

$$\frac{y^2}{x-y} = C\,e^{-\frac{2\,\frac{(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V}}{MRT}x}$$

als C de waarde van den parameter der dissociatie voorstelt bij uiterste verdunning. Met andere woorden de parameter der dissociatie neemt met toenemenden concentratiegraad af — en daarin brengt slechts weinig verandering het in rekening brengen van de veranderlijkheid van V en b met x. Ofschoon bij sommige stoffen er twijfel kan bestaan of deze regel in alle gevallen bevestigd wordt, wordt bij sterke zuren en zouten, waar de dissociatie een maximumwaarde bezit, geen tegenspraak door de proef geleverd.

Om $\frac{db}{dx}$ en $\frac{dV}{dx}$ in rekening te kunnen brengen, en ten minste te kunnen begrooten in hoever deze grootheden van

invloed zijn, zal ik V een constant aantal malen b stellen, of $V = n\,\{b_1 + (b_2 - b_1)\,x\}$ *).

Dan is

$$\frac{1}{V}\,\frac{dV}{dx} = \frac{b_2 - b_1}{b_1 + (b_2 - b_1)\,x} = \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}$$

en

$$\frac{1}{V - b}\,\frac{d\,(V - b)}{dx} = \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}.$$

Dan is, voor het geval van $\dfrac{dy}{dx} = 0$

$$-\frac{1}{x-y} = +\frac{\dfrac{b^2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x} + \frac{\dfrac{d^2 a}{dx\,dy}}{MRT\,V} - \frac{\dfrac{da}{dy}}{V\,MRT}\,\frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_1 - b_1}{b_1}\,x}$$

of

$$\frac{1}{x-y} = -\frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \left(\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\right)} + \frac{2(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}\left\{1 + \frac{\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}}{1 + \dfrac{b_2 - b_1}{b_1}\,x}\right\}.$$

Kent men $\dfrac{b_2 - b_1}{b_1}$ en x en y dan is de factor $\dfrac{2\,(a_{13} + a_{14} - a_{12})}{V\,MRT}$ te berekenen. Nemen wij $\dfrac{b_2 - b_1}{b_1} = 2$, wat ongeveer bij SO_4H_2 de waarde dezer uitdrukking zijn zal, dan is

---

*) De volgende berekeningen hebben slechts tot doel eenigermate de verschillende invloeden te kunnen begrooten. Weldra hoop ik in staat te zijn, met behulp van den gang der electrolytische geleiding en volgens juister berekeningen, meer vertrouwbare uitkomsten mede te deelen.

$$\frac{1+2x}{x-y} = -2 + \frac{2(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V\,MRT}(3+x)$$

of daar x tegenover 3 verwaarloosd kan worden

$$\frac{2(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V\,MRT} = \frac{2}{3} + \frac{1+2x}{3(x-y)}.$$

Stelt men $x = 0.08$ waarvoor bij SO_4H_2 maximum van geleidbaarheid plaats heeft en begroot men y op een waarde tusschen $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$ van x, bijv. 0,4, dan vindt men voor de waarde van $\frac{2(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V\,MRT}$ ongeveer 8, wat trouwens kleiner is dan gevonden wordt, wanneer men in de formule bezigt de waarden van V_x, zooals ze door de kennis der waargenomen densiteiten berekend worden. Daarenboven valt de maximumwaarde van y niet samen met de maximumwaarde voor de geleidbaarheid — deze laatste valt veel meer samen met de maximumwaarde van $\frac{y}{V_x}$.

Voor ClH en SO_4H_2 wijst de gang van de geleidbaarheid op veel grooter waarden van $\frac{2(a_{13}+a_{14}-a_{12})}{V\,MRT}$ dan 8. Maar om ze met volkomen zekerheid uit de afwisseling der geleidbaarheid met den graad van concentratie te kunnen afleiden, is het noodig al de invloeden die daarbij in het spel komen ten minste te kunnen begrooten. Voorloopige berekeningen hebben mij daarvoor de waarde 12 à 13 geleverd.

OVER OPHOOPING

VAN

ATMOSPHERISCHE STIKSTOF IN CULTUREN VAN BACILLUS RADICICOLA.

DOOR

M. W. BEIJERINCK.



Terwijl ik in vroegere mededeelingen moest vermelden, dat het mij niet was gelukt een winst aan stikstof ten koste van de atmospheer in de culturen van *Bacillus radicicola* aan te toonen, kan ik thans, op grond van proeven, welke op betere kennis van de voedingsvoorwaarden dezer bacterie berusten en doeltreffender waren ingericht, uitkomsten noemen, die overtuigend bewijzen, dat ophooping van stikstof uit de atmospheer in zoodanige culturen mogelijk is.

Deze proeven hebben betrekking op cultuurvloeistoffen. Door middel van de diffusiemethode in gelatine is het mij daarentegen tot nu toe niet gelukt, om met zekerheid tot een overeenkomstig resultaat te geraken. Daar de waargenomen stikstofvermeerdering in de culturen bovendien zeer gering is, acht ik het mogelijk, dat niet de vrije stikstof maar de atmospherische stikstofverbindingen aan deze vermeerdering ten grondslag liggen.

Teneinde de omstandigheden, waaronder de stikstofophooping geschiedt, wel te begrijpen, is het noodig kort aan te geven op welke wijze *Bacillus radicicola* zich voedt.

Deze bacterie behoort tot de koolstofstikstoforganismen, d. w. z. voor volledige voeding en groei moeten, behalve kaliumphosphaat, twee stoffen toegediend worden, waarvan de eene als koolstofbron, de andere als stikstofbron dienst kan doen *). Uit mijn vroegere onderzoekingen was reeds gebleken, dat glucose, en nog beter rietsuiker, voor de koolstofvoedig geschikt zijn †). Uit latere proefnemingen leerde ik, dat niet alleen pepton, maar ook, hoezeer veel minder gemakkelijk, asparagine, zwavelzure ammoniak en kali- of natronsalpeter als stikstofbronnen kunnen fungeeren. Nitriten schijnen in alle verdunningen schadelijk te werken en nimmer tot groei aanleiding te geven.

Verder kwam ik tot het besluit, dat aftreksels van Papilionaceen of verdund moutextract den groei van *Bacillus radicicola* ongemeen begunstigen. Dit berust hoogst waarschijnlijk op het aanwezig zijn in zoodanige aftreksels van *mengsels* van meerdere peptonsoorten, die, gelijk mengsels van voedselstoffen in het algemeen, krachtiger voeden, dan iedere der bestanddeelen afzonderlijk §).

Door de kennis dezer feiten is het mij mogelijk geworden om in cultuurvloeistoffen, niet, gelijk bij mijn vroegere proeven met kunstmatige mengsels, slechts een betrekkelijk geringe vermenigvuldiging der wortelbacteriën te bereiken, maar reeds na verloop van korten tijd, daarin een uiterst

---

*) Peptonoplossingen, zonder verdere toevoeging, geven slechts tot een geringe vermenigvuldigiug aanleiding.

†) Asparagine is daarentegen voor de koolstofvoeding veel minder geschikt. In mijn vroegere mededeelingen heb ik mij daarover geheel anders uitgelaten, waarschijnlijk tengevolge eener verwisseling van *Bacillus radicicola* met de daarmede niet identieke bacterie, die aanleiding geeft tot de »bacteriënuitputting" der knolletjes.

§) Het is wellicht duidelijkheidshalve niet overbodig hier nog een ander voorbeeld te noemen: De bierkaam, *Mycoderma cerevisiae*, kan bij aanwezigheid van een ammoniakzout matig snel groeien en zich vermenigvuldigen ten koste van alkohol, zeer langzaam daarentegen ten koste van glycerine. Geeft men echter deze beide lichamen tegelijkertijd, dan is de daarmede verkregen groei nog sneller dan zich uit de vereeniging der aan den alkohol en de glycerine afzonderlijk toe te schrijven resultaten zou laten verwachten.

rijke bacteriënvegetatie te doen ontstaan. Nog twee punten, waarvan de kennis essentieel bleek te zijn, moet ik vermelden eer ik tot de nauwkeurige beschrijving der genomen proeven overga.

Het eerste punt is de wenschelijkheid om in de vloeistoffen de concentratie van de verschillende voedselbestanddeelen, in het bijzonder van de stikstofverbindingen en de phosphaten, laag te doen blijven.

Alleen het gehalte aan rietsuiker bleek tamelijk onverschillig te wezen, zoodat tusschen de grenzen van $1^1/_2$ pCt. en 5 pCt., met deze stof intensieven groei kan worden opgewekt.

Het tweede punt betreft de temperatuur. Terwijl ik bij vroegere proeven tusschen 10° en 25° C. gewerkt had, koos ik, bij de hier aangevoerde, temperaturen gelegen tusschen 2° en omstreeks 12° C. De reden, die mij daartoe bewoog, was de, ook bij andere bacteriën intusschen gewonnen ervaring, dat hoogere temperaturen wel in menig geval tijdelijk gunstig schijnen te werken, maar op den duur tot verlies van functiën aanleiding kunnen geven. Zoo verliezen de culturen der indische lichtbacteriën, wier licht-optimum bij c.a 30° C. ligt, bij langdurige cultuur op omstreeks 20° C., belangrijk aan lichtkracht en worden ten slotte duister. Zoo verliezen verder verschillende pigmentbacteriën, bijv. *Bacillus prodigiosus*, die nog bij 20° C. tijdelijk uitmuntend kunnen groeien, reeds bij langdurige inwerking van temperaturen tusschen 15° en 20° C. gelegen, zeer belangrijk aan groeikracht. Ook *Bacillus radicicola* in een goede cultuurvloeistof in een thermostaat bij omstreeks 28° C. gekweekt, bleek daarbij belangrijk beschadigd te worden, in zoover de aanvankelijk zeer snelle vermenigvuldiging weldra tot stilstand kwam, onder verlies aan activiteit of zelfs door volledig afsterven der bacteriën, en dit was geschied niettegenstaande voedsel in overvloed voorhanden was. Het verlies aan activiteit bij de wortelbacteriën is o. a. daaraan kenbaar, dat de verzwakte culturen veel moeielijker hun voedingsstikstof kunnen ontleenen aan ammoniakzouten en nitraten dan niet verzwakte.

Laat ik hier nog bijvoegen, dat in deze verschillende ge-

gevens de verklaring is gelegen van het negatieve resultaat mijner vroegere proeven. Daarbij toch heb ik juist die omstandigheden buiten rekening gelaten, welke mij gebleken zijn op de activiteit der wortelbacteriën van bijzonderen invloed te wezen. Ik heb toen namelijk met kunstmatige voedselmassa's gewerkt, waarin de aangeboden stikstofverbindingen niet in eenen voor de aanvankelijke vermenigvuldiging zeer geschikten toestand voorkwamen, zoodat het aantal werkzame bacteriën, per volumeneenheid van de onderzochte mediën, betrekkelijk gering was. Bovendien waren de gekozen temperaturen niet de meest gunstige. Verder was het phosphaatgehalte der cultuurvloeistoffen wellicht te hoog. In een woord de verrichte proeven konden niet wel meer leeren dan zij gedaan hebben, namelijk, dat de stikstof-aanwinst ten koste van de lucht, bij minder juist gekozen voedingsconditiën uitblijft, of in elk geval onmerkbaar gering wordt.

Bij mijn nieuwe proeven heb ik zorg gedragen met een zeer groot aantal zeer actieve bacteriën te werken. Dit is gebleken op de volgende wijze te kunnen geschieden.

Duivenboonen werden in een thermostaat tot ontkieming gebracht. De kiemstengels werden van de kiemplanten afgesneden en 100 gram daarvan kortstondig in een liter duinwater opgekookt. De daarbij verkregen vloeistof is eenigszins looistofhoudend en kleurt zich later ten koste van de ijzerverbindingen, die in het water en de plant voorkomen, licht bruin.

Van dit vocht werden in een aantal KJELDAHL'sche verbrandingskolfjes telkens 100 cub. centim. gedaan, en daaraan in alle gevallen $1^1/_2$ pCt. of 2 pCt. rietsuiker toegevoegd. Eenige dezer kolfjes ontvingen nu nog bovendien $^1/_{30}$ of $^1/_{10}$ gram kaliummonophosphaat, bij de overige geschiedde deze toevoeging niet.

Voor zes beneden aangevoerde, in November begonnen proeven was een boonenstengel-aftreksel gebruikt met een lager stikstofgehalte dan voor die, welke in Januari aanvingen.

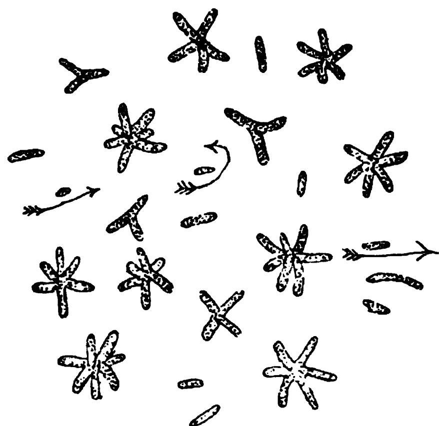
Wat het voor de infectie gebruikte bacteriënmateriaal

betreft is het noodig eenige bepaalde aanwijzingen te doen, daar het, bij proeven in een beperkt tijdsverloop te nemen, wenschelijk is, dat de bacteriënvermenigvuldiging zoo spoedig mogelijk begint, zoodat een zeer groot aantal actieve bacteriën van het oogenblik van het uitzaaien af aanwezig zijn.

Voor alle proeven is gebruik gemaakt van *Bacillus radicicola* var. *Fabae*, in 1889 uit knolletjes van Windsorboonen geisoleerd. De culturen waren op voedingsgelatine bewaard, en, tegen dat de proeven zouden beginnen overgeënt, zoodat de infectie kon geschieden uitsluitend met levende en voor vermeerdering geschikte bacteriën. Als een uitmuntende vaste voedingsbodem was voor de *Fabae*-bacillen de volgende erkend: Afkooksel van lucernestengels (10 deelen op 100 deelen water) met 2 pCt rietsuiker en 8 pCt. zuivere gelatine zonder verdere toevoeging. Bij reageerbuisculturen, uitgevoerd bij omstreeks 10^{0} C, verkrijgt men daarop, uit entstrepen, een zeer aanzienlijke hoeveelheid van een week, gemakkelijk in water te verdeelen, wit bacteriën-slijm, dat ongeveer de consistentie bezit van dikke stijfselpap. Sinds ik gebruik maak van het genoemde mengsel als voedingsbodem en het daarop wassende bacteriënmateriaal, zijn alle bezwaren tegen het verkrijgen der wortelbacteriën in iedere gewenschte hoeveelheid opgeheven. Daar de mikroskopische toestand van de met de lucht in aanraking zijnde oppervlakte dezer culturen zeer merkwaardig is en geheel en al afwijkt van die bij alle andere mij tot nu toe bekend geworden bacteriënsoorten, acht ik het wenschelijk daarover het volgende op te merken.

Terwijl het meer in de diepte gelegen bacteriënslijm uit kortere en langere, in het midden meestal naar een kant opgezwollen staafjes bestaat, waartusschen hier en daar magere bacteroiden verstrooid liggen en talrijke zwermers van de gedaante van korte, dikke staafjes zich voortbewegen, bevat de oppervlakte van het slijm nog een ander morphologisch bestanddeel, waaraan de naam van »bacteriën-sterren" kan gegeven worden. Deze sterren (zie figuur) zijn drie tot veelarmig; de driearmige zijn blijkbaar identiek, wat hun wijze van ontstaan betreft, met de gewone bacteroiden, de meer-

armige kunnen als bacteroiden beschouwd worden, wier vertakking verder is voortgegaan dan gewoonlijk. Daar een nauwkeurig onderzoek leert, dat het centrum, vanwaar de stralen ontspringen, niet een enkel punt is, maar zekere afmeting heeft, is het waarschijnlijk, dat elke nieuwe tak aan den voet van een pas gevormden ontspringt, en, dat niet vele gemeenschappelijk uit een enkele bacterie ontstaan.



Zwermers, sterren en bacteroiden in vloeibare culturen van *Bacillus radicicola* var. *Fabae* (V. 1000).

Deze opvatting geeft dus aanleiding om zulk een ster als een sympodium met verkorte assen te beschouwen. Blijkbaar zijn de polen der afzonderlijke takjes van elkander verschillend. Zou, zoo moet men zich afvragen, ook bij de schijnbaar normale wortel-bacteriën een overeenkomstig verschil tusschen de verschillende deelen van het bacteriënlichaam bestaan? De eigenaardige bochelvormige verdikking, die vele staafjes bezitten en die het begin aanwijst van de deeling, wettigt dit vermoeden, en brengt tot de gedachte, dat de vermenigvuldiging steeds door zijdelingsche vertakking geschiedt en niet door gewone tweedeeling. In ieder geval moet men aannemen, dat de zone, waar de wortelbacteriën groeien, slechts een beperkt gedeelte van het bacteriënlichaam is, en dat dus aan iedere afzonderlijke bacterie in zekeren zin een vegetatiepunt bestaat, waar zich de nieuwe levende stof ontwikkelt. Ofschoon bij andere bacteriën een overeenkom-

stige vertakking tot nu toe niet is gezien, kan men daarom toch niet met zekerheid beweren, dat de staafjes der gewone soorten over hun gansche lengte gelijkmatig groeien, zoodat een eigenlijke vegetatiestreek zou ontbreken; de sterren van *Bacillus radicicola* maken het zelfs waarschijnlijk, dat dit laatste niet zoo algemeen het geval is als dit tot nu toe wordt aangenomen. De zaak verdient verder onderzocht te worden.

Bij het zoeken naar analogieën met de hier beschouwde sterren in andere groepen van mikrobiën, is mijn aandacht, behalve op de wieren *Botryococcus* en *Actinastrum*, gevallen op het geslacht *Actinomyces*, hoezeer de vertakking daarbij meer tot de uiteinden der stralen schijnt bepaald te zijn. Verder heeft LAURENT *), daarop opmerkzaam gemaakt door METSCHNIKOFF, de gelijkenis aangewezen tusschen de door METSCHNIKOFF in de sprieten van *Daphnia* gevonden parasieten, welke hij tot eene afzonderlijke familie, de Pasteuriaceen brengt, en de bacteroiden der Papilionaceen. LAURENT en METSCHNIKOFF hebben echter mijne »bacteriënsterren" niet gezien, en zonderling genoeg, ook niet de talrijke en gemakkelijk waar te nemen zwermers kunnen ontdekken.

Intusschen ben ik het met LAURENT geheel eens, dat de zoo eigenaardige vertakking van *Bacillus radicicola* aanleiding geeft om dit organisme als tot een afzonderlijke groep van bacteriën behoorende te beschouwen. Dat daarom evenwel het woord *Bacillus* niet langer zou mogen gebruikt worden om deze bacteriën aan te duiden, zooals LAURENT wil, berust op misverstand, want nimmer is door mij aangenomen dat deze naam met een waren genusnaam gelijk staat. Welke bacterioloog zal niet moeten toestemmen, dat wat wij tegenwoordig *Bacillus* noemen ongeveer beantwoordt aan het »geslacht" *Chaos* van LINNAEUS, en principieel verschillende groepen omvat?

Maar keeren wij thans tot de vloeistofculturen terug.

Van het beschreven bacteriënslijm, bestaande uit staafjes, bacteroiden, sterren en zwermers, werd een geringe hoeveelheid aan de spits eener platinadraad in de cultuur-

---

*) *Annales de l'Institut* PASTEUR, Tome V, pag. 129, 1891.

vloeistoffen in de Kjeldahl'sche verbrandingskolfjes overgebracht en daarbij telkens, naast een geinfecteerd kolfje een tweede, niet geinfecteerd, aan dezelfde condities blootgesteld. Deze condities bestonden nu daarin, dat alle culturen in een kast in het laboratorium geplaatst werden, waarin slechts weinig licht, en een temperatuur heerschte, die gedurende de maanden October, November, December, Januari, Februari en Maart afwisselde tusschen 5 en 12° C., op enkele dagen gedurende eenige uren 15° C. bereikte, en gedurende de zeer koude nachten van den winter nu en dan op 2° C. is gedaald. De meeste culturen vertoonden reeds na 2 of 3 dagen een duidelijke troebeling. De controle kolfjes zijn zonder een enkele uitzondering volkomen helder gebleven. Het sterilisceren had steeds plaats gevonden door herhaald opkoken gedurende enkele minuten.

De verschijnselen, welke in de kolfjes ten gevolge van den groei der bacteriën werden opgemerkt, waren in vele opzichten belangwekkend. Aanvankelijk ontstond tegen het glas een gelijkmatig beslag van bacteriën, dat op eenigen afstand onder de vloeistofspiegel plotseling eindigde in een scherpen eenigszins gegolfden grensrand. Later, bij het toenemen der bacteriën in getal, heeft zich het beslag naar boven uitgebreid, bijna de oppervlakte bereikt en een grensrand gevormd gelijk de voorgaande.

Intusschen ontstond er op den bodem een wit neerslag, dat, naar het schijnt, uit inactieve of doode bacteriën was samengesteld, wier mikroskopische structuur doet vermoeden, dat een gedeelte van hun lichaamsinhoud tot de cultuurvloeistof was teruggekeerd. Dit witte, zware poedervormige bacteriënneerslag is aanhoudend toegenomen, en, toen de culturen na 8 weken ingedroogd en verbrand werden, was aan de vermeerdering daarvan waarschijnlijk nog geen einde gekomen. Op grond van andere ervaringen vermoed ik, dat deze stilstand onder de gegeven condities wel niet binnen het jaar bereikt zou zijn.

Vooral de tegen den glaswand gevormde bacteriënvegetatie, zooeven genoemd, werd herhaaldelijk door mij mikroskopisch onderzocht, en tot mijn groote verrassing als bijna

geheel uit »bacteriënsterren" bestaande herkend. Overigens vond ik ook in het genoemde praecipitaat vele sterren en bacteroiden.

Boven deelde ik mede, dat aan sommige mijner cultuurvloeistoffen phosphaat was toegevoegd, aan andere niet. Mikroskopisch beantwoordde aan dit verschil in samenstelling het volgende onderscheid in den bacteriëntoestand. Terwijl bij de aanwezigheid van het phosphaat slechts met moeite zwermers konden ontdekt worden en deze zeer klein waren, waren de zwermers in de phosphaatvrije-oplossingen, toen de proeven gestaakt werden, in groot getal aanwezig, en betrekkelijk groot van afmetingen. Sterren werden in het laatste geval veel rijkelijker aangetroffen dan in het eerste, en over het algemeen waren alle leedjes en staafjes sterker gezwollen, en vermoedelijk actiever, in de vloeistof zonder phosphaat dan in de andere.

Ik ga thans over tot de beschrijving van het resultaat der stikstofbepalingen.

Het indampen geschiedde bij 100° C., telkens in het cultuur- en controlekolfje gelijktijdig in een luchtstroom, die zich, nabij de openingen der kolfjes, door middel van een drieweggiasbuis in tweeën vertakte. Steeds was nog suiker in overmaat voorhanden. Voor het verbranden dienden 20 cM^3 sterk zwavelzuur met phosphorzuuranhydriet en een droppel metallisch kwik. Bij het afdistilleeren werd verdund met 400 cM^3 water, 20 cM^3 natronloog van 40 pCt. en 20 cM^3 zwavelkaliumoplossing toegevoegd. Voor het opvangen van de ammoniak dienden 25 cM^3 $^1/_{10}$ normaal zwavelzuur. Het titreeren geschiedde volgens Kjeldahl's voorschrift jodometrisch. Hierbij waren 25 cM^3 $^1/_{10}$ norm. zwavelzuur = 27.2 cM^3 natriumhyposulfiet. De sterkte der hyposulfietoplossing was op verschillende wijzen gecontroleerd, 17 cM. waren aequivalent gevonden met 0.2 gr. J. dus:

$$1\ cM^3 \text{ hyposulfiet} = 0.001302 \text{ gr. N.}$$

Voor het titreeren werden 5 cM^3 joodzurekali (4 gr. op 100 cM^3 H^2O) en 5 cM^3 joodkalium (24 gr. op 100 cM^3

H^2O) toegevoegd. De getallen zijn tot in de tiendedeelen van milligrammen vertrouwbaar.

1e *Proef* Aan het boonenstengselafkooksel was behalve 2 gr. rietsuiker $^1/_{10}$ gr. KH^2PO^4 toegevoegd.

Duur der proef 15 November 1890 tot 15 Januari 1891.

Zonder infectie.		*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen*	
27.2	cM^3 hyposulf. aeq. 25 cM^3 $^1/_{10}$ norm. SO^4H^2	27.2	cM^3 hyposulf. aeq. 25 cc. SO^4H^2
23.4	hyposulf. gevonden	22.7	hyposulf. gebruikt
3.8	hyposulf. aequiv. gevormde ammoniak	4.5	hyposulf. aeq. ammoniak

$3.8 \times 0.001302 = 0.0049476$ gr. N. $\quad 4.5 \times 0.001302 = 0.0058590$

0.0058590
0.0049476

Winst aan stikstof 0.0009114 gr. in 100 cM^3 cultuurvloeistof.

Op deze cultuurkolven was een U-vormige buis geplaatst met glaskralen en verdund zwavelzuur, om de toetredende lucht te wasschen.

2e *Proef.* Als voorgaande, maar zonder U-vormige buis.

Niet geïnfecteerd.		*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*	
27.2	cM^3 hyposulf.	27.2	cM^3 hyposulfiet
23.4	» » gevonden	22.5	» » gevonden
3.8	» » aeq. ammoniak	4.7	» » aeq. ammoniak

$3.8 \times 0.001302 = 0.0049476$ gr. N. $\quad 4.7 \times 0.005502 = 0\ 0061194$ gr. N.

0.0061194
0.0049476

Winst aan stikstof 0.0011718 gr.

3e *Proef.* Als voorgaande, maar slechts met $^1/_{30}$ gr. KH^2PO^4.

Duur der proef 15 November 1890 tot 15 Februari 1891.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
23.3 » » gevonden	21.9 » » gevonden
3.9 » » aeq. ammoniak	5.3 » » aeq. ammoniak
3.9 × 0.001302 = 0.0050778	5.3 × 0.001302 = 0.0069006

0.0069006
0.0050778

Winst aan stikstof 0.0018228.

4e *Proef.* Aan een ander afkooksel van boonenstengel alleen 2 pCt. rietsuiker toegevoegd en geen phosphaat.

Duur der proef 15 Januari tot 15 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
22.1 » » gevonden	20.9 » » gevonden
5.1	6.3

6.3 × 0.001302 = 0.0082026 gr. N
5.1 × 0.001302 = 0.0066402

Winst aan stikstof = 0.0015624.

5e *Proef.* Als voorgaande.

Duur 15 Januari tot 17 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 cM³ hyposulf.
22.2 » » gevonden	21.4 » » gevonden
5	5.8

5.8 × 0.001302 = 0.0075516
5.0 × 0.001302 = 0.0065100

Winst aan N. = 0.0010416

6e *Proef.* Als voorgaande maar gelijk volume water aan de cultuurvloeistof toegevoegd.

Duur der proef 15 Januari tot 19 Maart.

Niet geïnfecteerd.	*Geïnfecteerd met Fabae-bacillen.*
27.2 cM³ hyposulf.	27.2 hyposulfiet
22.1	21.1
5.1	6.1

$$6.1 \times 0.001302 = 0.0079422$$
$$5.1 \times 0.001302 = 0.0066402$$
$$\text{Winst aan stikstof} = 0.0013020 \text{ gr.}$$

Bij deze proeven is de winst aan stikstof gering ; dit blijkt vooral duidelijk wanneer men de gevonden stikstof omrekent per liter vloeistof, en uitdrukt, door vermenigvuldiging met 6.25 in eiwit, en, — aannemende, dat de bacteriën voor $^3/_4$ van hun gewicht uit water, voor $^1/_4$ uit eiwit bestaan, — door vermenigvuldiging van het eiwit met 4, in bacteriënzelfstandigheid. Men krijgt dan het volgende overzicht

	Winst aan stikstof per liter.	Winst aan eiwit per liter.	Winst aan bacteriën per liter.
1e Proef..	0.009114 gr.	0.0569625 gr.	0.227850 gr.
2e »	0.011718 »	0.0931375 »	0.292550 »
3e »	0.018228 »	0.1129140 »	0.451656 »
4e »	0.015624 »	0.0976500 »	0.390600 »
5e »	0.010416 »	0.0651000 »	0.260400 »
6e »	0.013020 »	0.0813750 »	0.325500 »

Bij de beoordeeling dezer zeker niet groote hoeveelheden bedenke men, dat de proeven slechts betrekkelijk kort hebben geduurd, en de bacteriën in alle gevallen in volle activiteit verkeerden toen de cultuur gestaakt en tot de verbranding overgegaan werd. Bovendien laat zich een sterke ophooping van stikstof in culturen wier eindproducten niet worden weggevoerd, niet a priori verwachten. Aangenomen dat de vorm, waarin de stikstof zich ophoopt, niet uitsluitend uit vaste bacteriën-zelfstandigheid bestaat, maar als opgelost lichaam (bijv. als eiwit) in de cultuurvloeistof aanwezig blijft, zonder voor vernieuwden bacteriëngroei dienst te doen, dan is wellicht juist in de vermeerdering van dat product een tegenwerkende oorzaak tot de vorming er van

gelegen, eene oorzaak, die in de plant, waar het aanhoudend wordt afgevoerd, niet zou behoeven te bestaan.

Met de *Robinia*-bacillen, die nog langzamer groeien dan die van *Vicia Faba*, heb ik in het genoemde tijdsverloop van acht weken geen stikstoftoeneming kunnen verkrijgen, ofschoon ik op grond van den tegenwoordigen toestand mijner later begonnen culturen daarbij dezelfde verschijnselen als bij *Bacillus Fabae* verwacht te zullen opmerken.

Dat deze kleine hoeveelheden stikstof voor de beoordeeling van het hoofdresultaat der proeven, wat de nauwkeurigheid der waarneming betreft, aan zekerheid niets te wenschen, overlaten behoeft voor de genen, die met KJELDAHL's methode vertrouwd zijn, naar ik meen geen nader betoog.

Wel verdient overwogen te worden tot welke bronnen van onzekerheid de genoemde getallen aanleiding geven, wanneer daaruit zal besloten worden dat de Papilionaceenbacteriën werkelijk atmorpherische stikstof binden.

Vooreerst rijst de vraag in hoever het mogelijk is, dat de boonenstengelafkooksels stikstofverbindingen bevatten, die zich aan de stikstofbepaling volgens KJELDAHL's voorschrift onttrekken, maar als voedsel voor *Bacillus radicicola* kunnen dienen en dan, als bacteriënzelfstandigheid, gemakkelijk in ammoniak kunnen omgezet worden.

Voor zoover ik weet kan hierbij alleen aan salpeterzuur gedacht worden. Daar evenwel de gebruikte aftreksels geen reactie met diphenylamine hebben gegeven, evenzoomin vóór als na het eindigen der culturen, acht ik de mogelijkheid der stikstofwinst als het gevolg van de omzetting van nitraten uit de cultuurvloeistof in bacteriënstikstof als volkomen uitgesloten.

Een andere vraag is het of de bacteriën bij hun groei inderdaad de vrije atmorpherische stikstof opnemen en niet wellicht in de laboratoriumlucht een gezoegzame hoeveelheid chloorammonium of salpeterzure-ammoniak hebben gevonden om daardoor de gevonden stikstofaanwinst verklaarbaar te maken.

Ten einde daaromtrent iets meer te weten te komen is bij de 1e proef de toetredende lucht door een op de kul-

tuurkolf geplaatste U-vormige buis met glaskralen en verdund zwavelzuur aangevuld, gewasschen. Men ziet echter uit de opgegeven getallen, dat hierdoor geen beslissend antwoord op de gestelde vraag is verkregen, ofschoon de niet onbelangrijke stikstofwinst eer schijnt te spreken voor de binding van vrije stikstof dan van de zouten ervan, in het bijzonder omdat ook Hellriegel en Wilfahrt tot deze conclusie zijn gekomen, maar bij hen ontbreekt eveneens het volledige bewijs. Het komt mij daarom noodig voor op deze onzekerheid de aandacht te blijven vestigen, en de binding van vrije stikstof door onze bacterien niet als bewezen te beschouwen eer het voldingend bewijs is geleverd, dat zij door het uitputten van hun omgeving aan stikstofverbindingen, — hetgeen zij met zekerheid vermogen te doen, — geen aanleiding geven tot een voor de waargenomen stikstofvermeerdering toereikende toestrooming dezer verbindingen uit de atmospheer.

Van dit oogpunt uit verdienen ook andere mikrobiën, die hun omgeving volledig van stikstofverbindingen kunnen berooven, en die niet tot de Papilionaceen in een symbiostisch verband staan, bijv. het geslacht *Streptothrix*, nader onderzocht te worden. Kan het worden aangetoond, dat ook met deze laatste organismen, in een passenden voedingsbodem stikstofophooping is te bereiken, dan zoude dit proces bij de Papilionaceen, door middel hunner specifieke wortelmikroben veel aan klaarheid winnen. Het zou dan n.l. gemakkelijker begrijpelijk wezen, waarom een zoo gewichtige functie als de binding van vrije atmospherische stikstof, aan het protoplasma van alle hoogere planten en dieren onthouden is, hetgeen zeer bevreemdend zou zijn, wanneer zoodanige eigenschap bij organismen, laagstaande in het natuurlijk systeem, werkelijk aanwezig ware. Dat daarentegen sommige mikroben nog stikstofverbindingen kunnen onttrekken aan oplossingen, die zoo verdund zijn, dat de wortels der hoogere planten dit niet meer vermogen, is veel begrijpelijker.

De beide hoofdpunten van al het voorafgaande nog kort samenvattende, kom ik tot het besluit, dat de wortelbac-

teriën der Papilionaceen, bij aanwezigheid van glucose of rietsuiker in cultuurvloeistoffen aanleiding kunnen geven tot ophooping van stikstof ten koste van de atmospheer. Dat het evenwel noch door de proeven van HELLRIEGEL en WILFAHRT, noch door die van SCHLÖSING, die HELLRIEGEL's resultaten bevestigd heeft, noch door de mijne als bewezen kan worden beschouwd, dat daarvoor de vrije atmospherishe stikstof, door een physiologisch proces wordt omgezet, maar dat nog steeds de mogelijkheid schijnt te bestaan, dat alleen stikstofverbindingen voor de stikstofvoeding van *Bacillus radicicola* geschikt zijn.

Uit de vastgestelde cultuurvoorwaarden der wortelbacterien laat zich de waarneming van HELLRIEGEL en WILFAHRT, dat wel in de plant en niet in den grond stikstofophooping bij hun proeven was aan te toonen, gemakkelijk verklaren. Dit moet namelijk het gevolg zijn van het ontbreken van het voor de stikstofbinding noodzakelijke koolhydraat, — bij mijn proeven de rietsuiker. Daar zulke lichamen in den, bij hun proeven steeds gegloeiden grond natuurlijk ontbraken, kon daarin geen belangrijke vermeerdering der wortelmikroben plaats vinden. Maar zelfs wanneer in den grond een zekere hoeveelheid suiker aanwezig ware, dan nog zou het niet waarschijnlijk zijn dat deze ten goede zou komen aan zulk een langzaam groeiend organisme als *Baccillus radicicola*, veeleer zou de suiker door andere, sneller groeiende bacteriën worden opgebruikt.

Thans rest ons nog de beschouwing van een laatste vraagstuk. Ik bedoel het mechanisme der stikstofvoeding bij de Papilionaceen, wanneer hun wortels door middel der wortelmikrobiën stikstof ophoopen.

Naar het mij voorkomt moet deze voeding uitsluitend berusten op het afsterven van de in de knolletjes aanwezige bacteroiden, daar alleen de doode bacteroiden geschikt schijnen te wezen om de opgenomen stikstof of stikstofverbindingen als eiwit af te staan. Als deze onderstelling juist is dan doen zich de volgende vragen voor: Kan de plant invloed uitoefenen op het afsterven van de bacteroiden of op de vernieuwde vorming daarvan? Dit zou bijv. dan noodza-

kelijk wezen, wanneer de grond arm is aan stikstofverbindingen, waardoor de behoefte der plant aan »bacteroidenstikstof" stijgt. Zoo ja, op welke wijze komt zoodanige invloed dan tot stand?

Wat het afsterven der bacteroiden betreft zie ik niet in op welke wijze de plant daarop direct kan inwerken; dat dit niet geschiedt door middel van enzymen, volgt uit het steeds ontbreken van pepsine en trypsine in de knolletjes. Gemakkelijker schijnt de vraag te beantwoorden te zijn hoe de vermeerdering der bacteriën in de knolletjes het gevolg van stikstofarmoede in de plant kan wezen. Men moet n.l. veronderstellen, dat een te kort aan assimileerbare stikstof in de plant tot het onstaan van een overmaat van koolhydraten zal aanleiding geven, omdat de eiwitvorming dan moet ophouden terwijl de koolzuurontleding voortgaat. Er is dan alle reden om aan te nemen, dat de koolhydraten ten goede komen van de bacteriën en deze daardoor in de gelegenheid gesteld worden ten koste van stikstof uit de omgeving zich krachtiger te gaan vermeerderen.

In welken toestand de aan de afstervende bacteroiden ontleende lichamen zich door de plant bewegen om de bovenaardsche deelen te bereiken, en langs welke wegen deze strooming geschiedt, zijn nog onbeantwoorde vraagstukken. Als pepton kunnen die producten der opgeloste bacteroiden moeielijk de knolletjes verlaten, want juist peptonen worden bij uitstek gemakkelijk door de wortelbacteriën, bij tegenwoordigheid van suiker voor eigen voeding gebruikt. Wellicht geschiedt de strooming in den vorm van een eiwit, dat wel kan dienen voor voeding van de plant en niet voor de bacteriën; ik houd mij bezig met dienaangaande proeven te nemen, waarover ik later hoop te kunnen berichten.

OVERZICHT

VAN DE

BOEKWERKEN

DOOR DE

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN

ONTVANGEN EN AANGEKOCHT.

1890—1891.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN APRIL EN MEI 1890.

NEDERLAND.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1890. Jaarg. 6. N°. 1. 8°.

J. Bruinwold Riedel. De Maatschappij »tot Nut van 't Algemeen", haar werken en streven naar de behoeften des tijds. Amsterdam 1890. 8°.

G. A. M. Groeneveldt. Arbeidswetgeving. 8°. (Maatschappij tot Nut van 't Algemeen).

Revue internationale des falsifications. Amsterdam 1890. 3e Année. Livr. 9—10. 4°.

H. C. Rogge. De wetenschap der geschiedenis en hare methode. Amsterdam 1890. Redevoering. 8°.

Archives du Musée Teyler. Haarlem 1890. Série 2. Vol. III. Part. 4. gr. 8°.

Fondation Teyler. Catalogue de la Bibliothèque. Harlem 1889—1890. Vol. II. Auteurs Grecs et Latins. Livr. 1—3. gr. 8°.

Tijdschrift. Orgaan der Nederlandsche Maatschappij tot bevordering van Nijverheid. Haarlem 1890. N°. 3—6. 8°.

Zoölogische Ergebnisse einer Reise in Niederländisch Ost-Indien, herausgegeben von Dr. Max Weber. Leiden 1890. Heft 1. gr. 8°.

W. Burck. Ueber Kleistogamie im weiteren Sinne und das Knight-Darwin'sche Gesetz. Leide 1890. gr. 8°. (Extrait des Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Vol. VIII.)

P. J. Dekkers. Over het Tetramethyleenglycol. Leiden 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

I. C. A. Simon Thomas. Propyl- en isopropylnitramine. Leiden 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

Departement van Oorlog. Vervolg op de lijst van voorhanden kaarten en instrumenten. 's Gravenhage 1890. 8°.

Mededeelingen betreffende het Zeewezen. 's Gravenhage 1890. Deel XXVI. Afl. 6. 8°.
(Uitgegeven door het Departement van Marine.)

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van

Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1890. 5de Reeks. Deel V. Afl. 2. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1890. Afl. 3. 1ste gedeelte. Afl. 4. 2de gedeelte. 4°.

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor Lijkverbranding. 1890. Jaarg. 15. N°. 1—2. 8°.

H. G. van de Sande Bakhuyzen. Beschreibung eines Apparats zur Bestimmung des absoluten persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen nebst Mittheilung der damit erhaltenen Resultate. Haag. z. j. 4°. (Aus dem VIIen Bande der Annalen der Sternwarte in Leiden.)

A. A. Vorsterman van Oyen. Geslachtlijst der familie toe Laer. 's Gravenhage 1890. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis-, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1890. Jaarg. 7. N°. 3—4. 4°.

J. F. van Bemmelen. De erfelijkheid van verworven eigenschappen. 's Gravenhage 1890. 8°. (Uitgegeven door het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen.)

Verslag van het verhandelde in de algemeene vergadering van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, gehouden den 25 Juni 1889. Utrecht 1889. 8°.

Aanteekeningen van het verhandelde in de sectie-ver-

gaderingen van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen, ter gelegenheid van de algemeene vergadering, gehouden den 25 Juni 1889. Utrecht. z. j. 8°.

Vervolg benevens wijzigingen en toevoegsels op den Catalogus der archeologische verzameling van het provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Utrecht 1890. 8°.

Barometerstanden en winden in de golf van Aden en den Indischen Oceaan bij kaap Guardafui. Utrecht 1889. 4°. Oblong.
(Uitgegeven door het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut).

Mededeelingen en Berichten der Geldersch-Overijselsche Maatschappij van Landbouw, over 1889. N°. 1. Lochem 1890. 8°.

Verslag der Commissie ter verzekering eener goede bewaring van gedenkstukken van Geschiedenis en Kunst te Nijmegen, over het jaar 1889. Nijmegen. 8°.

Werken van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Noord-Brabant. 's Hertogenbosch 1890. Nieuwe Reeks. N°. 4. 8°.

Inhoud:

A. Sassen. De protocollon der Helmondsche notarissen (1595—1798).

Catalogus van de Buma-Bibliotheek te Leeuwarden. 1ste Vervolg. Leeuwarden 1890. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Nieuwe Serie. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde

voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Februari, Maart, April 1890. 's Gravenhage 1890. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden November-December 1889. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden November-December 1889. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Dagh-Register gehouden int Casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlants-India. Anno 1661. Batavia 1889. gr. 8°.
(Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Leide 1890. Vol. VIII. Part. 2. Vol. IX. Part. 1. gr. 8°.

I. Groneman. Tjandi idjo Iogjakårtå. z. p. en j. 8°.

BELGIE.

Bulletin de l'Académie royale des Scienes, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1890. 3e Série. Tome XIX. N°. 3—4. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N°. 3—4. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Bruxelles 1890. Tome X. Fasc. 1. 8°.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1890. Tome XXIII. 8⁰.

Procès-verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique du 1 Juillet 1888 à 7 Juillet 1889. 8⁰.

Coutumes du duché de Limbourg et des pays d'Outre-Meuse par C. Casier et L. Crahay. Bruxelles 1889. 4⁰.

G. van der Mensbrugghe. Sur la condensation de la vapeur d'eau dans les espaces capillaires. Bruxelles 1890. 8⁰.

(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3ᵉ Série. Tome XIX).

Annales de la Société géologique de Belgique. Liége 1889. Tome XIV. Livr. 2. Tome XVI. Livr. 1. 8⁰.

Annuaire de l'Université catholique de Louvain. 1890. Année 54. kl. 8⁰.

Société littéraire de l'Université catholique de Louvain. Choix de Mémoires XIV. Bruges 1889. 8⁰.

J. Desilve. De schola elnonensi sancti amandi a saeculo IX ad XII usque. Lovanii 1890. Dissertatio. gr. 8⁰.

H. Meert. Het voornaamwoord *Du*. Gent 1890. gr. 8⁰. (Koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde).

Botanisch Jaarboek, uitgegeven door het kruidkundig Genootschap „Dodonaea". Gent 1890. Jaarg. 2. 8⁰.

Annales de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1888. 4ᵉ Série. Tome IV. 8⁰.

Bulletin de l'Académie d'archéologie de Belgique. Anvers 1888—1889. 4e Série. N°. 17—21. 8°.

A. DE CEULENEER. Le Colorado. Anvers 1890. 8°. (Extrait des Bulletins de la Société royale de Géographie d'Anvers).

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CX. N°. 12—20. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1890. 4e Série. Tome XVII. Novembre-Décembre. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1890. 3e Série. Tome XXIII. N°. 12—20. 8°.

Compte rendu sommaire des séances de la Société philomatique de Paris. 1890. N°. 12. 14—16. 8°.

Bulletin de la Société mathématique de France. Paris 1889—1890. Tome XVII. N°. 6. Tome XVIII. N°. 1—4. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1890. 9e Série. Tome II. N°. 2—13. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N°. 705—714. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1890. 6e Année. Tome X. N°. 103—106. gr. 8°.

H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN et BASSOT. Détermina-

tion de la différence de longitude entre Leyde et Paris. Paris 1889. 4⁰.

R. BONAPARTE. Le premier établissement des Néerlandais à Maurice. Paris 1890. 4⁰.

__________ Le glacier de l'Aletsch et le lac de Märjelen. Paris 1889. 4⁰.

__________ La Laponie et la Corse. 8⁰. (Extrait du Globe. Journal géographique. Tome XXVIII).

__________ Les danseuses javanaises. gr. 8⁰. (La Nature. Année 17. N⁰. 839).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Philosophical Transactions of the royal Society. London 1890. Vol. CLXXX. 4⁰.

Inhoud:

G. H. DARWIN. On the mechanical conditions of a swarm of meteorites, and on the ories of cosmogony.

A. R. FORSYTH. A class of functional invariants.

W. DE W. ABNEY. Total eclipse of the sun observed at Caroline Islands, on 6th May 1883.

W. RAMSAY. On evaporation and dissociation. VIII. A study of the thermal properties of propyl alcohol.

C. V. BOYS. The radio-micrometer.

G. H. BRYAN. The waves on a rotating liquid spheroid of finite ellipticity.

I. A. EWING. On the magnetisation of iron and other magnetic metals in very strong fields.

I. CONROY. Some observations on the amount of light reflected and transmitted by certain kinds of glass.

L. DARWIN, A. SCHUSTER and E. W. MAUNDER. On the total solar eclipse of August 29, 1886.

S. J. PERRY. Report of the observations of the total solar eclipse of August 29, 1886 made at the island of Carriaçou.

W. DE W. ABNEY. On the determination of the photometric intensity of the coronal light during the solar eclips of August 28—29, 1886.

H. H. TURNER. Report of the observations of the total solar eclipse of August 29, 1886, made at Grenville, in the island of Grenada.

I. W. MALLET. Revision of the atomic weight of gold.

I. HOPKINSON. Magnetic and other physical properties of iron at a high temperature.

A. SCHUSTER. The diurnal variation of terrestrial magnetism.

I. B. LAWES. On the present position of the question of the sources of the nitrogen of vegetation, with some new results, and preliminary notice of new lines of investigation.

I. N. LANGLEY and H. M. FLETCHER. On the secretion of saliva, chiefly on the secretion of salts in it.

W. C. WILLIAMSON. On the organisation of the fossil plants of coal-measures. XV. and XVI.

A. D. WALLER. On the electromotive changes connected with the beat of the mammalian heart, and of the human heart in particular.

H. G. SEELEY. Researches on the structure, organization, and classification of the fossil reptilia. VI. On the Anomodont Reptilia and their allies.

W. BATESON. On some variations of Cardium edule apparently correlated to the conditions of life.

E. P. FRANCE. On the descending degenerations which follow lesions of the Gyrus Marginalis and Gyrus fornicatus in monkeys.

Proceedings of the royal Society of Londen. 1890. Vol. XLVII. N⁰. 287—288. 8⁰.

List of the royal Society, 30 November 1889. 4⁰.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1890. Vol. L. N⁰. 5—6. 8⁰.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1890. New Series. Vol. XII. N⁰. 4—5. 8⁰.

Transactions of the zoological Society of London. 1889—1890. Vol. XII. Part 9—10. 4⁰.

Inhoud:

W. F. Kirby. A revision of the subfamily Libellulinae, with descriptions of new genera and species.
A. Dendy. Observations on the West-Indian Chalinine sponges, with descriptions of new species.
F. E. Beddard. On the structure of Hooker's Sea-Lion (Arctocephalus Hookeri).

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society of London. 1889. Part 2—4. 8⁰.

Proceedings of the royal Institution of Great Britain. London 1889. Vol. XII. Part 3. 8⁰.

Royal Institution of Great Britain. List of the members. London 1889. 8⁰.

Journal of the royal microscopical Society. London 1890. Part 2. 8⁰.

Medico-chirurgical Transactions published by the royal medical and chirurgical Society of London. 1889. Vol. LXXII. 8⁰.

Proceedings and Transactions of the natural History Society of Glasgow. 1890. New Series. Vol. II. Part 2. Vol. III. Part 1. 8⁰.

Report of the scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873—76. London 1889. Physics and Chemistry. Vol. II. 4⁰.

Rousdon Observatory, Devon. Meteorological observations for the year 1889. London 1889. Vol. VI. 4⁰.

Transactions of the royal Irish Academy. Dublin 1890. Vol. XXIX. Part 13. 4⁰.

Inhoud:

W. DOBERCK. Markree observations of double stars.

Royal Irish Academy. Cunningham Memoirs. N⁰. V Dublin 1890. 4⁰.

Inhoud:

I. BIRMINGHAM. The red stars. Observations and Catalogue. New edition by T. E. ESPIN.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1889. Band XIII. Heft 1. Band XV. Heft 1. gr. 4⁰.

Inhoud, Bd. XIII. 1.

G. STACHE. Die Liburnische Stufe und deren Grenz-Horizonte. Heft 1. Lief. 1. Geologische Übersicht und Beschreibung der Faunen- und Floren-Reste.

Bd. XV. 1.

G. GEIJER. Ueber die liasischen Brachiopoden der Hierlatz bei Hallstatt.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1889. Band XXXIX. Heft 3—4. 4⁰.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1890. N⁰. 3—5. 4⁰.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1889. 3te Folge. Heft 33. 8⁰.

Mitteilungen des historischen Vereines für Steiermark. Graz 1889. Heft 37. 8⁰.

Jahrbuch des naturhistorischen Landes-Museums von Kärnten. Klagenfurt 1889. Heft 20. 8°.

Naturhistorisches Landes-Museum von Kärnten. Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen zu Klagenfurt. Witterungsjahr 1887—1889. gr. 4°.

Bollettino della Societa Adriatica di Scienze naturali. Trieste 1890. Vol. XII. 8°.

Sitzungsberichte der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Prag 1889. Band I. 8°.

E. Weijr. O theorii forem bilinearnych. Praze 1889. 8°.

Casopis pro pestovani mathematiky a fijsiky, vydava Iednota ceskych mathematiku. Praze 1890. Rocnik XIX. Cislo 4. 8°.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1890. N°. 3—4. 8°.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1889. N°. 39—53. gr. 8°.

Deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1889. Berlin 1890. Heft 2. gr. 4°.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1890. N°. 9—21. 4°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1890. Band CXIX. Heft 2—3. Band CXX. Heft 1. 8°.

J. M. van Bemmelen. I. Die Zusammensetzung des Meeresschlicks in den neuen Alluvien des Zuiderzee (Niederlande). — II. Die Zusammensetzung des vulkanischen Bodens in Deli (Sumatra) und in Malang (Java) und des Fluss- Thon- Bodens in Rembang (Java). III. Ueber die Bestimmung des Wassers, des Humus, des Schwefels, der in den colloïdalen Silikaten gebundenen Kieselsäure, im Ackerboden. Berlin 1890. 8°.
(Landwirtschaftlichen Versuchs-Stationen).

Nachrichten von der kön. Gesellschaft der Wissenschaften aus dem Jahre 1889. Göttingen 1889. 4°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. 13. N°. 331—335. 8°.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1889. Band XI. N°. 5. 4°.

Inhoud:

B. Delbrück. Die indogermanischen Verwandschaftsnamen. Ein Beitrag zur vergleichenden Altertumskunde.

Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1889. Philologisch-historische Classe. 1889. N°. 2—3. 8°.

Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft. Leipzig 1889. N°. X der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section. 4°.

Inhoud:

A. Looss. Ueber Degenerations-Erscheinungen im Thierreich, besonders über die Reduction des Froschlarvenschwanzes und die im Verlaufe derselben auftretenden histolytischen Processe.

Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1890. 2te Reihe. Teil VIII. Heft 4. 8°.

Petermann's Mitteilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt. Gotha 1890. Band XXXVI. N°. 1—4. Ergänzungsheft N°. 97. 4°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a. S. 1889. 4te Folge. Band VIII. Heft 3—6. 8°.

Die Pflanzen und Thiere in den dunklen Räumen der Rotterdamer Wasserleitung. Bericht über die biologischen Untersuchungen der Crenothrix-Commission zu Rotterdam, vom Jahre 1887. Erstattet von Hugo de Vries. Jena 1890. 8°.

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1890. Band XVI. Heft 1. 4°.

Inhoud:

H. Simroth. Die von Herrn E. von Oertzen in Griechenland gesammelten Nacktschnecken.

O. Böttger. Verzeichnis der von Herrn E. von Oertzen aus Griechenland und aus Kleinasien mitgebrachten Vertreter der Landschneckengattung Clausilia Drp.

H. B. Möschler. Die Lepidopteren-Fauna von Portorico.

Jahrbücher der königlichen Akademie gemeinnütziger

Wissenschaften zu Erfurt. 1890. Neue Folge. Heft XVI. 8°.

Neues Lausitzisches Magazin; herausgegeben im Auftrage der oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1889. Band LXV. Heft 2. 8°.

Mitteilungen des oberhessischen Geschichtsvereins. Giessen 1890. Neue Folge. Band II. 8°.

S. Widmann. Franz Behem. Ein Beitrag zur Geschichte des Buchhandels und der Literatur des sechzehnten Jahrhunderts. Paderborn 1889. 8°.
(Verein für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung).

11ter Bericht des botanischen Vereins in Landshut über die Vereinsjahre 1888—89. Landshut 1889. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der k. bayr. Akademie der Wissenschaften. München 1890. Heft 1. 8°.

Tageblatt der 62 Versammluug deutscher Naturforscher und Aerzte in Heidelberg vom 18 bis 23 September 1889. Heidelberg 1890. 4°.

Publication der königlichen Sternwarte in Kiel. 1890 N°. IV. 4°.

Inhoud:

Anhang zu den Zonenbeobachtungen der Sterne zwischen 55 und 65 grad nördlicher Declination angestellt an den Sternwarten zu Helsingfors und Gotha.

A. Kiessling. Commentariolum Propertianum. Gryphiswaldiae 1889. 4°.

E. Maass. Parerga attica. Gryphiswaldiae 1889. 4°.

H. Cremer. Ueber den Einflusz des christlichen Princips der Liebe auf die Rechtsbildung und Gesetzgebung. Greifswald 1889. Rede. 8°.

R. Ablass. Die Impfung Neugeborener. Breslau 1889. 8°.

G. Andrae. Ueber traumatische Luxation des Nervus Ulnaris am Ellbogen. Greifswald 1889. 8°.

A. Backhaus. Ueber die Behandlung des Typhus abdominalis mit Darminfusionen von Tanninlösung. Greifswald 1889. 8°.

W. von Bartkowski. Beiträge zur Enucleation des Bulbus. Greifswald 1889. 8°.

J. Beck. Ueber Ankylostoma duodenale und Ankylostomiasis bei Bergleuten. Greifswald 1889. 8°.

F. Behrendt. Ueber einen complicirten Fall von Beckenfractur. Greifswald 1889. 8°.

A. Beltz. Zur Behandlung des Keuchhustens. Greifswald 1889. 8°.

F. Berndt. Zur Pathologie und Therapie der Darmruptur. Greifswald 1889. 8°.

A. Beijer. Enterotomie bei Ileus. Greifswald 1889. 8°.

P. Bienwald. Beitrag zur Kenntnis der Thymusgeschwülste. Greifswald 1889. 8°.

H. Blanck. Ein Fall von dreifacher Ruptur des Sphincter iridis. Greifswald 1889. 8°.

F. Buchal. Ueber den primären Krebs des Prostata. Greifswald 1889. 8°.

M. Crüger. Ueber die Pott'sche Seitenlage bei Oberschenkelfracturen. Greifswald 1889. 8°.

L. Deichmann. Erregung secundärer Empfindungen im Gebiete der Sinnesorgane. Greifswald 1889. 8°.

H. Deiters. Beiträge zur Aetiologie der Magenerweiterung. Greifswald 1889. 8°.

A. Ebert. Ueber Resection des Talocruralgelenkes mit dorsalem Lappenschnitt. Greifswald 1889. 8°.

A. Ehm. Beiträge zur Casuistik seltener Lipome. Greifswald 1889. 8°.

H. Freijer. Ein Fall von Enchondrom der Oberkiefer. Greifswald 1889. 8°.

F. Friedel. Ein Fall von symmetrischer Gangrän. Greifswald 1889. 8°.

F. Glasow. Beitrag zur Wirkung des Glycerins auf Darmentleerung. Greifswald 1889. 8°.

H. Glöckner. Ein Beitrag zur Behandlung der Laryngo-Phthisis tuberculosa durch die Tracheotomie nach M. Schmidt. Greifswald 1889. 8°.

B. Hartleib. Beiträge zur therapeutischen Verwertung der Kamphersäure. Greifswald 1889. 8°.

E. Hartwich. Ueber lokale Behandlung bronchiectatischer Cavernen. Greifswald 1889. 8°.

E. Haumann. Ueber Syringomyelie nebst Beschreibung eines neuen Falls. Greifswald 1889. 8°.

W. Haupt. Zur Diagnose der Echinococcen im weiblichen Becken. Greifswald 1889. 8°.

O. Heinze. Ueber myopathische und mechanische Stimmstörungen. Greifswald 1889. 8°.

P. Helbig. Ein Fall einer Complication von Carcinoma uteri mit Gravidität. Greifswald 1889. 8°.

H. Held. Ueber Azoverbindungen der Salicylsäure und Derivate derselben. Greifswald 1889. 8°.

E. Helpup. Ueber die toxischen Eigenschaften des Zinks. Greifswald 1889. 8°.

E. Holm. Zur Kreosot-Therapie bei Lungentuberkulose. Greifswald 1889. 8°.

A. Jaczijnski. Ueber Korektopia congenita. Greifswald 1889. 8°.

E. Kindt. Ein Fall von Meningitis spinalis chronica ascendens nach croupöser Pneumonie. Greifswald 1889. 8°.

M. C. Kirchhoff. Die Perineorrhaphie nach Lawson-Tait. Greifswald 1889. 8°.

E. Kirsch. Ueber acutes (angioneurotisches) Hautoedem. Greifswald 1889. 8°.

F. Koch. Beitrag zur Heilung des Empyems durch Rippenresektion. Greifswald 1889. 8°.

W. Kröning. Die Behandlung der Neuralgie des Trigeminus durch Oleum crotonis. Greifswald 1889. 8°.

R. Kutzner. Zur Casuistik und Histogenese der Lymphosarkome. Greifswald 1889. 8°.

S. Lachmann. Ein Fall von primärem Pankreaskrebs mit Ruptur der Gallenblase. Greifswald 1889. 8°.

U. LETTOW. Ueber Choralamid als Hypnoticum. Greifswald 1889. 8⁰.

R. LÖWENHAUPT. Die fäulnis- und gährungswidrige Wirkung des Natrium silicicum. Greifswald 1889. 8⁰.

V. MALISCH. Ueber Lues hereditaria als Aetiologie der Kerato-Iritis serosa. Greifswald 1889. 8⁰.

G. MARTENS. Zwei Fälle von Aorten-Atresie. Greifswald 1889. 8⁰.

F. MEURER. Untersuchungen zur Lösung der Frage über das Vorhandensein specifischer Secretionsnerven für die Nierenabsonderung. Greifswald 1889. 8⁰.

H. MÖLLER. Die Hypertrophie der Zungenbalgdrüsen. Greifswald 1889. 8⁰.

P. MOSER. Ueber Pneumothorax nebst einem Falle von offenem Pyo-Pneumothorax. Greifswald 1889. 8⁰.

H. MÜLLER. Ein Beitrag zur Lehre vom menstrualen Irresein. Greifswald 1889. 8⁰.

W. MÜLLER. Experimentelle Beiträge zur Kenntniss der Flusssäurewirkung. Greifswald 1889. 8⁰.

W. PALMGREN. Ueber Phlebektasieen an der oberen Extremität und deren Behandlung. Greifswald 1889. 8⁰.

J. PELLOWSKI. Zur Casuistik der Bauchdecken-Geschwülste. Greifswald 1889. 8⁰.

J. PFALZGRAF. Ein von der Haut unabhängiges Cancroid am Vorderarm. Greifswald 1889. 8⁰.

J. PIETRUSKY. Ueber einen Fall von Carcinoma sarcomatodes des Hodens. Greifswald 1889. 8⁰.

A. Pommeresch. Beiträge zur Behandlung der Erkrankung der Wirbelsäule mittelst Gewichts-Extension. Greifswald 1889. 8°.

E. Pumplun. Beitrag zur Kenntniss der Syphilome am Halse. Greifswald 1889. 8°.

O. Rilke. Ueber einen complicirten Fall von Torsions-Fractur des Unterschenkels. Greifswald 1889. 8°.

L. Schaefer. Zur Methode der Rhinoplastik bei luetischer Sattelnase. Greifswald 1889. 8°.

J. Schirmer. Geschichtliche Entwicklung der Anschauungen über Aetiologie, Therapie und Prophylaxe der Blennorrhoea neonatorum. Greifswald 1889. 8°.

H. Schlenther. Beitrag zur Osteotomia subtrochanterica. Greifswald 1889. 8°.

O. Schloss. Ein Beitrag zur Casuistik der Uterusfibrome mit kurzer Erwähnung der gebräuchlichsten Behandlungsweisen. Greifswald 1889. 8°.

H. Schmidt. Circumscriptes entzündliches Oedem der Epiglottis. Greifswald 1889. 8°.

J. Schmidt. Ueber Graviditas extrauterina. Greifswald 1889. 8°.

P. Schmidt. Ein Beitrag zur Kenntniss der congenitalen Sacraltumoren. Greifswald 1889. 8°.

C. Scholz. Zur Therapie der supraacromialen Luxation der Clavicula. Greifswald 1889. 8°.

F. Schubarth. Nephrectomie bei Hydronephrose. Greifswald 1889. 8°.

K. Schulze. Ein Fall von Wangenplastik nach Carcinom. Greifswald 1889. 8°.

M. Semon. Ein Fall von Sarcom der Regio subscapularis. Greifswald 1889. 8°.

F. Simon. Ueber ein Pancreascarcinom bei einem 13-jährigen Knaben. Greifswald 1889. 8°.

A. Springfeld. Ueber die giftige Wirkung des Blutserums des gemeinen Fluss-Aales (Anguilla vulgaris L.). Greifswald 1889. 8°.

W. Steinbrück. Ueber Morel-Lavallée's décollement traumatique de la peau et des couches sous-jacentes. Greifswald 1889. 8°.

A. Stoller. Beitrag zur Casuistik der intrauterinen Tibiafrakturen. Greifswald 1889. 8°.

E. Storch. Zur Spina bifida. Greifswald 1889. 8°.

V. Tabulski. Exstrirpation einer hydronephrotischen, secundär in ein Lipom verwandelten Niere. Greifswald 1889. 8°.

J. von Tempski. Ueber Darmobstruction durch Gallensteine. Greifswald 1889. 8°.

H. Thom. Ueber Suppuration nach Staarextraktion. Greifswald 1889. 8°.

R. Thomalla. Ueber die Färbung der erkrankten Hornhaut mit Fluorescëin und die Verwertung dieser Färbung bei Stellung von Diagnosen und Differentialdiagnosen. Greifswald 1889. 8°.

M. Thun. Ueber den Verschluss der Scheide bei Blasen-Scheidenfisteln. Greifswald 1889. 8°.

J. Tschaeche. Ueber Prophylaxis des Puerperalfiebers. Greifswald 1889. 8°.

Th. W. von Ulatowski. Ueber Harnverhaltung und deren Beseitigung mittelst der capillären Aspirationsmethode. Greifswald 1889. 8°.

C. Velhagen. Beitrag zur Kenntniss der syphilitischen Mastdarmgeschwüre. Greifswald 1889. 8°.

C. Wallstabe. Ein Beitrag zur Behandlung des partiellen Scleralstaphyloms durch Galvanokaustik. Greifswald 1889. 8°.

A. Westhoff. Ueber plötzliche Erblindung nach Blutverlusten nebst Mitteilung eines Falles von Amaurosis nach Metrorrhagie. Greifswald 1889. 8°.

A. Wichert. Beitrag zur Casuistik des angeborenen und erworbenen Riesenwuchses. Greifswald 1889. 8°.

O. Wickel. Zur Frage der Uebertragbarkeit der Tuberculose durch die Schutzpockenimpfung. Greifswald 1889. 8°.

C. Wisnia. Zur Behandlung der Varicocele. Greifswald 1889. 8°.

B. Wysocki. Ueber Episio-Perineorrhaphie nach Sänger. Greifswald 1889. 8°.

M. Ziemer. Ein Fall von Inversio puerperalis inveterata. Greifswald 1889. 8°.

R. Zimmermann. Ueber die Behandlung der kalten Abscesse mittelst Jodoforminjectionen. Greifswald 1889. 8°.

O. VON BOLTENSTERN. Ueber Phosphorwasserstoffgas. Greifswald 1889. 8⁰.

J. EDLER. Untersuchungen über die Abhängigkeit der Wärmestrahlung und der Absorption derselben durch Glimmerplatten von der Temperatur. Greifswald 1889. 8⁰.

L. GŁBEK. Ueber Azo-m-nitrobenzol-Salicylsäure und einige ihrer Derivate. Greifswald 1889. 8⁰.

J. GILL. Ueber die Wärmewirkungen des elektrischen Stromes an der Grenze von Metallen und Flüssigkeiten. Greifswald 1889. 8⁰.

G. VON HOFE. Untersuchungen über die Magnetisierungsfunktion von Eisenringen. Greifswald 1889. 8⁰.

E. JENSSEN. Beiträge zur krystallographischen Kenntniss organischer Verbindungen. Leipzig 1889. 8⁰.

R. KRÜGER. Untersuchungen über die Capacität von Metallplatten in Salzlösungen. Greifswald 1889. 8⁰.

M. NEUMANN. Ueber Triazosulfonsäuren. Greifswald 1889. 8⁰.

E. TACKE. Ueber den Wert der 's Gravesande'schen Methode zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten dünner Drähte. Greifswald 1889. 8⁰.

O. E. ZERLANG. Entwicklungsgeschichtliche Untersuchungen über die Florideengattungen Wrangelia u. Naccaria. Marburg 1889. 8⁰.

F. ZICKERMANN. Ueber elektrische Schwingungen, insbesondere über das Verhalten von Drähten und Con-

ductoren bei der Resonanz sehr schneller elektrischer Schwingungen. Greifswald 1889. 8°.

F. Blume. Metrik Froissart's. I. Silbenzählung-Hiatus. Reim. Greifswald 1889. 8°.

R. Bocksch. Zur Raumtheorie Hermann Lotzes. Greifswald 1889. 8°.

J. Bröhan. Die Futurbildung im altfranzösischen. Greifswald 1889. 8°.

R. Herold. Der Bundschuh im Bistum Speyer vom Jahre 1502. Greifswald 1889. 8°.

P. Klohe. De Ciceronis librorum de officiis fontibus. Gryphiswaldiae 1889. 8°.

E. Krause. Der Weiszenburger Handel (1480—1505). Greifswald 1889. 8°.

J. Lazarus. Die rechtliche Natur des Pfandrechts an Forderungen. Berlin 1889. 8°.

A. Moeltzner. Salomon Maimons erkenntnistheoretische Verbesserungsversuche der Kantischen Philosophie. Greifswald 1889. 8°.

W. Niederstädt. Alter und Heimat der altfranzösischen Chanson de geste Doon de Maience, sowie das Verhältniss der beiden Teile derselben zu einander. Greifswald 1889. 8°.

M. K. W. Paszotta. Die rechtliche Behandlung des Zufalls bei der Werkverdingung. Greifswald 1889. 8°.

K. E. Schaub. Ueber die niederdeutschen Uebertragungen der Lutherschen Uebersetzung des N. T., welche im 16 Jahrhundert im Druck erschienen. Greifswald 1889. 8°.

G. THIELE. Quaestiones de cornifici et Ciceronis artibus rhetoricis. Gryphiswaldiae 1889. 8°.

G. WACK. Ueber das Verhältniss von König Aelfreds Uebersetzung der Cura pastoralis zum Original. Greifswald 1889. 8°.

ZWITSERLAND.

Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle. Genève 1889. Tome XXX. Part. 2. 4°.

Inhoud:

CH. CELLÉRIER. Note sur les mouvements des corps électrisés.
ALPH. PICTET. Locustides nouveaux ou peu connus.
Contributions à la flore du Paraguay. II. Légumineuses par M. MICHELI. III. Polygalacées par R. CHODAT.
J. BRUN et J. TEMPÈRE. Diatomées fossiles du Japon.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Basel 1890. Band VIII. 8°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Serie 4a. Rendiconti. Vol. VI. Fasc. 3—6. 4°.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1890. Vol. IV. N°. 4. 8°.

Bollettino delle publicazioni italiane. Firenze 1890. N°. 102—105. 8°.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. Firenze 1890. Vol. XIX. Fasc. 3. 8°.

Atti della R. Accademia delle Scienze. Torino 1890. Vol. XXV. Disp. 6—10. 8°.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1888 all'Osservatorio della R. Universita di Torino. 1890. 8°.

Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Padova. 1889. Nuova Serie. Vol. V. 8°.

Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena. 1888. Serie 2. Vol. VI. 4°.

Inhoud:

D. Ragona. Pressione atmosferica bi-oraria del 1887 tratta dai rilievi del barometro registratore Richard.
P. Bonizzi. Osservazioni intorno agl'infusorii ciliati.
D. Ragona. Studi sul termometro registratore Richard e sull' andamento delle temperature massime e minime.
P. Cogliolo. Glosse preaccursiane.
L. Malavasi. Le figure di Chladni ed il metodo di Wheatstone.
D. Ragona. Vero andamento diurno della temperatura.
L. Malavasi. Note al saggio teorico della pila secondo il principi di Volta.
P. Cogliolo. I principii teorici della negotiorum gestio.
A. Crespellani. Indicazione topogrofica degli avanzi monumentali romani scoperti in Modena e suo contorno.
L. F. Valdrighi. Fabbricatori di strumenti armonici.
P. Bortolotti. Intorno un quadro di Fra Paolo da Modena.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. 1888. Serie 4a. Tomo IX. 4°.

Nouveaux progrès de la question du calendrier universel et du Méridien universel. Rapport de la commission de l'unification du calendrier. Bologne 1889. 4°.

Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli 1889. Serie 2a. Vol. III. 3°.

Inhoud:

A. Costa. Imenotteri Italiani. Famiglie Pompilidei, Dolicuridei, Sco liidei, Sapigidei, Tifiidei, Mutillidei.

A. Costa. Miscellanea entomologica.
A. Scacchi. Sulle ossa fossili trovate nel tufo dei vulcani fluoriferi della Campania.
F. Bassani. Sopra un nuovo genere di Fisostomi scoperto nell'eoceno medio del Friuli, in Provincia di Udine (Piano di S. Giovanni Ilarione).
E. Villari. Sulla diversa resistenza elettrica opposta da alcuni circuiti metallici alla scarica dei condensatori ed alla corrente della pila.
F. Bassani. Ricerche sui pesci fossili di Chiavon.
A. Scacchi. Il vulcanetto di Puccianello.
O. Rebuffat. Contributo alla conoscenza degli amido-acidi.

Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Napoli 1889. Serie 2ª. Vol III. Fasc. 1—12. 4°.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali. Vol. VII. Adunanza del 19 Gennaio 1890. 8°.

SPANJE.

Memorias de la real Academia de la Historia. Madrid 1821—1888. Tomo VI. VIII—XI. 5 Dl. 4°.

DUITSCHLAND.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Copenhague 1889. Classe des Sciences. 6e Série. Vol. V. N°. 1—2. 4°.

Inhoud:

1. Chr. Fr. Lütken. Spolia Atlantica. Bidrag til Kundsbab om de tre pelagiske tandhval-slaegter Steno, Delphinus og Prodelphinus.
2. H. Valentiner. De endelige transformations-gruppers theori.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences. Copenhague 1889. Classe des Lettres. Vol. II. N°. 6. Vol. III. N°. 1. 4°.

Inhoud. Vol. II. N° 6.

A. Lehmann. Skelneloven. En korrektion af Webers lov og den Ebbinghaus'ske Kontrastlov paa grundlag af psykometriske undersögelser.

Vol. III. N°. 1.

H. Höffding. Psykologiske Undersögelser.

Oversigt over det kongelige danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i aaret 1889. Kjobenhavn 1889. N°. 2. 8°.

RUSLAND.

Acta horti petropolitani. St. Peterburg 1890. Tomus XI. Fasc. 1. 8°.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1889. Jahrg. 1888. 2 Dl. 4°.

Nouveaux Mémoires de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1889. Tome XV. Livr. 6. 4°.

Inhoud:

J. Setschenow. Ueber die Constitution der Salzlösungen auf Grund ihres Verhaltens zur Kohlensäure.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1889. N°. 2. 8°.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins. Riga 1889. N°. XXXII. 8°.

AZIË.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1889. Vol. LVIII. Part 1. N°. 2. Part 2. N°. 3—4. 8°.

Proceedings of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1889. N°. 7—10. 8°.

D. D. Cunningham. On the phenomena of fertilization of Ficus Roxburghii, Wall. Calcutta 1889. fol.

Mitteilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Tokio 1890. Heft 43. 4°.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1890. Vol. XIV. 8°.

AMERIKA.

5th and 6th Annual Report of the Bureau of Ethnology to the Secretary of the Smithsonian Institution. Washington 1887—1888. 2 Dl. 4°.

J. C. Pilling. Bibliography of the Iroquoian languages. Washington 1888. 8°.

——— Bibliography of the Muskhogean languages. Washington 1889. 8°.

C. Thomas. The problem of the Ohio mounds. Washington 1889. 8°.

W. H. Holmes. Textile fabrics of ancient Peru. Washington 1889. 8°.

C. Thomas. The circular, square, and octagonal earthworks of Ohio. Washington 1889. 8°.
(Smithsonian Institution, Bureau of Ethnology).

Bulletin of the United States National Museum. Washington 1889. N°. 33—37. 8°.

Proceedings of the United States National Museum. Washington 1888—1889. Vol. X—XI. 8°.

7th Annual Report of the U. S. geological Survey to the Secretary of the Interior. 1885 – 1886. Washington 1888. 4°.

Monographs of the U. S. geological Servey. Washington 1888. Vol. XIII—XIV. 2 Dl. 4°. met Atlas. plano.

Inhoud. Vol. XIII.

G. F. Becker. Geology of the quicksilver deposits of the Pacific Slope. With an Atlas.

Vol. XIV.

J. S. Newberry. Fossil fishes and fossil plants of the Triassic rocks of New Jersey and the Connecticut Valley.

Bulletin of the U. S. geological Survey. Washington 1889. N°. 48—53. 8°.

U. S. Department of Agriculture. Division of economic ornithology and mammalogy. Bulletin. N°. 1. The english sparrow (Passer domesticus) in North America. Washington 1889. 8°.

U. S. Department of Agriculture. North American fauna. N°. 1—2. Washington 1889. 8°.

Index-Catalogue of the library of the Surgeon-General's Office, U. S. Army. Washington 1889. Vol. X. (O-Pfutsch). 4°.

U. S. coast and geodetic Survey. Bulletin N°. 17. 4°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1888. New Series. Vol. XV. Part 2. 8°.

Proceedings of the Boston Society of natural History. Boston 1889. Vol. XXIV. Part 1—2. 8°.

Annals of Harvard College Observatory. Vol. XVIII. N°. 10. 4°.

Inhoud:

Meridian-circle observations of stars near the South Pole.

Henry Draper Memorial. Fourth annual report of the photographic study of stellar spectra conducted at the Harvard College Observatory. Cambridge 1890. 4°.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1889. Vol. XXVI. N°. 130. 8°.

Proceedings of the Academy of natural Science. Philadelphia 1890. Year 1889. Part 3. 8°.

Annual report of the geological Survey of Pennsylvania for 1887. Harrisburg 1889. 8°.

Geological Survey of Pennsylvania. Report D 6 and P 4. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1890. Vol. IX. N°. 80. 4°.

American Journal of Mathematics. Baltimore 1889—1890. Vol. XII. N°. 1—2. 4°.

American chemical Journal. Baltimore 1889. Vol. XI. N°. 6—7. 8°.

Studies from the biological Laboratory. Baltimore 1889. Vol. IV. N°. 5. 8°.

American Journal of Philology. Baltimore 1889. Vol. X. N°. 2—3. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol. XIV. N°. 11—20. 4°.

American Journal of Science. New Haven 1889-1890. 3d Series. Vol. XXXVIII. N°. 226—228. Vol. XXXIX. N°. 229—230. 8°.

Reports on the observations of the total eclipse of the sun of January, 1889, published by the Lick Observatory. Sacramento 1889. 8°.

Annual Report of the Canadian Institute, Session 1888—9. Toronto 1889. 8°.

Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of natural Science. Halifax N. S. 1889. Vol. VII. Part 3. 8°.

Memoria presentada al congreso de la Union por el Secretario de fomento, colonizacion, industria y comercio de la republica Mexicana. Mexico 1887—88. Tomo IV—V. 2 Dl. 4°.

Boletin mensual. Mexico 1889. Tomo II. N°. 5—6. gr. 4°.

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior. Mexico 1889. N°. 53—54. 8°.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico del Colegio pio de Villa Colon. Montevideo 1890. Anno 2. N°. 3—4. 4°.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do Observatoria do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 3—4. 4°.

Boletins mensaes do Observatorio meteorologico da reparticao dos telegraphos do Brazil. Rio de Janeiro 1886—1888. Vol. I—III. 8°.

Boletim da Commissao geographica e geologica da provincia de S. Paulo. 1889. N°. 1—3. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1889. Tomo XXVIII. Entr. 5—6. Tomo XXIX. Entr. 1. 8°.

Revista de la Sociedad geografica Argentina. Buenos Aires 1889. Tomo VII. N°. 71—72. 8°.

Boletin del Instituto geografico Argentino. Buenos Aires 1889. Tome X. N°. 11—12. 8°.

AUSTRALIË.

Natural History of Victoria. Prodromus of the zoology of Victoria. Melbourne 1889. Decade XIX. gr. 8°.

VON MUELLER. Records of observations on Sir William Mac Gregor's Highland-plants from New Guinea. 4°. (Reprinted from the Transactions of the royal Society of Victoria, 1889).

AANGEKOCHT.

Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuidnederlandsche Letterkunde door J. G. FREDERIKS en F. J. VAN DEN BRANDEN. Amsterdam 1890. Afl. 8. 8°.

Internationales Archiv für Ethnographie. Leiden 1890. Band III. Heft 1—2. 4°.

De Navorscher. Nijmegen 1890. Nieuwe Serie. Jaarg. 23. Afl. 4—5. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 228—236. 4⁰.

Journal des Savants. Paris, Mars-Avril 1890. 4⁰.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1890. 7e Série. Zoologie. Tome VIII. N⁰. 4—6. Botanie. Tome XI. N⁰. 1. gr. 8⁰.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1890. 2e Série. Tome VIII. N⁰. 1. gr. 8⁰.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1890. 2e Série. Tome XIV. Mars-Avril. 8⁰.

Revue générale de Botanique. Paris 1890. Tome II. N⁰. 16—17. 8⁰.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1890. 6e Série. Tome XIX. Avril. Tome XX. Mai. 8⁰.

The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1890. 5th Series. Vol. XXIX. N⁰. 179—180. 8⁰.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. V. N⁰. 28—29. 8⁰.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1890. Vol. XXIV. Part 3. 8⁰.

Report of 59th meeting of the British Association for the advancement of Science, held at Newcastle-upon Tyne in September 1889. London 1890. 8⁰.

Dictionary of national Biography. London 1890. Vol. XXII. (Glover-Gravet). gr. 8⁰.

Journal of the marine biological Association of the United Kingdom. London 1890. New Series. Vol. I. N⁰. 3. 8⁰.

Transactions of the royal Society of Edinburgh. General Index to first thirtyfour volumes (1783—1888) with history of the institution of the Society, royal charters, list of contents of each volume. Edinburgh 1890. 4⁰.

Astronomische Nachrichten. N⁰. 2959—2967. 4⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1890. N⁰. 6—9. 8⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1890. Jahrg. XIV. N⁰. 12—19. 4⁰.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1890. Jahrg. 7. Heft 2—3. 8⁰.

Ephemeris epigraphica. Corporis inscriptionum latinarum supplementum. Berolini 1890. Vol. VII. Fasc. 3. gr. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1890. Neue Folge. Band XXXIX. Heft 4. Band XL. Heft 1. Beiblätter. Band XIV. St. 4. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1890. Band V. Heft 3—5. 8⁰.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1889. Jahrg. 37. Heft 4. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1890. Band CCLXXV. Heft 13. Band CCLXXVI. Heft 1—8. 8⁰.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Marburg 1890. Neue Reihe. Jahrg. 48. Heft 2. 8⁰.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1890. 3e Période. Tome XLV. N°. 135—136. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1890. 3e Période. Tome XXIII. N°. 3—4. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire des écrivains du jour. Florence 1890. Livr. 13. gr. 8°.

Monumenti antichi. Milano 1890. Vol. I. Punt. 1. 4°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JUNI 1890.

NEDERLAND.

Revue internationale des falsifications. Amsterdam 1890. 3e Année. Livr. 11. 4°.

Verslag van den toestand der gemeente Amsterdam gedurende het jaar 1889. Amsterdam 1890. gr. 8°.

A. L. W. Seyffardt. Onze nationale weerkrachten. 8°. (Maatschappij tot Nut van 't Algemeen).

C. Ubaghs De voor-Romeinsche begraafplaatsen tusschen Weert en Budel en Nederweert-Leveroy. Amsterdam 1890. gr. 8°.

Verslag van den toestand der Stads-Bibliotheek te Haarlem in het jaar 1888 en 1889. 8°.

Tijdschrift. Orgaan der Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1890. N°. 7—10. 8°.

Tijdschrift voor Nederlandsche Taal- en Letterkunde. Leiden 1890. Deel IX. Afl. 1—2. 8°.
(Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde).

G. HEIJMANS. Schets eener kritische geschiedenis van het Causaliteitsbegrip in de nieuwere wijsbegeerte. Leiden 1890. 8°.
(Bekroond en uitgegeven door Curatoren van het Stolpiaansch Legaat aan de Universiteit te Leiden).

P. VAN BEMMELEN. La question sociale. Leide 1888. 8°.

Werken van het historisch Genootschap te Utrecht. 's Gravenhage 1890. Nieuwe Serie. N°. 55 en 56. 2 Dl. 8°.

Inhoud:

55. P. L. MULLER et A. DIEGERINCK. Documents concernant les relations entre le duc d'Anjou et les Pays-Bas (1576—1583). Tome II.

56. Brieven van R. M. VAN GOENS en onuitgegeven stukken hem betreffende.

Bijdragen en Mededeelingen van het historisch Genootschap te Utrecht. 's Gravenhage 1889. Deel XII. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks oude Archieven. XI. 1888. 's Gravenhage 1890. 8°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1890. Deel XXXIII. Afl. 2. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1890. Afl. 4. 1ste gedeelte. 4°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor

geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. Amsterdam 1890. Jaargang. VIII. N°. 5. 8°.

J. Verdam. De geschiedenis der Nederlandsche taal Leeuwarden 1890. 8°.

L. H. Siertsema. De Jamin'sche interferentiaalrefractor en hiermede verrichte brekingsindices-bepalingen. Groningen 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Januari 1890. fol

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Januari 1890. fol.

NEDERLANDSCH-INDIË.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Deel XXVII. Afl. 4. 8°.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Dl. XXXIII. Afl. 5—6. 8°.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1890. Deel XL. Afl. 1—4. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen. Batavia 1890. Deel XXX. Afl. 1—2. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1890. 3e Série. Tome XIX. N°. 5. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N°. 5. 8°.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. Tome IX. Fasc. 3. 8°.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége. Bruxelles 1890. 2e Série. Tome XVI. 8°.

C. Le Paige. Notes pour servir à l'histoire des mathématiques dans l'ancien pays de Liége. Liége 1890. 8°.

A. de Cock. Rembert Dodoens. Gent 1890. 8°. (Volksboekje uitgegeven door het Willems-Fonds. N°. 8.)

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CX. N°. 21—24. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1890. 4e Série. Tome XVIII. Janvier—Février. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1890. 3e Série. Tome XXIII. N°. 21—24. 8°.

Publications de l'Ecole des langues orientales vivantes. Paris 1889—1890. 3e Série. Tome III. gr. 8°.

Inhoud:

Nozhet-Elhâdi. Histoire de la dynastie Saadienne au Maroc (1511—1670). Traduction française par O. Houdas.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1890. 9e Série. Tome II. N°. 14—20. 8°.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1890. 8e Série. Tome II. N°. 1. 8°.

Compte rendu sommaire des séances de la Société philomatique. Paris 1890. N°. 16—17. 8°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1890. 6e Année. Tome X. N°. 107—108. gr. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N°. 715—718. 4°.

M. Berthelot. La révolution chimique. Lavoisier. Paris 1889. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. Londen 1890. Vol. XLVII. N°. 280—290. 8.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. Londen 1890. Vol. L. N°. 7. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. Londen 1890. New Series. Vol. XII. N°. 6. 8°.

Journal of the royal microscopical Society. Londen 1890. Part 3. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1890. Band XX. Heft 1—2. 4°.

Jahresbericht der kön. ungarischen geologischen Anstalt für 1888. Budapest 1890. gr. 8⁰.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kön. ungarischen geologischen Anstalt. Budapest 1890. Band IX. Heft 1. gr. 8⁰.

Földtani Közlöny. Geologische Mittheilungen. Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1889. Kötet XIX. Füzet 11—12. Kötet XX. Füzet 1—4. gr. 8⁰.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1890. N⁰. 5. 8⁰.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, vydava Jednota Ceskych mathematiku. Praze 1890. Rocnik XIX. Cislo 5. 8⁰.

D U I T S C H L A N D.

Sitzungsberichte der kön. preussischen Akademie der Wissenschaften. Berlin 1890. N⁰. 1—19. gr. 8⁰.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1890. Band CXX. Heft 2—3. 8⁰.

74 Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden pro 1888/89 nebst Festschrift über die Feier ihres 75 jährigen Bestehens. Emden 1890. 8⁰.

Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. 1890. Band XI. Heft 1—2. 8⁰.

Archiv des Vereins der Freunde der Naturgeschichte in Mecklenburg. Güstrow 1890. Jahr 43. 8⁰.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. XIII. N⁰. 336—337. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1890. 2te Reihe. Theil IX. Heft 1. 8⁰.

C. Gegenbaur. Lehrbuch der Anatomie des Menschen. Leipzig 1890. 4te Auflage. Band I—II. gr. 8⁰.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medicinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1890. Band XXIV. Heft 2—3. 8⁰.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1890. Band XXXVI. N⁰. 5—6. 4⁰.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1889. Band XVII. Abth 1. 4⁰.

Inhoud:

H. Seeliger. Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri.

A. Brill. Ueber die reducirte Resultante.

M. Noether. Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung.

R. Hertwig. Ueber die Conjugation der Infusorien.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1889. Band XIX. Abth. 1. 4⁰.

Inhoud:

K. Th. Heigel. Der Umschwung der bayerischen Politik in den Jahren 1679—1683.

F. Stieve. Wittelsbacher Briefe aus den Jahren 1590 bis 1610.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1890. Heft 2. 8⁰.

Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1890. Neue Folge. Band XXIII. 8⁰.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft. Würzburg 1889. Jahrg. 1889. 8⁰.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Serie 4ª. Rendiconti. Vol. VI. Fasc. 7. 4⁰.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1890. Vol. IV. N⁰. 5. 8⁰.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1890. N⁰. 106—107. 8⁰.

Le opere di Galileo Galilei. Edizione nationale sotto gli auspicii di Sua Maesta il re d'Italia. Firenze 1890. Vol. I. 4⁰.

Atti della Societa Toscana di Scienze naturali. Processi Verbali. Vol. VII. Adunanza del 2 Marzo 1890. 8⁰.

ZWEDEN EN NOORWEGEN

Sveriges geologiska Undersökning. Stockholm 1889. 8⁰. en 4⁰. Met kaarten. Plano.

Serie Aª. N⁰. 84, 100, 103, 107. Beskrifning till kartbladet Askerund, Penningby, Bäckaskog, Alunda, Sölvesborg.
Serie Bᵇ. Specialkartor med beskrifningar. N⁰. 4, 5.
Serie C. Afhandlingar och uppsattser. N⁰. 92—111, 113—115.

Liste systématique des publications de l'Institut royal géologique de Suède. 1862—1890. Stockholm 1890. 8°.

C. Löfstrand. Am apatitens förekomstsätt i Norrbottens Län jemfördt med dess uppträdande i Norge. Stockholm 1890. 8°.

Den Norske Nordhavs-Expedition, 1876—1878. N°. XIX. Zoologi. Actinida ved D. C. Danielssen. Christiania 1890. gr. 4°.

RUSLAND.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1889. Deel XXV. N°. 6—7. 8°. (In het Russisch).

Mémoires du Comité géologique. St. Pétersbourg 1889. Vol. IX. N°. 1. Vol. XI. N°. 1. 4°.

Inhoud. Vol. IX. 1:

Allgemeine geologische Karte von Russland. Blatt 48. Melitopol, Berdiansk, Perekop, Berislawl, bearbeitet von N. Sokolow. Mikroskopische Untersuchungen der krystallinischen Gesteine von E. Fedorow.

Vol. XI. N°. 1.

Allgemeine geologische Karte von Russland. Blatt 126. Perm-Solikamsk. Geologische Untersuchungen am Westabhange des Urals von A. Krasnopolsky.

Bulletins du Comité géologique. St. Pétersbourg 1889. Vol. VIII. N°. 6—8. 8°.

Fennia. Bulletin de la Société de géographie de Finlande. Helsingfors. N°. 2—3. 8°.

AZIE.

Annals of the royal botanic Garden. Calcutta 1889. Vol. II. fol.

Inhoud:

G. KING. The species of Artocarpus indigenous to British India: The Indo-Malayan species of Quercus and Castanopsis.

G. KING. The species of Ficus of the Indo-Malayan and Chinese Countries. Appendix, Containing. 1 Some new species from New Guinea by Dr. KING. 2. On the phenomena of fertilization in Ficus Roxburghi, Wall. by D. CUNNINGHAM. Calcutta 1889. fol.

AMERIKA.

Bureau of Education. Circular of Information. 1889. N°. 2. 1890. N°. 1—2. Washington 1889—1890. 8°.

Proceedings of an interstate convention of cattlemen held at Fort Worth, Texas, March 11, 12 and 13 1890. Washington 1890. 8°.
(U. S. Department of agriculture, Bureau of animal industry).

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1890. Part 1. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol. XIV. N°. 21—24. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1890. Vol. IX. N°. 81. 4°.

American Journal of Mathematics. Index to volumes I—X. Baltimore 1889. 4°.

Boletin mensal. Mexico 1889. Tome II. N°. 7—8. 4°.

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior. Mexico 1890. N°. 55. 8°.

Mittheilungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins in Mexico. 1890. Band I. Heft 1. 4°.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 5. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1890. Tome XXIX. Entr. 2—3. 8°.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico del Colegio Pio de Villa Colon. Montevideo 1890. Ano II. N°. 5. 4°.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de Geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1890. Jaarg. 8. Afl. 1. 4°.

De Navorscher. Amsterdam 1890. Nieuwe Serie. Jaarg. 23. Afl. 6. 8°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 237—242. gr. 4°.

Journal des Savants. Paris, Mai 1890. 4°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1890. 2e Série. Tome XIV. Mai 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1889. 2e Série. VII. N°. 4. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1890. 6e Série. Tome XX. Juin. 8°.

A. Laporte. Histoire littéraire du 19e Siecle. Paris 1889. Tome VII. Livr. 3—4. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1890. 5th Series. Vol. XXIX. N°. 181. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. V. N°. 30. 8°.

Annals of Botany. London 1890. Vol. IV. N°. 14. gr. 8°.

Official Year-book of the scientific and learned Societies of Great Britain and Ireland. London 1890. 7th Issue. 8°.

Tschermak's mineralogische und petrographische Mittheilungen. Wien 1890. Neue Folge. Band XI. Heft 3. 8°.

R. Hoernes und M. Auinger. Die Gasteropoden der Meeres-Ablagerungen der ersten und zweiten miocänen Mediterran-Stufe in der österreichisch-ungarischen Monarchie. Wien 1890. Lief. 6. gr. 4°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2968—2972. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1890. N°. 10—11. gr. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamte. Berlin 1890. Jahrg. XIV. N°. 20—24. 4°.

Arbeiten aus dem kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1890. Band VI. Heft 2. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1890. Jahrg. 8. Heft 4. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1890. Jahrg. 56. Band I. Heft 2. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1890. Neue Folge. Band XL. Heft 2. Beiblätter. Band XIV. St. 5. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1890. Band V. Heft 6. 8°.

Allgemeine deutsche Biographie. Leipzig 1890. Band XXX. (von Rusdorf-Scheller). 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1890. Band CCLXXVI. Heft 9—12. 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1890. 3e Période. Tome XLVI. N°. 137. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1890. 3e Période. Tome XXIII. N°. 5. 8°.

T. Salvadori. Aggiunte alla Ornitologia della Papuasia e delle Molucche. Torino 1890. Parte 2a. Passeres. 4°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN JULI, AUGUSTUS EN SEPTEMBER 1890.

NEDERLAND.

Bijdragen van het statistisch Instituut. Amsterdam 1890. Jaarg. 6. N°. 2. 8°.

Jaarcijfers over 1888 en vorige jaren. N°. 8. Afl. 2. 8°.

Verslag over het jaar 1889 en Naamlijst van de Leden der Maatschappij »Arti et Amicitiae" gevestigd te Amsterdam. 8⁰.

Revue internationale des falsifications. Amsterdam 1890. Année 3. Livr. 12. Année 4. Livr. 1—2. 4⁰.

VAN RIJCKEVORSEL. An attempt to compare the instruments for absolute and magnetic measurements at different observatories. Amsterdam 1890. 4⁰.

Bijbelsche geschiedverhalen in tweemaal twee en vijftig lessen. In het Makassaarsch vertaald door Dr. B. F. MATTHES. Amsterdam 1890. 8⁰.

H. BLINK. Nederland en zijne bewoners. Amsterdam 1890. Afl. 8—9. 8⁰.

J. E. ENKLAAR. Het bijgeloof in vroegeren en lateren tijd en de middelen om het te bestrijden. 8⁰. (Maatschappij tot Nut van 't Algemeen).

Verhandelingen rakende den natuurlijken en geopenbaarden godsdienst, uitgegeven door Teylers godgeleerd Genootschap. Haarlem 1890. Nieuwe Serie. Dl. XII. 8⁰.

Inhoud:

W. BRÜCKNER. Die chronologische Reihenfolge, in welcher die Briefe des Neuen Testaments verfasst sind.

Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem. 1890. Tome XXIV. Livr. 2—3. 8⁰.

Tijdschrift. Orgaan der Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1890. N⁰. 10—11. 8⁰.

N. G. PIERSON. Leerboek der Staathuishoudkunde. Haarlem 1890. Deel II. St. 2. gr. 8°.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1890. Tome IX. N°. 2. 8°.

Annalen der Sternwarte in Leiden, herausgegeben von H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN. Haag 1890. Bd. VI. 4°.

Flora Batava. Leiden 1890. Afl. 289—290. 4°.

Tijdschrift voor Nederlandsche taal- en letterkunde, uitgegeven van wege de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1890. Deel IX. Afl. 3. 8°.

M. WEBER. Ethnographische Notizen über Flores und Celebes. Leiden 1890. 4°.
(Intern. Archiv für Ethnographie. Supplement zu Bd. III.)

Handleiding tot de kennis der Flora van Nederlandsch-Indie. Beschrijving van de families en geslachten der Nederl. Indische Phanerogamen door Dr. J. G. BOERLAGE. Leiden 1890. Dl. I. Stuk 2. 8°.

C. L. VAN DER BURG. Behandeling in Europa van zieken, komende uit het heete klimaat. Leiden 1890. 8°.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1890. Tome V. Livr. 3—4. 4°.

Inhoud:

A. P. VAN DER KOLF et F. H. VAN LEENT. Sur l'éther éthylique et sur l'amide de l'acide cinchonique.

CH. M. SCHOLS. La projection de la ligne géodésique.

B. P. MOORS. Description d'un compteur à gaz humide à niveau constant.

J. W. RETGERS. Contribution à l'étude de l'isomorphisme.

Woordenboek der Nederlandsche taal. 's Gravenhage-Leiden 1890. Deel V. Afl. 1. (Glaasje-Gloed). 2de Reeks. Afl. 10. (Onderrichten-Ongekorven). gr. 8°.

Verslagen omtrent 's Rijks verzamelingen van Geschiedenis en Kunst. XI. 1888. 's Gravenhage 1890. 8°.

Uitkomsten van het onderzoek naar den toestand van den landbouw in Nederland, ingesteld door de Landbouwcommissie, benoemd bij Kon. besluit van 18 September 1886. N°. 28. 's Gravenhage 1890. 4 Dl. gr. 8°.

Mededeelingen betreffende het Zeewezen. 's Gravenhage 1890. Deel XXVII. Afl. 1—2. 8°.

Bijdragen voor vaderlandsche geschiedenis en oudheidkunde. 's Gravenhage 1890. 3de Reeks. Deel VI. Afl. 1. 8°.

Bijdragen voor een Oorkondenboek van het Sticht Utrecht. Programma door Mr. S. Muller Tzn. 's Gravenhage 1890. gr. 8°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1890. 5e Reeks. Deel V. Afl. 3. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs. 's Gravenhage 1890. Afl. 5. 1ste en 2de Gedeelte. 4°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1890. Deel XXXIII. Afl. 3. 8°.

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor Lijkverbranding. 's Gravenhage 1890. Jaarg. 15. N°. 3. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1890. Jaarg. VII. N°. 6—7. 4°.

P. L. MULLER et A. DIEGERICK. Documents concernant les relations entre le duc d'Anjou et les Pays-Bas. (1576—1583). Utrecht 1889—1890. 2 Dl. 8°. (Werken van het historisch Genootschap. N°. 51, 55.)

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1889. uitgegeven door het koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut. Utrecht 1890. Jaarg 41. 4°. Oblong.

De Muntmeesters en hun muntslag in de provinciale en stedelijke munthuizen van de Republiek der Vereenigde Nederlanden en van de Bataafsche Republiek en in de Utrechtsche Munt van het koningrijk Holland en tijdens de inlijving bij het Fransche Keizerrijk. 8°.

A. J. A. PRANGE. Bijdrage tot de kennis van het zilver. Utrecht 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

H. JAPIKSE. Het aandeel van Zacharias Janse in de uitvinding der verrekijkers. Middelburg 1890. 8°. (Uitgegeven door het Zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen.)

Verslag van den toestand der provincie Friesland over 1889. Leeuwarden 1890. 8°.

A. W. ALINGS. Beschrijving van het Instituut voor Doofstommen te Groningen. 1890. 8°.

Catalogus der Boekerij van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Noord-Brabant. 's Hertogenbosch 1890. 3de Gedeelte. 8°.

Publications de la Société historique et archéologique dans le duché de Limbourg. Maestricht 1890. Nouvelle Série. Tome VI. 8°.

Jos. Habets. Geschiedenis van het tegenwoordig bisdom Roermond en van de bisdommen. die het in deze gewesten zijn voorafgegaan. Roermond 1890. 2 Dl. 8°.

Catalogus der Stadsbibliotheek van Maastricht bewerkt vooral als »Bibliotheca Limburgensis" door A. J. Flament. Maastricht 1888—1889. Dl. I. 8°.

J. G. de Man. Carcinological studies in the Leyden Museum. 8°.
(Notes from the Leyden Museum. Vol. XII).

J. C. G. Boot. Analecta critica. 8°.
(Ex Mnemosynes Vol. XVIII).

Koningrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1889. 's Gravenhage 1890. 1ste gedeelte. fol.

Statistiek van het Koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden Mei, Juni en Juli 1890. 's Gravenhage 1890. fol.

Verzamelingstabellen der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maanden Februari, Maart en April 1890. fol

Verzamelingstabellen der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden Februari, Maart en April 1890. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Deel XXXIV. Afl. 1. 8°.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Dl. XXVIII. Afl. 1. 8°.

Nederlandsch-Indisch plakaatboek, 1602—1811 door Mr. J. A. VAN DER CHYS. Batavia 1890. Dl. VII. 8°. (Uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen).

Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. uitgegeven door de koninklijke natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Batavia 1890. Deel XLIX. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1890. Dl. XXX. Afl. 3. 8°.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1890. Dl. XL. Afl. 5. 8°.

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1890. 3e Série. Tome XIX. N°. 6. Tome XX. N°. 7—8. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N°. 6—8. 8°.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. Tome X. Fasc. 2—3. 8°.

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Sur la propriété caractéristique de la surface commune à deux liquides soumis à leur affinité mutuelle. Bruxelles 1890. Communication préliminaire et 2e Communication. 8°.
(Extrait des Bulletins de l'Académie royale de Belgique. 3e Série. Tome XX).

Verslagen en Mededeelingen der koninklijke Vlaamsche Academie voor Taal- en Letterkunde. Gent 1890. N°. 3. 8°.

Dit is die istory van Troyen van Jacob van Maerlant, naar het vijftiendeeuwsche handschrift van Wessel van de Loe, uitgegeven door N. DE PAUW en E. GAILLIARD. Gent 1890. Deel I.. Dl. IV. Afl. 2. gr. 8°.

F. DE POTTER en J. BROECKAERT. Geschiedenis van de gemeenten der provincie Oost-Vlaanderen. Gent 1890. Dl. XLV. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CX. N°. 25—26. Tome CXI. N°. 1—11. 4°.

Mémoires de l'Académie des Sciences. Paris 1888—1889. 2e Série. Tome XLIII—XLIV. 4°.

Inhoud, Tome XLIII.

Y. Villarceau. Supplément au mémoire sur l'établissement des arches de pont.

Tome XLIV.

E. H. Becquerel. Mémoires sur la température de l'air à la surface du sol, et de la terre jusqu'à trente-six mètres de profondeur etc. pendant les années 1881, 1882 et 1883.

M. de Jonquières. Théorie élémentaire d'après les méthodes de Poinsot, du mouvement de la toupie.

De Saint-Venant. Résistance des fluides, etc.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences. Paris 1887—1889. 2e Série. Tome XXIX—XXX. 4°.

Inhoud, Tome XXIX.

H. J. S. Smith. Mémoire sur la réprésentation des nombres par des sommes de cinq carrés.

Minkowski. Mémoire sur la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers.

Appell. Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes contenus ou discontenus.

Tome XXX;

Souillart. Théorie analytique des mouvements des satellites de Jupiter. 2e. partie, Réduction des formules en nombres.

F. Fouqué, M. Bertrand, Barrois, Offret, Kilian, Bergeron et Bréon. Mission d'Andalousie. Etudes relatives au tremblement de terre du 25 Décembre 1884 et à la constitution géologique du sol ébranlé par les secousses.

E. Guyou et G. Simart. Développements de géométrie du navire avec applications aux calculs de stabilité des navires.

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, publieés sous la direction de l'Académie des Sciences. Paris 1882—1890. 1e Série. Tome I. IV—VI. 2e Série. Tome VI—VIII. 4°.

Mémoires de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1886—1889. Tome XXXII. Part. 1 met atlas. Tome XXXIII. 4°. en fol.

Inhoud. Tome XXXII. 1.

B. Hauréau. Mémoire sur la vie et quelques oeuvres d'Alain de Lille.
L. Délisle. Mémoire sur l'école calligraphique de Tours au IXe siècle.
————. Mémoire sur d'anciens sacramentaires.
Deloche. Des monnaies d'or au nom du roi Théodebert 1er.

Tome XXXIII.

L. Delisle. Mémoire sur les opérations financières des Templiers.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1878. 2e Série. (Antiquités de France). Tome VI. 4°.

Inhoud:

H. Moranvillé. Etude sur la vie de Jean le Mercier 13.—1397.

Notices et Extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques, publiés par l'Institut national de France. Paris 1887—1890. Tome XXVIII. Part 1. Tome XXXI—XXXII. 4°.

Corpus inscriptionum semiticarum ab Academia inscriptionum et litterarum humaniorum conditum atque digestum. Parisiis 1887—1889. Pars 1ª. Tomus I. Fasc. 4. Pars 2ª. Tomus I. Fasc. 1. Pars 4ª. Tomus I. Fasc. 1. 4°. en fol.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1890. 4e Série. Tome XVIII. Mars—Avril. 8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences morales et politiques. Paris 1888. Tome XV—XVI. 4°.

Catalogue des Actes de Francois 1er. Paris 1887—1889. Tome I—III. (1515—1539). 4°.
(Académie des Sciences morales et politiques).

Mémoires de l'Académie de Médecine. Paris 1869—1887. Tome XXIX—XXXV. 7. Dl. 4°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1878—1890. 2e Série. Tome VII. N°. 1—28. Tome IX. N°. 39. 3e Série. Tome XXIII. N°. 25—26. Tome XXIV. N°. 27—34, 36—37.

Rapport général présenté à M. le Ministre du Commerce et de l'Industrie par l'Académie de Médecine sur les vaccinations et révaccinations pratiquées en France et dans les colonies françaises pendant les années 1811, 1812, 1815, 1816, 1820—1826, 1828—1834, 1836—1838, 1841—1848, 1851, 1854, 1857—1864, 1866—1869, 1871—1877, 1879—1887. Paris 1813—1888. 8°.

Rapports annuels de la Commission permanente de l'hygiène de l'enfance présentés à Mr. le Ministre de l'Intérieur pour les années 1872—1888. Paris 1873—1888. 8°.

Mission scientifique au Mexique et dans l'Amérique centrale. Paris 1871. Géologie. Description des anciennes possessions Mexicaines du Nord par GUILLEMIN-TARAYRE. Partie 2. Fasc. 1. 4°.

Nouvelles Archives du Muséum d'Histoire naturelle. Paris 1888—1889. 2e Série. Tome X. Fasc. 2. 3e Série. Tome I. 4°.

Inhoud, 2e Série. Tome X. Fasc. 2.

A. FRANCHET. Plantae Davidianae ex Sinarum imperio.
H. P. GERVAIS. Sur une nouvelle espèce de Mégaptère provenant du golfe Persique.
A. MILNE EDWARDS et E. OUTALET. Etude sur les mammifères et les oiseaux des îles Comores.

3e Série. Tome I.

POUCHET et H. BEAUREGARD. Recherches sur le Cachalot.
ED. LEBRUN. L. FAIRMAIRE et P. MABILLE. Recherches sur les insectes de Patagonie.
L. VAILLANT. Description d'une tortue terrestre d'espèce nouvelle.
ED. PERRIER. Mémoire sur l'organisation et le développement de la Comatule.

Journal de l'Ecole polytechnique. Paris 1889. Cahier 59. 4°.

Inhoud:

H. LÉAUTÉ. Sur une condition de bon fonctionnement des installations mécaniques comportant des transmissions par liens rigides ou flexibles.

R. Liouville. Mémoire sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications.
J. Moutier. Sur l'intensité de la lumière.
De Saint-Venant. Courbes représentatives des lois du choc longitudinal et du choc transversal d'une barre prismatique.

Annales du Musée Guimet. Paris 1889. Tome XV—XVII. 4°.

Inhoud, Tome XV.

La Siao Hio ou morale de la jeunesse avec le commentaire de Tchen-Siuen, traduite par C. De Harlez.

Tome XVI.

M. E. Lefébure. Les hypogées royaux de Thèbes.

Tome XVII.

E. Amélineau. Monuments pour servir à l'histoire de l'Egypte chrétienne au IVe siècle. Histoire de Saint Pakhôme et de ses communautés.

Revue de l'histoire des religions. Paris 1889—1890. Tome XX. N°. 1—3. Tome XXI. N°. 1. 8°.

Mémoires de la Société Académique Indo-Chinoise de France. Paris 1879. Tome I. 4°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1890. 9e Série. Tome II. N°. 21—28. 8°.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1890. 8e Série. Tome II. N°. 2. 8°.

Compte-rendu sommaire des séances de la Société philomatique de Paris. 1890. N°. 18—21. 8°.

Mémoires de la Société zoologique de France. Paris 1889. Tome II. N°. 4. 8°.

Bulletin de la Société zoologique de France. Paris 1889. Tome XIV. N°. 8. Tome XV. N°. 1—5. 8°.

Compte rendu des séances du Congrès international de Zoologie publié par R. Blanchard. Paris 1890. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N°. 719—730. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1890. 6e Année. Tome XI. N°. 109—113. gr. 8°.

L. Lallemand. Loi du 24 Juillet 1889 sur la protection des enfants maltraités ou moralement abandonnés. Notice et notes. Paris 1890. 8°.

Le Prince Albert de Monaco. Sur la faune des eaux profondes de la Méditerranée, au large de Monaco. 4°.

Résultats des campagnes scientifiques du yacht l'Hirondelle. Paris 1889. 8°.

Le Prince A. de Monaco. Expériences de flottage sur les courants superficiels de l'Atlantique du Nord. Paris 1890. 8°.

F. Plateau. Les Myriopodes marins et la résistance des Arthropodes à respiration aérienne à la submersion. 8°. (Extrait du Journal de l'Anatomie et de la Physiologie).

D. Bierens de Haan. Quelques renseignements sur l'édition de la correspondance et des oeuvres de Christian Huygens. 8°.

(Association française pour l'avancement des Sciences, 1889).

Franchimont. Action de l'acide azotique réel sur les composés de l'Hydrogène. Paris 1890. 8°. (Extrait de la Revue scientifique).

Annales de l'Observatoire de Nice, publiées sous les auspices du Bureau des Longitudes par M. Perrotin. Paris 1890. Tome III. 4°. met atlas. fol.

E. S. Zeballos. A travers les Bergeries. Paris 1889. Traduit par A. Biraben. gr. 8°.

F. Latzina. L'agriculture et l'élevage dans la république Argentine. Paris 1889. gr. 8°.

——————. La république Argentine considérée au point de vue de l'agriculture et de l'élevage. Paris 1889. Résumé et considérations par G. Carrasco. 8°.

A. Peyret. Une visite aux colonies de la république Argentine. Paris 1889. 8°.

Catalogue spécial officiel de l'exposition de la république Argentine. Lille 1889. 8°.

Notice sur la république Argentine. Lille 1889. 8°.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles. Bordeaux 1888—1889. 3e Série. Tome IV, V. Cahier 1. 8°.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de Juin 1887 à Mai 1889. Bordeaux 1888—1889. 8°.

Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques. Cherbourg 1889. Tome XXVI. 8°.

Bulletin de la Société des Sciences de Nancy. Paris 1890. Série 2. Tome X. Fasc. 23. 8°.

Bulletin des séances de la Sociéte des Sciences de Nancy. 1e Année. N°. 6. 2e Année. N°. 1—5. 8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et belles-Lettres de Toulouse. 1889. 9e Série. Tome I. 8°.

Recueil de l'Académie de Législation. Toulouse 1889. Tome XXXVII. 8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et belles-Lettres de Dijon. 1889. 4e Série. Tome I. 8°.

Mémoires de la Société Académique des Sciences, Arts et belles-Lettres. St. Quentin 1889. 4e Série. Tome VIII. 8°.

Mémoires de l'Académie des Sciences, belles-Lettres et Arts de Savoie. Chambéry 1890. 4e Série. Tome II. 8°.

Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et belles-Lettres. Caen 1889. 8°.

Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie. Caen 1890. 4e Série. Vol. III. 8°.

Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique, publiée par la Société d'Agriculture, Sciences et Arts de l'arrondissement de Valenciennes. 1889. Tome XL. N°. 9—12. 8°.

Bulletin de la Société des Antiquaires de Picardie. Amiens 1887. N°. 2—3. 8°.

Bulletin de la Société des Antiquaires de Picardie. Amiens 1889. N°. 2—4. 1890. N°. 1. 8°.

Album archéologique de la Société des Antiquaires de Picardie. Amiens 1886—1889. Fasc. 1—4. 4°.

Bulletin historique de la Société des Antiquaires de la Morinie. St. Omer 1890. Nouvelle Série. Livr. 152—154. 8°.

D. Haigneré. Les chartes de Saint-Bertin. St. Omer 1889. Tome II. Fasc. 2. 4°.
(Société des Antiquaires de la Morinie).

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1890. Vol. XLVIII. N°. 291—294. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1890. New Series. Vol. XII. N°. 7—9. 8°.

Memoirs of the royal astronomical Society. London 1890. Vol. XLIX. Part 2. 4°.

Inhoud:

W. G. Thackeray. A discussion of Greenwich observations of North polar distance, with reference to the position of the ecliptic, and an annual variation in the value of colatitude.
N. E. Green. On the belts and markings of Jupiter.
J. Arai. The total eclipse of the sun, 1887 Aug. 19.
S. J. Perry. Photographs and drawings of the sun.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1890. Vol. L. N°. 8. 8°.

Journal of the royal microscopical Society. London 1890. Part 4. 8°.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society. London 1890. Part 1. 8°.

Transactions of the Linnean Society. London 1890. 2d Series. Zoology. Vol. V. Part 4. 4°

Inhoud:

W. H. JACKSON. Studies in the morphology of the Lepidoptera. Part 1.

Journal of the Linnean Society. London 1889—1890. Botany. Vol. XXV. N°. 171—172. Vol. XXVI. N°. 173—174. Vol. XXVII. N°. 181—182. Zoology. Vol. XX. N°. 122—123. Vol. XXI. N°. 133—135. Vol. XXIII. N°. 141—144. 8°.

Prooceedings of the Linnean Society from November 1887 to June 1888. London 1890. 8°.

List of the Linnean Society. London 1890. 8°.

W. L. DISTANT. A monograph of oriental Cicadidae. London 1890. Part 3. 4°.

Astronomical and magnetical and meteorological Observations made at the royal Observatory, Greenwich, in the year 1887. London 1889. 4°.

Ten-year catalogue of 4059 stars reduced from observations extending from 1877 to 1886 at the royal Observatory, Greenwich. London 1889. 4°. (Appendix II to Greenwich Observations 1887).

Recomputation of the position of the ecliptic from the observations of the sun, in the years 1887—1888 and Corrections to refraction in meridian observations of stars, sun, moon, and planets, in the years 1887—1888 made at the royal Observatory, Greenwich. London 1889. 4°.
(Appendix III to Greenwich Observations 1887)

Proceedings of the royal Irish Academy. Dublin 1890. 3d Series. Vol. I. N°. 3. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1890. Band XV. Heft 2. 4°.

Inhoud:

L. T. von Gloeckelsthurn. Zur Kenntniss der Fauna der „grauen Kalke" der Süd-Alpen.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1890. N°. 6—9. 4°.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Wien 1890. Band V. N°. 2—3. 4°.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1890. Band XL. N°. 1—2. 8°.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Innsbruck 1890. 3e Folge. Heft 34. 8°.

Verhandlungen des naturforschenden Vereines. Brünn 1889. Band XXVII. 8°.

VIIer Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereines in Brünn. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1887. Brünn 1889 8°.

Mittheilungen des Vereines der Aerzte in Steiermark. Graz 1890. Jahr 1889. 8⁰.

Atti del Museo civico di Storia naturale. Trieste 1890. Vol. VIII. 8⁰.

Statistisches Handbuch der kön. Hauptstadt Prag und der Vororte Karolinenthal, Smichow, Weinberge und Zizkow für die Jahre 1887 und 1888. Prag 1889. Neue Folge. Jahrg. 6. 8⁰.
(2 Ex. Duitsch en Boheemsch).

Annuaire statistique de la ville capitale de Prague pour les années 1887 et 1888. Prague 1889. 8⁰.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, vydava Jednota Ceskych Mathematiku. Praze 1890. Rocnik XIX. Cislo VI. 8⁰.

Bulletin international de l'Académie des Sciences de Cracovie. 1890. N⁰. 6—7. 8⁰.

DUITSCHLAND.

Verhandlungen des botanischen Vereins der Provinz Brandenburg. Berlin 1889-1890. Jahrg. 30—31. 2 Dl. 8⁰.

Register über die Verhandlungen des botanischen Vereins der Provinz Brandenburg Bd. I—XXX (Jahrg. 1859—1888). Berlin 1889. 8⁰.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1890. Jahr 1889. Heft 1—6 4⁰. Oblong.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1890. Jahrg. 7. N°. 22—37. 4°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1890. Band CCXXI. Heft 1—2. 8°.

Mitteilungen der internationalen kriminalistischen Vereinigung. Berlin 1889—1890. Jahrg. 1. Heft 1—3. Jahrg. 2. Heft 1—2. 8°.

H. Conwentz. Monographie der baltischen Bernsteinbäume. Vergleichende Untersuchungen über die Vegetationsorgane und Blüten, sowie über das Harz und die Krankheiten der baltischen Barnsteinbäume. Danzig 1890. gr. 4°.
(Herausgegeben von der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig).

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft. Königsberg 1890. Jahrg. 30. 4°.

Jahrbuch der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten. Hamburg 1890. Jahrg. 7. gr. 8°.

Publication der kön. Sternwarte in Kiel. 1890. N°. V. 4°.

Inhoud:

H. Kloock. Tafel für das dritte Glied der Praecession.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1889. Heft 88. gr. 8°.

Verhandlungen des naturhistorischen Vereins der preuss. Rheinlande. Bonn 1889. Jahrg. 46. 2e Hälfte. Jahrg. 47. 1ste Hälfte. 8°.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1888—1889. N°. 1—3. 8°.

Neues lausitzisches Magazin, herausgegeben im Auftrage der oberlausitzischen Gesellschaft der Wissenschaften. Görlitz 1890. Band LXVI. Heft 1. 8°.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins. Magdeburg 1890. Jahr 1889. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1889. Band XV. N°. 7—9. 4°.

Inhoud:

7. W. Braune und O. Fischer. Ueber den Schwerpunkt des menschlichen Körpers mit Rücksicht auf die Ausrüstung des deutschen Infanteristen.
8. W. His. Die Formentwicklung des menschlichen Vorderhirns vom Ende des ersten bis zum Beginn des dritten Monats.
9. J. Gaule. Zahl und Vertheilung der markhaltigen Fasern im Froschrückenmark.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1890. Band XI. N°. 6. 4°.

Inhoud:

M. Voigt. Die technische Production und die bezüglichen römisch-rechtlichen Erwerbtitel.

Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1890. Mathematisch-physische Classe 1889. N°. 2—4. Philologisch-historische Classe 1889. N°. 4. 8°.

Register zu den Jahrgängen 1846—1885 der Berichte über die Verhandlungen und zu den Bänden I—XII der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1889. 8°.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1890. Jahrg. 25. Heft 2. 8°.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1890. 1ste Abth. Stück IV. (Zone + 55° bis + 65°). Stück XIV (Zone + 1° bis + 5°). 4°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. XIII. N°. 338—344. 8°.

Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1880. 2te Reihe. Teil IX. Heft 2. 8°.

Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1890. Band XXXVI. N°. 7—8. 4°.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, herausgegeben von der medizinisch-naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Jena 1890. Neue Folge. Band XVII. Heft 4. 8°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S 1890. 5te Folge. Band I. Heft 1. 8°.

Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften. Marburg 1890. Jahrg. 1889. 8°.

Abhandlungen der historischen Classe der kön. bayeri-

schen Akademie der Wissenschaften. München 1890. Band XIX. Abth. 2. 4⁰.

Inhoud:

C. R. von Höfler. Der Hohenzoller Johann, Markgraf von Brandenburg u. s. w.
C. A. Cornelius. Die Rückkehr Calvins nach Genf. II. Die Artichauds. III. Die Berufung.
A. von Druffel. Kaiser Karl V und die Römische Curie 1544—1546. 4e Abth. Von der Eröffnung des Trienter Concils bis zur Begegnung des Kaisers mit dem Hessischen Landgrafen in Speier.

Abhandlungen der philosophisch-philologischen Classe der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften. München 1890. Band XVIII. Abth. 3. 4⁰.

Inhoud:

F. Imhoof-Blumer. Griechische Münzen. Neue Beiträge und Untersuchungen.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. k. Akademie der Wissenschaften. München 1890. Heft 1—2. 8⁰.

Almanach der kön. bayerischen Akademie der Wissenschaften für des Jahr 1890. Munchen. kl. 8⁰.

Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Würtemberg. Stuttgart 1890. Jahrg. 46. 8⁰.

Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde, herausgegeben von dem kön. statistischen Landesamt. Stuttgart 1890. Jahrg. 1888. Band I. Heft 1—3. Band II. Heft 1—4. gr. 8⁰.

F. Goppelsroeder. Ueber Feuerbestattung. Mülhausen i/E. 1890. 8⁰.

B. J. Stokvis. Ueber vergleichende Rassenpathologie und die Widerstandsfähigkeit des Europäers in den Tropen. Berlin 1890. 8°.
(Sonderabdruck a. d. Verhandlungen des X intern. medicinischen Congresses).

C. J. de Freytag. Ueber die Einwirkung concentrirter Kochsalzlösungen auf das Leben von Bacterien. 8°.
(Separatabdruck a. d. Archiv für Hygiëne).

E. Selenka. Das Stirnorgan der Wirbeltiere. 8°.
(Sonderabdruck a. d. biologischen Centralblatt. Bd. X).

ZWITSERLAND.

Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles. Lausanne 1890. 3e Série. Vol. XXV. N°. 101. 8°.

ITALIË.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Roma 1888. Serie 4a. Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. V. 4°.

Inhoud:

BONARDI e GEROSA. Nuove ricerche intorno all'azione di alcune condizioni fisiche sulla vita dei microorganismi.

PASCAL. Sopre le relazioni che possono sussistere identicamente fra formazioni simboliche del tipo invariantivo nella teoria generale delle forme algebriche.

LAVALLE. Sul diopside delle "Borne de Brous" presso Ala in Val d'Ala (Piemonte).

MAURO. Studio sui fluossisali di molibdeno.

MOSSO. Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo.

MAGGIORE. Le leggi della fatica studiate nei muscoli dell'uomo.

GRANDIS. Influenza del lavoro muscolare, del digiuno e della temperatura sulla produzione di acido carbonico e sulla diminuzione di peso dell'organismo.

STRUEVER. Sulle forma cristallina dell'osido cromico.

BETOCCHI. Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1886.

BIANCHI. Sulle formi differenziali quadratiche indefinite.

ARTINI. Studio cristallografico della cerussite di Sardegna.

BRUGNATELLI. Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.

BATTELLI. Sul fenomeno Peltier a diverse temperature e sulle sue relazioni col fenomeno Thomson.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Serie 4a. Rendiconti. Vol. VI. 1e. Sem. Fasc. 8—12. 2e Sem. Fasc. 1—2. 4°.

Regolamento della Specola Vaticana. 4°.

Notice sur les travaux scientifiques et littéraires de M. ARISTIDE MARRE. Rome 1889. 4°.

Bollettino delle Opere moderne straniere. Roma 1890. Vol IV. N°. 6. Vol. V. N°. 1. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1890. N°. 108—113. 8°.

Archivio per l'Antropologia e la Etnologia. Firenze 1890. Vol. XX. Fasc. 1. 8°.

Atti della real Accademia delle Scienze. Torino 1890. Vol. XXV. Disp. 11—14. 8°.

Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1889 all'Osservatorio della R. Universita di Torino. 1890. 8°.

Rendiconti della reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1888. Serie 2. Vol. XXI. 8°.

Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Milano 1888. Vol. VIII. 8°.

Mittheilungen aus der zoologischen Station zu Neapel. Berlin 1890. Band IX. Heft 3. 8°.

Atti della Societa Toscana di Sienze naturali. Processi Verbali. Vol. VII. Adunanza del 4 Maggio 1890. 8°.

SPANJE.

Observaciones meteorologicas efectuadas en el Observatorio de Madrid durante los anos 1888 y 1889. Madrid 1890. 8°.

Resumen de las observaciones meteorologicas efectuadas en la peninsula y alcunas de sus islas adyacentes durante el ano de 1886 publicado por el Observatorio de Madrid. 1890. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale de Copenhague. 6e Série. Classe des Sciences. Vol. VI. N°. 1. 4°.

Inhoud:

L. Lorenz. Lysbevoegselen i og uden for en af plane lysbörger belyst kugle.

Oversigt over det kong. danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i Aaret 1889. N°. 3. Aaret 1890. N°. 1. 8°.

Nordiske fortidsminder udgivne af det kong. nordiske Oldskriftselskab. Kjobenkavn 1890. Hefte 1. 4°. (Avec des résumés en français).

Mémoires de la Société royale des Antiquaires du Nord. Copenhague 1889. Nouvelle Série. 8°.

Aarböger for nordisk Oldkyndighed og Historie, udgivne af det kong. nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1889—1890. 2e Raekke. Bind IV. Hefte 4. Bind V. Hefte 1—2. 8°.

Libri memoriales capituli Lundensis. Lunde domkapitels gaveböger og nekrologium udgivne ved C. Weeke. Kjobenhavn 1889. Hefte 2. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Samfundet for Nordiska Museets framjande 1888. Stockholm 1890. 8°.

Nordiske Museet in for 1890 ars riksdag. Stockholm 1890. 8°.

Acta Universitatis Lundensis. Lund 1888—1889. Tomus XXV. 4°.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. 1889. Vol. XXI. 4°.

Publicationen der norwegischen Commission der Europäischen Gradmessung. Christiania 1890. Heft 6—7. 4°.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences. St. Pétersbourg 1890. 7e Série. Tome XXXVI. N°. 17. Tome XXXVII. N°. 1—5. 4°.

Inhoud, Tome XXXVI;

17. B. Hasselberg. Untersuchungen über das Absorptionsspectrum des Jodgases.

Tome XXXVII;

1. B. Imchenetsky. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles symétriques.
2. A. Karpinsky. Ueber die Ammoneen der Artinsk-Stufe und einige mit denselben verwandte carbonische Formen.
3, 5. Wissenschaftliche Resultate der von der kais. Akademie der Wissenschaften zur Erforschung des Janalandes und der Neusibirischen Inseln in den Jahren 1885 und 1886 ausgesandten Expedition. Abth. I. Die paläozoischen Versteinerungen der Neusibirischen Insel Kotelny. Abth. II. Tertiäre Pflanzen der Insel Neusibirien.
4. H. Wild. Neue Form magnetischer Variationsinstrumente und zugehörender photographischer Registrir-Apparate mit Scalenablesung.

Bulletin de l'Académie impériale des Sciences. St. Pétersbourg 1890. Nouvelle Série. Tome I. N°. 2—3. 4°.

Verslagen van het keiz. aardrijkskundig Genootschap. St. Petersburg 1890. Dl. XXVI. N°. 1—4. 8°. (In het Russisch).

Jaarverslag van het keiz. aardrijkskundig Genootschap over 1889. St. Petersburg 1890. 8°. (In het Russisch).

H. Fritsche. On chronology and the construction of the calendar with special record to the Chinese computation of time compared with the European. St. Petersburg 1886. 8⁰.

Observations de Poulkova. St. Pétersbourg 1889. Vol. VIII. gr. 4⁰.

Zum 50-jährigen Bestehen der Nicolai-Hauptsternwarte. Beschreibung des 30-Zölligen Refractors und des astrophysikalischen Laboratoriums. St. Petersburg 1889. gr. 4⁰.

Ed. Lindemann. Photometrische Bestimmung der Grössenclassen der Bonner Durchmusterung. St. Pétersbourg 1889. gr. 4⁰.
(Supplément II aux Observations de Poulkova.)

W. Döllen. Stern-Ephemeriden auf das Jahr 1890 zur Bestimmung von Zeit und Azimut mittelst des tragbaren Durchgangsinstruments im Verticale des Polarsterns. St. Petersburg 1890. 8⁰.

O. Struve. Sammlung der Beobachtungen von Sternbedeckungen während der totalen Mondfinsterniss 1888 Januar 28. St. Petersburg 1889. 8⁰.

Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1890 ad 1894 computatae, edidit O. Struve. Petropoli 1889. 8⁰.

J. V. Schiaparelli. De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques. Mémoire présenté à l'Observatoire de Poulkova à l'occasion de sa fête sémiséculaire. St. Pétersbourg 1889. 8⁰.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1890. N°. 3. 8°.

Schriften herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1890. N°. V. gr. 8°.

Inhoud:

K. WEIHRAUCH. Fortsetzung der neuen Untersuchungen über die Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie.

Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft. Dorpat 1890. Band IX. Heft 1. 8°.

W. HOERSCHELMANN. De Catulli carmine duodeseptuagesimo commentatio. Dorpati 1889. 4°.

F. SCHUR. Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen. Leipzig 1889. 8°.

M. ABELMANN. Ueber die Ausnutzung der Nahrungsstoffe nach Pankreasexstirpation mit besonderer Berücksichtigung der Lehre von der Fettresorption. Dorpat 1890. 8°.

H. ADOLPHI. Ueber das Verhalten des Blutes bei gesteigerter Kalizufuhr. Dorpat 1889. 8°.

W. BECKMANN. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss des kohlensauren und citronsauren Natron auf die Ausscheidung der Alkalien. Dorpat 1889. 8°.

J. BERNSTEIN-KOHAN. Wirkung des Wolframs auf den thierischen Organismus. Dorpat 1890. 8°.

O. VON ESSEN. Die Amputationen und Exarticulationen der chirurgischen Klinik zu Dorpat in den Jahren 1878—1888. Dorpat 1889. 8°.

M. FALK. Versuche über die Raumschätzung mit Hülfe von Armbewegungen. Dorpat 1890. 8°.

J. FLEMMER. Ueber die peptische Wirkung des Magensaftes beim Neugeborenen und Foetus. Dorpat 1889. 8°.

R. HAGENTORN. Ueber den Einfluss des kohlensauren und citronsauren Natron auf die Ausscheidung der Säure im Harne. Dorpat 1890. 8°.

A. HARTMANN. Vergleichende Untersuchungen über den Haemoglobingehalt in dem Blute der Arteria carotis und der Vena jugularis. Dorpat 1889. 8°.

A. JASSINOWSKY. Die Arteriennaht. Dorpat 1889. 8°.

P. KLEMM. Studien über die pathologisch-anatomischen Veränderungen am Darm im Folge von Brucheinklemmung und ihre Bedeutung für die Herniotomie. Dorpat 1889. 8°.

L. KLEMPTNER. Ueber die Stickstoff- und Harnsäureausscheidung bei Zufuhr von kohlensaurem resp. citronsaurem Natron. Dorpat 1889. 8°.

W. KRAUSE. Die Methoden der Perineoplastik dargestellt im Anschluss an 30 nach dem Lawson Taitschen Princip operirte Fälle. Dorpat 1890. 8°.

L. KREWER. Versuche über Perineuritis purulenta. Dorpat 1889. 8°.

A. KUPFFER. Das Verhalten der Druckschwankungen und des Athmungsquantums bei künstlicher Respiration nach den Methoden von Schultze, Silvester, Pacini und Bain. Dorpat 1890. 8°.

A. Lezius. Blutveränderungen bei der Anämie der Syphilitischen. Dorpat 1889. 8°.

E. Mandelstamm. Ueber den Einfluss einiger Arzneimittel auf Secretion und Zusammensetzung der Galle. Dorpat 1890. 8°.

C. Meyer. Ueber den Eisengehalt der Leberzellen des Rinderfoetus, Kalbes und erwachsenen Rindes. Dorpat 1890. 8°.

O. Müller. Ueber den Einfluss einiger pharmakologischer Mittel auf Secretion und Zusammensetzung der Galle. Dorpat 1890. 8°.

A. Natanson. Ueber Glaucom im aphakischen Augen. Dorpat 1889. 8°.

W. Nissen. Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss von Alkalien auf Secretion und Zusammensetzung der Galle. Dorpat 1889. 8°.

Ph Strauch. Controleversuche zur Blutgerinnungstheorie von Dr. E. Freund. Dorpat 1889. 8°.

M. Wulfsohn. Studien über Geburtshülfe und Gynäcologie der Hippocratiker. Dorpat 1889. 8°.

F. Adermann. Beiträge zur Kentniss der in der Cordyalis cava enthaltenen Alkaloide. Dorpat 1890. 8°.

K. Juergenson. Beiträge zur Pharmacognosie der Apocyneenrinden. Dorpat 1889. 8°.

B. Jürgens. Vergleichende microscopisch-pharmacognostische Untersuchungen einiger officinellen Blätter mit Berücksichtigung ihrer Verwechselungen und Verfälschungen. Dorpat 1889. 8°.

CH. KARA-STOJANOW. Ueber die Alkaloide des Delphinium-Staphisagria. Dorpat 1890. 8°.

H. KRAUSE. Der Stickstoffverlust beim faulen stickstoffhaltiger organischer Substanzen. Dorpat 1890. 8°.

N. KRUSKAL. Ueber einige Saponinsubstanzen. Dorpat 1890. 8°.

P. SPEHR. Pharmacognostisch-chemische Untersuchung der Ephedra monostachia. Dorpat 1890. 8°.

A. THOMSON. Experimentelle Studien zum Verhalten des Sandbodens gegen Superphosphate. Dorpat 1890. 8°.

G. STAEHR. Ueber Ursprung, Geschichte, Wesen und Bedeutung des russischen Artels. Dorpat 1890. 8°.

O. WIEDEMANN. Das litauische Präteritum. 1ster Theil. Zum litauischen Vokalismus. Dorpat 1889. 8°.

Sitzungsberichte der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst aus dem Jahre 1889. Mitau 1889. 8°.

RUMENIË.

Documente privitore la istoria Romanilor culese de L. DE HURMUZAKI. Bucuresci 1890. Vol. I. Partea 2 (1346—1450). gr. 4°.

AZIË.

Journal of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1890. Vol. LVII. Part 2. N°. 5. Vol. LVIII. Part 1. Supplement. Vol. LIX. Part 1. N°. 1. 2. Part 2. N°. 1. 2. 8°.

Proceedings. of the Asiatic Society of Bengal. Calcutta 1890. N°. 1—3. 8°.

John Eliot. On the occasional inversion of the temperature relations between the hills and plains of Northern India. Calcutta 1890. 8°.
(Reprinted from the Journal of the Asiatic Society of Bengal, Vol. LIX).

Report on the meteorology of India. Calcutta 1890. Year 14. fol.

Report on the administration of the meteorological department of the government of India in 1888—89. fol.

Cyclone Memoirs. Part 2. Bay of Bengal Cyclone of August 21st—28st 1888. Calcutta 1890. 8°.

J. Eliot. Hand-book of cyclonic storms in the bay of Bengal. Calcutta 1890. 8°.

E. Thurston. Notes on the pearl and chank fisheries and marine fauna of the Gulf of Manaar. Madras 1890. 8°.
(Government Central Museum, Madras).

——————— Catalogue of the Batrachia Salientia and Apoda (frogs, toads and coecilians) of Southern-India. Madras 1888. 8°.

Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokio. Yokohama 1890. Heft 44. 4°.

Imperial University of Japan. Calendar for the year 1889—90. Tokio 1889. 8°.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1890. Vol. XIII. Part 2. 8°.

AMERIKA.

Smithsonian Contributions to Knowledge. Washington 1890. Vol. XXVI. 4°.

Inhoud:

S. W. Mitchell and E. T. Reichert. Researches upon the venoms of poisonous serpents.
A. Hyatt. Genesis of the Arietidae.

Annual Report of the board of regents of the Smithsonian Institution showing the operations for the year 1886 and 1887. Washington 1889. 3 Dl. 8°.

U. S. Department of Agriculture. Report of the chief of the section of vegetable pathology for the year 1889. 8°.

U. S. coast and geodetic Survey. Bulletin. N°. 18. 4°.

Memoirs of the National Academy of Sciences. Washington 1889. Vol. IV. Part 2. 4°.

Inhoud:

E. Loomis. Contributions to meteorology.
J. W. Gibbs. On the determination of elliptic orbits from three observations.
S. P. Langley. The temperature of the moon.
W. K. Brooks. On the Lucayan Indians.

M. Yarnall. Catalogue of stars observed at the U. S. naval Observatory during the years 1845 to 1877. Washington 1889. 4°.
(Washington Observations 1884. Appendix I).

Report of the superintendent of the U. S. naval Observatory for the year ending June 20, 1889. Washington 1889. 8°.

Annals of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1889. Vol. XXI. Part 1. Vol. XXII. 4°.

Inhoud, Vol. XXI. Part 1.

Observations of the New England meteorological Society in the year 1888.

Vol. XXII.

Meteorological Observations made at the summit of Pike's Peak, Colorado, January 1874 to June 1888.

Transactions of the American philosophical Society. Philadelphia 1890. New Series. Vol. XVI. Part 3. 4°.

Inhoud:

J. C. Branner. The cretaceous and tertiary geology of the Sergipe-Alagôas basin of Brazil.
G. B. Simpson. Descriptions of new species of fossils from the Clinton, Lower Helderberg, Chemung, and Waverly Groups, found in the collections of the geological Survey of Pennsylvania.
W. B. Scott und H. Fairfield Osborn. The mammalia of the Uinta formation.

J. Leidy. Notice of some fossil human bones. 8°. (Extracted from the Transactions of the Wagner free Institute of Science, Vol. II).

Reports of the 2d geological Survey of Pennsylvania. AA. 8°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1889—1890. Vol. VIII. N°. 75. Vol. IX. N°. 77, 82. 4°.

American Journal of Mathematics. Baltimore 1890. Vol. XII. N°. 3—4. 4°.

American chemical Journal. Baltimore 1889—1890. Vol. XI. N°. 8. Vol. XII. N°. 1—5. 8°.

General Index of Volumes I—X (1879—1888) of the American chemical Journal. Baltimore 1890. 8°.

The American Journal of Philology. Baltimore 1889—1890. Vol. X. N°. 4. Vol. XI. N°. 1. 8°.

Studies from the biological Laboratory of Johns Hopkins University. Baltimore 1890. Vol. IV. N°. 6. 8°.

Johns Hopkins University Studies in historical and political Science. Baltimore 1889—1890. 7th Series. VII—XII. 8th Series. N°. I—IV. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol. XIV. N°. 25—26. Vol. XV. N°. 1—10. 4°.

American Journal of Science. New Haven 1890. 3d Series. Vol. XXXIX. N°. 231—234. 8°.

Bulletin of the Minnesota Academy of natural Sciences. Minneapolis 1889. Vol. III. N°. 1. 8°.

The geological and natural History Survey of Minnesota. 7th Annual Report. St. Paul 1889. 8°.

N. H. Winchell. The history of geology surveys in Minnesota. St. Paul 1889. 8°.
(Bulletin N°. 1.).

——————— Natural Gas in Minnesota. St. Paul 1889. 8°.
(Bulletin N°. 5).

Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters. Madison 1889. Vol. VII. 8°.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society. Raleigh 1890. 7th Year. Part 2. 8°.

Proceedings of the California Academy of Sciences. San Francisco 1890. 2d Series. Vol. II. 8°.

Publications of the Leander Mc. Cornick Observatory of the University of Virginia. 1889. Vol. I. Part 4. gr. 8°.

Proceedings of the Canadian Institute. Toronto 1890. 3d Series. Vol. VII. Fasc. 2. 8°.

Mittheilungen des deutschen wissenschaftlichen Vereins in Mexico. 1890. Band I. Heft 2. 4°.

Boletin mensual. Mexico 1889. Tomo II. N°. 9—11. gr. 8°.

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior. Mexico 1890. N°. 56, 57. 8°.

Anales de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro. 1889. Tome IV. 2 Vol. 4°.

Anuario publicado pelo Observatorio astronomico do Rio de Janeiro P. 1888—1890. A°. IV—VI. 3 Dl. 8°.

Revista do Observatorio do Rio de Janeiro. 1890. A°. V. N°. 6—7. 4°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1890. Tome XXIX. Entr. 4—6. Tome XXX. Entr. 1—2. 8°.

Indice general de las materias contenidas en los Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Vol. I à XXIX. (1876 - 1889). Buenos Aires 1890. 8°.

Boletin del Istituto geographico Argentino. Buenos Aires 1889. Tomo XI. N°. 1—3. 8°.

Memoria general y especial sobre las minas, metalurgia, leyes de minas, recursos ventajas etc. de la explotacion de minas en la republica Argentina por H. D. Hoskold. Buenos Aires 1889. fol.

Catalogo oficial de la muestras de minerales exhibidas en la seccion Argentina annexa a la exposicion de Paris 1889. Buenos Aires 1889. 4⁰.

G. G. Davis. Ligeros apuntes sobre el clima de la republica Argentina. Buenos Aires 1889. 4⁰.

Rapport du président du Crédit public national (P. Agote) sur la dette publique, les banques, la frappe des monnaies, les budgets et les lois d'impots de la nation et des provinces. Buenos Aires 1889. Livre V. Gr. 8⁰.

P. Agote. Démonstration graphique de la dette publique, des banques, des impôts et de la frappe des monnaies de la république Argentine. Buenos Aires 1889. 4⁰.

J. J. Rohde. Descripcion de las gobernaciones nationales de la Pampa, del Rio negro y del Neuquen como complemento del plano general de las mismas. Buenos Aires 1889. gr. 8⁰.

Message du pouvoir exécutif national lu par le président de la République (Dr. M. J. Celman) à l'ouverture du congrès le 7 Mai 1889 et projet du budget général des dépenses de l'administration pour l'année 1890. Buenos Aires 1889. 8⁰.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico del Colegio Pio de Villa Colon. Montevideo 1890. Ano II. N⁰. 6—7. gr. 8⁰.

AUSTRALIË.

Annual Report of the Department of Mines, N. S. Wales for the years 1887, 1888 and 1889. Sydney 1888—1890. 3 Dl. fol.

Memoirs of the geological Survey of Mines, N S. Wales. Sydney 1888—1890. Paleontology N°. I—4. 4°.

Inhoud.

1. R. ETHERIDGE. The invertebrate fauna of the Hawkesbury-Wianamatta Series of N. S. Wales.
2. C. VON ETTINGSHAUSEN. Contributions to the tertiary flora of Australia.
3. O. FEISTMANTEL. Geological and palaeontological relations of the coal and plant-bearing beds of palaeozoic and mesozoic age in Eastern Australia and Tasmania.
4. A. S. WOODWARD. The fossil fishes of the Hawkesbury Series at Gosford.

Records of the geological Survey of N. S. Wales. Sydney 1889. Vol. I. Part 1—3. 4°.

Descriptive Catalogue of exhibits of metals, minerals, fossils and timbers compiled on behalf of the N. S. Wales Commission by R. B. SMITH. Sydney 1889. 8°.

J. H. MAIDEN. Wattles and Wattle-barks being hints on the conservation and cultivation of Wattles, together with particulars of their value. Sydney 1890. 8°.

Second systematic census of Australian plants by F. VON MUELLER. Melbourne 1889. Part 1. Vasculares. 4°.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz. Amsterdam 1890. Jaarg. 8. Afl. 2. 4°.

J. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Biographisch woordenboek der Noord- en Zuidnederlandsche Letterkunde. Amsterdam 1890. Nieuwe druk. Afl. 9. 8°.

Internationales Archiv für Ethnographie. Leiden 1890. Band III. Heft 3. 4°.

De Navorscher. Nijmegen 1890. Nieuwe Serie. Jaarg. 23. N°. 7—9. 8°.

Bibliotheca Belgica. Livr. C—CIII. 12°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 243—261. gr. 4°.

Journal des Savants. Paris, Juin—Août 1890. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1890. 7e Série. Zoologie. Tome IX. N°. 1—6. Botanie. Tome XI. N°. 2—3. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1890. 2e Série. Tome VIII. N°. 2. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1890. 2e Série. Tome XIV. Juin-Août. gr. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1890. 6e Série. Tome XX. Juillet—Septembre. 8°.

Revue générale de Botanique. Paris 1890. Tome II. N°. 18—20. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1890. 5th Series. Vol. XXX. N°. 182—184. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. VI. N°. 31—33. 8°.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1890. Vol. XXIV. Part 4. 8°.

Dictionary of national Biography, edited bij L. Stephen. Londen 1890. Vol. XXIII. (Gray-Haighton). 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2973—2993. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1890. N°. 12—18. 8°.

Arbeiten aus dem kais. Gesuntheitsamtes. Berlin 1890. Band VI. Heft 3. 4°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1890. Jahrg. XIV. N°. 25—37. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1890. Band VIII. Heft 5—9. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1888—1890. Jahrg. 54. Band II. Heft 1. Jahrg. 56. Band II. Heft 2. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1890. Neue Folge. Band XL. Heft 3—4. Band XLI. Heft 1. Beiblätter. Band XIV. St. 6—8. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1890. Band VI. Heft 1—2. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1890. 4e Folge. Band XVIII. Heft 1. 8°.

Bibliotheca Zoologica II. Leipzig 1890. Lief. 8. 8°.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Marburg 1890. Neue Reihe. Jahrg. 48. Heft 3—4. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1890. Band CCLXXVI. Heft 13. Band CCLXXVII. Heft 1—11. 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1890.

3e Période. Tome XLVI. N°. 138. Tome XLVII. N°. 139—140. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1890. 3e Période. Tome XXIII. N°. 6. Tome XXIV. N°. 7—8. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1890. Livr. 13—14. (Mat-Pak). gr. 8°.

Annales de Géologie et de Paléontologie publiées par A. de Gregorio. Palerme 1890. Livr. 7—8. gr. 4°.

Inhoud.

A. de Gregorio. Monographie de la faune éocénique de l'Alabama et surtout de celle de Claiborne de l'étage Parisien.

TEN GESCHENKE ONTVANGEN VAN DEN HEER J. C. G. Boot.

H. Beyerman. Feestrede ter gelegenheid van het 225 jarig bestaan van het Athenaeum Illustre te Amsterdam (1857.) 8°.

Beschouwingen over het Athenaeum Illustre en het onderwijs te Amsterdam. Amsterdam 1861. 8°.

Athenaeum en Onderwijs te Amsterdam. Eene repliek. Amsterdam 1861. 8°.

J. P. N. Land. De hoofdstad zetel van hooger onderwijs. Amsterdam 1872. 8°.

J. DE BOSCH KEMPER. Nog een paar woorden over het hooger onderwijs in Amsterdam. Amsterdam 1875. 8⁰.

Het Amsterdamsch Athenaeum. Toestand, hervorming, adressen. Amsterdam 1876. 8⁰.

J. TIDEMAN. De Amsterdamsche Universiteit. Amsterdam 1876. 8⁰.

C. M. J. WILLEUMIER. De reorganisatie van het Athenaeum te Amsterdam. Amsterdam 1877. 8⁰.

W. Moll. Een woord ter inwijding van de Universiteit der Stad Amsterdam, op 15 October 1877 uitgesproken. Amsterdam 1877. 4⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND OCTOBER 1890.

NEDERLAND.

Revue internationale des falsifications. Amsterdam 1890. 4e Année. Livr. 3. 4⁰.

Handelingen der 45ste Algemeene Vergadering van het Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap, gehouden op 30, 31 Juli en 1 Augustus 1890 te Middelburg. Amsterdam 1890. 8⁰.

K. W. VAN GORKUM. De Oost-Indische Cultures in betrekking tot handel en nijverheid. Amsterdam 1890. 4⁰.

Jaarboek van het Mijnwezen in Nederlandsch Oost-Indië. Amsterdam 1890. Jaarg. 19. 1ste gedeelte. gr. 8⁰.

E. A. Klobbie. De werking van salpeterzuur op stikstofhoudende lichamen. Leiden 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

Geneeskundig Jaarverslag betreffende den gezondheidstoestand bij de koninklijke Nederlandsche Marine gedurende 1888, medegedeeld door Dr. F. I. van Leent. 's Gravenhage. 1890 8°.

Mededeelingen betreffende het Zeewezen. 's Gravenhage 1890. Deel XXVII. Afl. 3. 8°.

Verslag aan den Koning van de bevindingen en handelingen van het veeartsenijkundig Staatstoezicht in het jaar 1889. 's Gravenhage 1890. 4°.

Verslag van de aanwinsten der koninklijke Bibliotheek gedurende het jaar 1889. 's Gravenhage 1890. 8°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs 1890—1891. 's Gravenhage 1890. Afl. 1. 2de gedeelte. 4°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1890. 5de Reeks. Deel V. Afl. 4. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1890. Jaarg. VII. N°. 8. 4°.

J. J. van Rijn. Traagheidsmomenten en equivalente massa's. Utrecht 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

Mededeelingen en berichten der Geldersch-Overijselsche Maatschappij van Landbouw over 1890. Lochem 1890. N°. 2. 8°.

H. Blink. Oost-Afrikaansche koloniale vraagstukken in historisch licht beschouwd. Z. p. en j. 8°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand Augustus 1890. 's Gravenhage 1890. 8°.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1890. Deel XL. Afl. 6—7. 8°.

C. Ph. Sluiter. Die Evertebraten aus der Sammlung der kön. naturwissenschaftlichen Vereins in Niederländisch Indien in Batavia. Batavia 1890. 8°. (Separatabdruck aus: Natuurk. Tijdschrift voor Nederlandsch Indië. Bd. L.)

—————— Ueber die Bildung der Kalkröhren von Gastrochaena. Batavia 1890. 8°. (Separatabdruck aus: Natuurk. Tijdschrift voor Nederlandsch Indië. Bd. L.)

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N°. 9. 8°.

J. Lorié. Contribution à la géologie des Pays-Bas. IV. Les deux derniers forages d'Amsterdam. Bruxelles 1890. gr. 8⁰.
(Extrait du Bulletin de la Société belge de Géologie etc. Tome III.)

FRANKRIJK.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CXI. N⁰. 12—15. 4⁰.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1890. 3e Série. Tome XXIV. N⁰. 38—41. 8⁰.

Bulletin de la Société philomatique. Paris 1890. 8e Série. Tome II. N⁰. 3. 8⁰.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1890. 6e Année. Tome XI. N⁰. 115. gr. 8⁰.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N⁰. 731—734. 4⁰.

J. A. Worp. Lettres du Seigneur de Zuylichem à Pierre Corneille. Paris—Groningue 1890. 8⁰.

GROOT-BRITTANNIË en IERLAND.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1890. New Series. Vol. XII. N⁰. 10. 8⁰.

Journal of the royal microscopial Society. London 1890. Part 5. 8⁰.

Transactions of the clinical Society. London 1890. Vol. XXIII. 8⁰.

Transactions of the royal Society of Edinburgh. 1888—1890. Vol. XXXIII. Part 3. Vol. XXXV. 4°.

Inhoud, Vol. XXXIII. Part 3:

J. T. Cunningham. The Polychaeta Sedentaria of the Firth of Forth.

Vol. XXXV:

J. Aitken. On the number of dust particles in the atmosphere.
A. Geikie. The history of volcanic action during the tertiary period in the British isles.
C. Piazzi Smyth. Mean Scottish meteorology for the last thirty-two years.
———— Eight Years' Observations of the new earth thermometers at the royal Observatory, Edinburgh, 1879—1888.
R. Kidston. On Neuropteris plicata, Sternberg, and Neuropteris rectinervis, Kidston.
———— On the fossil flora of the Staffordshire coal fields.
H. M. Cadell. Experimental researches in mountain buildings.
F. A. Helme. Histological observations on the muscular fibre and connective tissue of the uterus during pregnancy and the pureperium.
C. G. Knott. On some relations between magnetism and twist in iron and nickel.
R. Kidston. On the fossil plants in the Ravenhead collection in the free Library and Museum, Liverpool.
———— On some fossil plants from Teilia Quarry, Gwaenysgor, near Prestatijn, Flintshire.
W. Dittmar. On the behaviour of the hydrates and carbonates of the alkali-metals, and of barium, at high temperatures, and on the properties of Lithia and the atomic weight of Lithium.
G. Plarr. On the determination of the curve, on one of the coordinate planes, which forms the outer limit of the positions of the point of contact of an ellipsoid of revolution which always touches the three planes of reference.
G. Stewardson Brady. On Ostracoda collected by H. B. Brady.
Letts and R. F. Blake. On benzyl phosphines and their derivates.
F. E. Beddard. On the anatomy, histology, and affinities of Phreoryctes.
Wm. Turner. On the placentation of Halicore Dugong.

C. N. Little. Non-alternate ± knots, of orders eight and nine.
W. C. M'Intosh and E. E. Prince. On the development and life histories of the Teleostean food-and other fishes.
A. Crichton Mitchell. On the thermal conductivity and specific heat of Manganase-steel.
Th. R. Fraser. Strophantus hispidus: its natural history, chemistry and pharmacology.
Tait. On the foundations of kinetic theory of gases.
M'Laren. On systems of solutions of homogeneous and central equations of the *n*th degree and of two or more variables.

Proceedings of the royal Society of Edinburgh. 1889—1890. Vol. XV—XVI. 8°.

The Scientific Proceedings of the royal Dublin Society. Dublin 1889. New Series. Vol. VI. Part 7—9. 8°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1890. Band XL. Heft 1—2. gr. 8°.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereines für Steiermark. Graz 1890. Heft 26. 8°.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1889. Prag 1890. Jahrg. 50. 4°.

Ungarische Revue. Budapest 1889—1890. Jahrg. 9. Heft 4—10. Jahrg. 10. Heft 1—4. gr. 8°.

Archaeologiai Ertesitö. Budapest 1889. Kötet IX. Szam 3—5. Kötet X. Szam 1—2. gr. 8°.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Budapest 1890. Band VII. 8°.

Magyar tud. Akademiai Almanach. Budapest 1890. 8°.

Magyar tud. Akademia Evkönyvei. Budapest 1889. Kötet XVII. Darab 7. 4⁰.

Ertekezesek a mathematikai tudomanyok Köreböl. Budapest 1889. Kötet XIV. Szam 2—3. 8⁰.

Ertekezesek a tarsadalmi tudomanyok Körebol. Budapest 1889. Kötet X. Szam 3, 5—10. 8⁰.

Ertekezesek a nyelv- es szeptudomanyok Köreből. Budapest 1889—1890. Kötet XIV. Szam 11—12. Kötet XV. Szam 1—4. 8⁰.

Ertekezesek a termeszettudomanyok Köreböl. Budapest 1889—1890. Kötet XVIII. Szam 6—7. Kötet XIX. Szam 1—10. 8⁰.

Ertekezesek a torteneti tudomanyok Köreböl. Budapest 1889. Kötet XIV. Szam 5—9. 8⁰.

Ertekezesek a bolcseleti tudomanyok Köreböl. Budapest 1889. Kötet III. Szam 2. 8⁰.

A magyar tudom. Akademia elhunyt tagjai fölött tartott Emlekbeszedek. Budapest 1889—1890. Kötet V. Szam 9—10. Kötet VI. Szam 1—7. 8⁰.

Mathematikai es termeszettudomanyi Közlemenyek. Budapest 1889. Kötet XXIII. Szam 4. 8⁰.

Mathematikai es termeszettudomanyi Ertesitö. Budapest 1889—1890. Kötet VII. Füzet 4—9. Kötet VIII. Füzet 1—5. 8⁰.

Nyelvtudomanyi Közlemenyek. Budapest 1889—1890. Kötet XXI. Füzet 3—6. 8⁰.

A Magyar tudom. Akademia Ertesitöjo. Budapest 1889. Evfolyam XXIII. Szam 2—5. 8°.

Akademiai Ertesitö. Budapest 1890. Füzet 1—4. 8°.

A magyar tud. Akademia kiadasaban megjelent munkak es folyoiratok betürendes czim- es tartalomjegyzeke, 1830—1889. Budapest 1890. 8°.
(Alphabetisch Register op de werken door de Kon. Hongaarsche Akademie uitgegeven van 1830—1889).

Monumenta comitialia regni Hungariae. Budapest 1890. 1890. Kötet IX. 8°.

Monumenta comitalia regni transsylvaniae. Budapest 1889. Kötet XIV. 8°.

F. Kovacs. Index alphabeticus codicis diplomatici Arpadiani continuati. Budapest 1889. 8°.

L. Ovary. A magyar tud. Akademia törtenelmi bizottsaganak Oklevel-masolatai. Budapest 1890. Füzet I. 8°.
(Kopiën van oorkonden van de historische commissie der Hongaarsche Akademie.)

Archivium Rakoczianum. Budapest 1889. Tomus X. 8°.

D. Csanki. Magyarorszag törtenelmi földrajza a hunyadiak koraban. Budapest 1890. Kötet I. 8°.
(Geschiedkundige Aardrijkskunde van Hongarye in de XVe eeuw).

A. Ballagi. Colbert. Budapest 1887—1890. Resz. 2. 8°.

K. Demko. A felsö-magyarorszagi varosok eleteröl a XV—XVII szazadban. Budapest 1890. 8°.
(Het leven in de steden van Hongarye in de 15e—17e eeuw).

Z. Simonyi. A magyar hatarozok. Budapest 1890. Kötet I. Fele 2. 8°.
(De bijwoorden in het Hongaarsch).

J. Abel. Magyarorszagi tanulok külföldön. Budapest 1890. Kötet I. 8°.
(Hongaarsche studenten in het buitenland).

A. Thewrewk de Ponor. Sexti Pompei Festi de verborum significatione quae supersunt cum Pauli epitome. Budapestini 1889. Pars I. 8°.

J. Kunos. Oszman-Török nepköltesi gyüjtemeny. Budapest 1889. Kötet II. 8°.
(Verzameling Osmano-Turksche volksgedichten).

Monumenta Hungariae juridico-historica. Budapestini 1890. Tomus II. Pars I. 8°.

DUITSCHLAND.

Abhandlungen der kön. Akademie der Wissenschaften aus dem Jahre 1889. Berlin 1890. 4°.

Inhoud:

Rammelsberg. Ueber die chemische Natur der Glimmer.
Schulze. Ueber die Bezeichnung der Spongiennadeln.
Sachau. Arabische Volkslieder aus Mesopotamien.
Kayser und Runge. Ueber die Spectren der Elemente.
von Lendenfeld. Die Gattung Stelletta.
Moritz. Zur antiken Topographie der Palmyrene.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1890. Band CXXI. Heft 3. Band CCXXII. Heft 1. 8°.

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1890. Berlin 1890. 4°.

67ster Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Breslau 1890. 8°.

Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1890. 8°.

Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1890. Band XVI. N°. 1—2. imp. 8°.

Inhoud:

1. P. Starke. Arbeitsleistung und Wärmeentwickelung bei der verzögerten Muskelzuckung.
2. W. Pfeffer. I. Ueber Aufnahme und Ausgabe ungelöster Körper. II. Zur Kenntniss der Plasmahaut und der Vacuolen nebst: Bemerkungen über den Aggregatzustand des Protoplasmas und über osmotische Vörgange.

Abhandlungen der philologisch-historischen Classe der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig 1890. Band XI. N°. 7. imp. 8°.

Inhoud:

W. Roscher. Umrisse zur Naturlehre der Demokratie.

Berichte über die Verhandlungen der kön. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Classe. Leipzig 1890. N°. 1. 8°.

Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft. Leipzig 1890. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. XIII. N°. 345—347. 8°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, herausgegeben im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a/S. 1890. 5te Folge. Band I. Heft 2—3. 8°.

Zeitschrift des Vereins für Thüringische Geschichte und Altertumskunde. Jena 1890. Neue Folge. Band VII. Heft 1—2. 8°.

Petermann's Mitteilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1890. Band XXXVI. N°. 9—10. Ergänzungsheft N°. 98. 4°.

Archiv des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg. Würzburg 1890. Band XXXIII. 8°.

Jahres-Bericht des historischen Vereines von Unterfranken und Aschaffenburg für 1889. Würzburg 1890. 8°.

27ster Bericht der oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. Giessen 1889. 8°.

Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der kön. bair. Akademie der Wissenschaften. München 1890. Heft 3. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bair. Akademie der Wissenschaften. München 1890. Heft 3. Band II. Heft 1. 8°.

Chronik der Universität Kiel für das Jahr 1889—1890. Kiel 1890. 8°.

R. Foerster. Quaestiones physiognomicae. Kiliae 1890. Rede. 4°.

———— Die Kunst in Schleswig-Holstein. Kiel 1890. Rede. 8°.

G. Karsten. Die internationale General-Konferenz für Maass und Gewicht in Paris 1889. Kiel 1890. Rede. 8°.

W. Barbrock. Ueber Pseudoleukämie mit recurrierendem Fieberverlauf. Kiel 1890. 8⁰.

L. Bartscher. Ein seltener Fall von beiderseitigem Nierendefect neben anderen Missbildungen. Kiel 1890. 8⁰.

A. Becker. Zwei geheilte Fälle von Darm-Invagination. Kiel 1890. 8⁰.

A. Bier. Ueber circuläre Darmnaht. Kiel 1889. 8⁰.

H. Bögershausen. Ueber Ektropium-Operationen. Kiel 1890. 8⁰.

H. Bolte. Beitrag zur Aetiologie und operativen Behandlung der Haematocele retrouterina. Kiel 1889. 8⁰.

K. Bulnheim. Ein Fall von Echinococcus-Embolie der Hirnarterien. Kiel 1890. 8⁰.

A. Denker. Ein Beitrag zur Lehre von der Resorptionsthätigkeit der Magenschleimhaut. Kiel 1890. 8⁰.

C. Dose. Beitrag zur Kenntniss der Wirkung des Laudanins. Kiel 1890. 8⁰.

O. Dressler. Ein Beitrag zur Beurtheilung der Alekander-Adams'schen Operation. Kiel 1890. 8⁰.

A. Freers. Ein Beitrag zum Erfolg der Iridektomie bei Glaucoma simplex. Kiel 1890. 8⁰.

M. Gottberg. Beitrag zur Behandlung traumatischer Gehirnabscesse. Kiel 1890. 8⁰.

P. Guttmann. Erfahrungen über das Pyoctanin in der chirurgischen Praxis. Kiel 1890. 8⁰.

M. HENSELER. Zwei Fälle von zahlreichen Divertikeln des Dündarms. Kiel 1890. 8°.

G. HEYKEN. Anatomische Untersuchungen über die Muskulatur der breiten Mutterbänder. Kiel 1890. 8°.

E. HOTZEN. Beitrag zur Lehre von der Verhornung innerer Epithelien. Kiel 1890. 8°.

B. JANNSEN. Ueber Canthoplastik. Kiel 1890. 8°.

W. KLINGENBERG. Ein Beitrag zur Behandlung traumatischer Gehirnabscesse. Kiel 1890. 8°.

E. KOWALZIG. Zur Aetiologie und Therapie der Encephalocele. Kiel 1890. 8°.

J. LAMMERS. Anatomische und klinische Mitteilungen zur Physiologie der Nachgeburtsperiode. Kiel 1890. 8°.

W. LÖBNER. Ueber Hautableitung bei Erkrankungen der Hirnhäute. Kiel 1889. 8°.

F. LORENZ. Ueber den Status epilepticus. Kiel 1890. 8°.

J. LÜDERS. Ueber Cachexia strumipriva. Kiel 1890. 8°.

W. MAYER. Beiträge zur Statistik der Lippengeschwülste. Aachen 1890. 8°.

J. MONTAG. Ueber Trepanation bei Kopfverletzungen. Kiel 1890. 8°.

E. NEUHAUS. Ein seltener Fall von Aplasie der Hoden. Kiel 1890. 8°.

F. PETERMÖLLER. Ueber den sogenannten Geschlechtstypus des menschlichen Brustbeines. Kiel 1890. 8°.

O. Peters. Ueber das Pterygium. Kiel 1890. 8°.

Th. Peters. Ueber die Resultate der Keuchhustenbehandlung in der medizinischen Polikliniek zu Kiel während der letzten Epidemie (Sommer 1889). Kiel 1889. 8°.

M. Praust. Ueber Laparotomie und Darmnaht bei Schuss- und Stichverletzungen. Kiel 1890. 8°.

E. Rauert. Fälle von sogenannten Fetthernien in der Bauchwand. Kiel 1890. 8°.

O. Reinking. Beitrag zur Kenntnis der flegmonösen Gastritis. Kiel 1890. 8°.

F. Robert. Ueber Wiederbildung quergestreifter Muskelfasern. Kiel 1890. 8°.

L. Roessler. Zur Aetiologie der Erblindungen. Kiel 1889. 8°.

B. Röhrs. Ueber die Exstirpation des Thränensacks. Kiel 1890. 8°.

M. Ruhberg. Ueber Zündhütchenverletzungen des Auges. Kiel 1889. 8°.

K. Schartau. Ein Beitrag zur Kenntniss der Aktinomykose. Kiel 1890. 8°.

J. Schmalmack. Die pathologische Anatomie der tuberkulösen Peritonitis nach den Ergebnissen von 64 Sectionen. Kiel 1889. 8°.

C. Schmidt. Beitrag zur Lehre von den Schädelverletzungen während der Geburt. Kiel 1890. 8°.

C. Schüler. Ueber einen Fall von Uterus duplex septus cum vagina septa. Kiel 1890. 8°.

C. Schultze. Ueber Anomalien des Schildknorpels. Kiel 1890. 8°.

A. Schwabe. Ueber Frühbehandlung der Osteomyelitis durch Trepanation resp. Aufmeisselung des Knochens. Kiel 1890. 8°.

H. Steudel. Zur Casuistik der erworbenen Zwerchfellsbrüche. Kiel 1889. 8°.

K. Steinmann. Einige Fälle von Magengeschwür im jügendlichen Alter. Kiel 1890. 8°.

J. Stroetmann. Beitrag zur Statistik und pathologischen Anatomie der Darmeinschiebungen. Kiel 1890. 8°.

E. Therig. Ein Beitrag zur Statistik der Zahncaries. Kiel 1890. 8°.

J. Topp. Beitrag zur Lehre von den Darmwandbrüchen. Kiel 1890. 8°.

J. Wichmann. Ueber das Verhalten des Trichocefalus dispar zur Darmschleimhaut. Kiel 1889. 8°.

O. Wiese. Ein Beitrag zur Laparotomie bei Bauchfelltuberculose. Kiel 1890. 8°.

H. Göttsch. Ueber Pyridinderivate aus Propionaldehydammoniak und Propionaldehyd. Kiel 1890. 8°.

A. Grimpen. Ein Beitrag zur Theorie der durch eine kreisförmige Oeffnung erzeugten Beugungserscheinungen. Kiel 1890. 8°.

Chr. Hundt. Ueber die Darstellung optisch aktiver Tropasäure und optisch aktiver Atropine. Kiel 1890. 8°.

B. Karsten. Ueber die Lage des Neutralen Punktes in einem Induktionskreise. Kiel 1890. 8°.

Th. Kröber. Ueber Derivat des ortho- und para-Tolubenzylamins. Kiel 1890. 8°.

G. Oelschläger. Ueber das Pseudo-Ephedrin. Kiel 1890. 8°.

G. Penseler. Eine lineare Differentialgleichung fünfter Ordnung mit zwei endlichen singulären Stellen. Kiel 1890. 4°.

F. Ahlgrimm. Untersuchungen über die Gothaer Handschrift des »Herzog Ernst." Kiel 1890. 8°.

F. Beheim-Schwarzbach. Libellus περὶ ἑρμηνείας qui Demetrii nomine inscriptus est quo tempore compositus sit. Kiliae 1890. 8°.

L. Boysen. Schiffs-, Tonnen- und Personenfrequenz auf dem atlantischen Ozean. Berlin 1890. 8°.

J. Christiansen. De apicibus et i longis inscriptionum latinarum. Husum 1890. 8°.

J. Dietze. Quaestiones hyginianae. Kiliae 1890. 8°.

H. Feige. Die Geschichte des Mâr 'Abhdiso und seines Jüngers Mâr Qardagh herausgegeben und übersetzt. Kiel 1889. 8°.

C. Ferber. Utrum metuerit Tiberius Germanicum necne quaeritur. Hamburgi 1890. 8°.

F. Friedrichsmeier. De Luciani re metrica. Kiliae 1889. 8°.

A. Harstrick. Untersuchung über die Praepositionen bei Alfred dem Grossen. Kiel 1890. 8°.

E. KELTER. Apulei quae fertur physiognomia quando composita sit. Kiliae 1890. 8°.

G. KRAMER. Ueber Stichomythie und Gleichklang in den Dramen Shakespeares. Duisburg 1889. 8°.

G. LOECK. Die Homiliensammlung des Paulus Diakonus, die unmittelbare Vorlage des Otfridischen Evangelienbuchs. Kiel 1890. 8°.

G. RADKE. Die epische Formel im Nibelungenliede. Fraustadt 1890. 4°.

G. ROSENHAGEN. Untersuchungen über Daniel vom Blühenden Tal vom Sticker. Kiel 1890. 8°.

C. SCHMIDT. De articulo in nominibus propriis apud Atticos scriptores pedestres. Kiliae 1890. 8°.

F. SCHULTZ. Die Ueberlieferung der mittelhochdeutschen Dichtung „Mai und Beaflor". Leipzig 1890. 8°.

H. SCHRÖDER. Zur Waffen- und Schiffskunde des deutschen Mittelalters bis um das Jahr 1200. 8°.

G. SEELIG. Die Erbfolgeordnung des Schwabenspiegels. Kiel 1890. 8°.

E. THOMSEN. Ueber die Bedeutungsentwicklung der Scheidewörter des Fransösischen. Kiel 1890. 8°.

ZWITSERLAND.

Neue Denkschriften der allgemeinen schweizerischen Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften Zürich 1890. Band XXXII. Abth. 1. 4°.

Inhoud:

ED. FISCHER. Untersuchungen zur vergleichenden Entwicklungsgeschichte und Systematik der Phalloideen.
C. CRAMER. Ueber die verticillirten Siphoneen besonders Neomeris und Bornetella.

Mitteilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1889. Bern 1890. N^0. 1215—1243. 8^0.

Compte rendu des travaux présentés à la 72e Session de la Société helvétique des Sciences naturelles réunie à Lugano les 9, 10 et 11 Septembre 1889. Genève 1889. 8^0.

Verhandlungen der schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Lugano den 9, 10 und 11 September 1889. Jahresbericht 1888—1889. Lugano 1890. 8^0.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Serie 4a. Rendiconti. Vol. VI. Fasc. 3—4. 4^0.

Archivio per l'antropologia e la etnologia. Firenze 1890. Vol. XX. Fasc. 2. 8^0.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1890. N^0. 114—115. 8^0.

DENEMARKEN.

Aarböger for nordisk Oldkyndighed og Historie, udgivne af det kongelige nordiske Oldskrift-Selskab. Kjobenhavn 1890. 2e Raekke. Bind V. Hefte 3. 8^0.

ZWEDEN EN NOORWEGEN.

Nova Acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Upsaliae 1890. Seriei 3. Vol. XIV. Fasc. 1. 4°.

Inhoud:

C. F. LINDMAN. Supplément au Traité d'une fonction transcendente, publié en 1874.
A. BERGER. Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres.
H. MOHN et H. H. HILDEBRANDSSON. Les orages dans la péninsule Scandinave.
C. BOVALLIUS. The Oxycephalids.

Catalogue méthodique des Acta et Nova Acta regiae Societatis scientiarum Upsaliensis 1744—1889, rédigé par A. G. S. JOSEPHSON. Upsala 1890. 4°.

Upsala Universitets Arsskrift 1889. Upsala. 8°.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Handlingar. Stockholm. Ny Följd. Dl. I—VIII, 1. IX. X. 8°.

Antiquarisk Tidskrift for Sverige, utgifven af Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien. Stockholm 1869—1890. Dl. II—V. 1—3. VI—VIII. 1—2. IX. 1—2. X. XI. 1. 8°.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad. Stockholm 1885—1889. Arg. 14—18. 8°.

B. E. HILDEBRAND. Svenska sigiller frän medeltiden. Stockholm 1862—1873. Häftet 1—2. fol.

B. E. HILDEBRAND och H. HILDEBRAND. Teckningar ur Svenska Statens historiska Museum. Stockholm 1873—1883. Häftet 1—3. fol.

C. J. Tornberg. Numi cufici regii numophylacii Holmiensis omnes in terra Sueciae reperti. Upsaliae 1848. 4°.

B C. Hildebrand. Monnaies anglosaxones du Cabinet royal de Stockholm toutes trouvées en Suède. Stockholm 1846. 4°.

——————. Minnespenningar öfver enskilda Svenska män och qvinnor. Stockholm 1860. 8°.

——————. Sveriges och Svenska Konungahusets minnespenningar praktmynt och belöningsmedaljer. Stockholm 1874—1875. Delen I—II. 8°.

——————. Anglosachsiska mynt i svenska kongliga myntkabinettet funna i Sveriges jord. Stockholm 1881. 8°.

RUSLAND.

Mémoires de l'Académie impériale des Sciences. St. Pétersbourg 1890. Tome XXXVII. N°. 6—7. 4°.

Inhoud:

6. H. Wild. Nadel-Inclinatorium modificirter Construction.
7. D. Iwanowsky und W. Poloftzoff. Die Pockenkrankheit der Tabakspflanze.

AMERIKA.

8th. Annual Report of the U. S. geological Survey to the Secretary of the Interior 1886—1887 by I. W. Powell. Washington 1889. 2 Dl. 4°.

Monographs of the U. S. geological Survey. Washington 1889—1890. Vol XV—XVI. 3 Dl. 4°.

Inhoud, Vol. XV:

W. M. FONTAINE. The Potomac or younger mesozoic flora.

Vol. XVI.

J. S. NEWBERRY. The paleozoic fishes of North America.

Bulletin of the U. S. geological Survey. Washington 1889—1890. N°. 54—57. 8°.

Observations made during the year 1884 at the U. S. Naval Observatory. Washington 1889. 4°.

Report upon U. S. geographical Surveys west of the 100th meridian. Washington 1889. Vol. I. Geographical Report. 4°.

Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. Boston 1889. New Series. Vol. XVI. 8°.

Proceedings of the American philosophical Society. Philadelphia 1889. Vol. XXVII. N°. 131. Vol. XXVIII. N°. 132—133. 8°.

Transactions of the Wagner free Institute of Science. Philadelphia 1890. Vol. III. gr. 8°.

Proceedings of the American Association for the advancement of Science. Salem 1890. Vol. XXXVIII. 8°.

28th Annual Report of the Secretary of the state board of Agriculture of the State of Michigan from July 1, 1888 to June 30, 1889. Lansing 1889. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol. XV. N°. 12—15. 4°.

American Journal of Science. New Haven 1890. 3d Series. Vol. XL. N°. 235—237. 8°.

Publications of the Washburn Observatory. Madison, Wisc. 1890. Vol. VI. Part 1—2. 4°.

Journal of the Elisha Mitchell scientific Society. Raleigh 1890. Vol. VII. Part 1. 8°.

Proceedings and Transactions of the royal Society of Canada for the year 1889. Montreal 1890. Vol. VII. 4°.

S. T. Rand. Dictionary of the language of the Micmac Indians, who reside in Nova Scotia, New Brunswick, Prince Edward Island, Cape Breton and New Foundland. Halifax N. S. 1888. 4°.

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior, agricultura e industrias. Mexico 1890. N°. 58—59. 8°.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 8. gr. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1890. Tomo XXX. Entr. 3. 8°.

F. P. Moreno. Le Musée de la Plata. Rapide coup d'oeil sur sa fondation et son développement. 1890. 4°.

AANGEKOCHT.

Oud-Holland. Nieuwe Bijdragen voor de geschiedenis der Nederlandsche Kunst, Letterkunde, Nijverheid, enz Amsterdam 1890. Jaarg. VIII. Afl. 3. 4°.

J. F. VAN SOMEREN. Beschrijvende Catalogus van gegraveerde portretten van Nederlanders. Amsterdam 1890. Deel II. gr. 8°.

Internationales Archiv für Ethnographie. Leiden 1890. Band III. Heft 4. Met Supplement. 4°.

De Navorscher. Nijmegen 1890. Nieuwe Serie. Jaarg. 23. Afl. 10. 8°.

Dictionnaire des antiquités grecques et romaines. Paris 1890. Fasc. 14. (Don.-Ele). gr. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 262—267. gr. 4°.

Journal des Savants. Paris, Septembre 1890. 4°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1890. 7e Série. Zoologie. Tome X. N°. 1—3. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1890. 2e Série. Tome VIII. N°. 3. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1890. 2e Série. Tome XIV. Septembre. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1890. 6e Série. Tome XXI. Octobre. 8°.

Revue générale de Botanique. Paris 1890. Tome II. N°. 21—22. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1890. 5th Series Vol. XXX. N°. 185. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. VI. N⁰. 34. 8⁰.

Annals of Botany. London 1890. Vol. IV. N⁰. XV. gr. 8⁰.

Dictionary of national Biography, edited by L. STEPHEN. London 1890. Vol. XXIV. (Hailes-Harriott). gr. 8⁰.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1890. N⁰. 19. 8⁰.

Astronomische Nachrichten. 1890. N⁰. 2994—2997. 4⁰.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1890. Jahrg. XIV. N⁰. 38—41. 4⁰.

Verhandlungen des botanischen Vereins für die Provinz Brandenburg. Berlin 1863—1867. Jahrg. 5, 6, 8, 9. 8⁰.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1890. Neue Folge. Band XLI. Heft 2. Beiblätter. Bd. XIV. St. 9. 8⁰.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1890. Band VI. Heft 3. 8⁰.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1890. Band CCLXXVII. Heft 12—13. Band CCLXXVIII. Heft 1. 8⁰.

Bibliothèque universelle et Revue Suisse. Lausanne 1890. 3e Période. Tome XLVII. N⁰. 141. 8⁰.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1890. 3e Période. Tome XXIV. N⁰. 9. 8⁰.

A. DE GUBERNATIS. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1890. Livr. 16. (Rin-Spi). gr. 8⁰.

Journal of Morphology. Boston 1890. Vol. IV. N⁰. 1. gr. 8⁰.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAANDEN NOVEMBER EN DECEMBER 1890.

NEDERLAND.

Volks-Almanak der Maatschappij tot Nut van 't Algemeen voor het jaar 1891. Amsterdam 1891. 8°.

Wiskundige Opgaven met de oplossingen door de leden van het wiskundig Genootschap. »Een onvermoeide arbeid komt alles te boven". Amsterdam 1890. Deel IV. St. 6. 8°.

C. E. Daniëls. Iets over kuischheidgordels en nog wat. 8°. (Overdruk van het Ned. Tijdschrift voor Verloskunde en Gynaecologie).

Revue international des falsifications. Amsterdam 1890. Livr. 4—5. 4°.

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société Hollandaise des Sciences. la Haye 1890. Tome III. 4°.

Tijdschrift. Orgaan der Nederlandsche Maatschappij ter bevordering van Nijverheid. Haarlem 1890. N°. 12—13. 8°.

Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde over het jaar 1888—1889. Leiden 1889. 8°.

Levensberichten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde. Leiden 1889. 8°.

Annalen der Sternwarte in Leiden, herausgegeben von H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN. Haag 1890. Band V. 4°.

Verslag van den staat der Sterrenwacht te Leiden en van de aldaar volbrachte werkzaamheden van 17 September 1889 tot 16 September 1890. Leiden 1890. 8°.

Zoologische Ergebnisse einer Reise in Niederländsch Ost-Indien, herausgegeben von Dr. MAX WEBER. Leiden 1891. Heft 2. gr. 8°.

L. R. TELTING. Deelbare en ondeelbare verbintenissen. Leiden 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

A. H. C. VAN SENUS. Bijdrage tot de kennis der cellulosegisting. Leiden 1890. Academisch Proefschrift. 8°.

Annales de l'Ecole polytechnique de Delft. Leide 1890. Tome VI. Livr. 1. 4°.

Verslagen aan den Koning betrekkelijk den dienst der posterijen, der rijkspostspaarbank en der telegrafen in Nederland, 1889. III. Telegrafen. 's Gravenhage 1890. 4°.

Verslag aan den Koning over de openbare werken in het jaar 1889. 's Gravenhage 1890. 4°.

Enquête, gehouden door de Staatscommissie, benoemd krachtens de wet van 19 Januari 1890 (Staatsblad N°. 1). Tweede Afdeeling. Twenthe. Groninger Veenkoloniën. Derde Afdeeling. Leiden. fol.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1890. Jaarg. VII. N°. 9—10. 4°.

Handelingen der Nederlandsche Juristen-Vereeniging. 's Gravenhage 1889—1890. Jaarg. 20—21. 8°.

Tijdschrift voor Entomologie, uitgegeven door de Nederlandsche entomologische Vereeniging. 's Gravenhage 1890. Deel XXXIII. Afl. 4. 8°.

M. C. Piepers. Ueber die Entwicklungsgeschichte einiger javanischen Papilioniden-Raupen. Haag 1888. 8°. (Overgedrukt uit Tijdschrift voor Entomologie, Deel XXXI).

Waterbouwkunde door N. H. Henket, Ch. M. Schols en I. M. Telders. 's Gravenhage 1890. 2de gedeelte. Afl. 3. 8°.

L. A. J. W. Sloet. De planten in het Germaansche volksgeloof en volksgebruiken. 's Gravenhage 1890. 8°.

J. Franck. Etymologisch Woordenboek der Nederlandsche taal. 's Gravenhage 1890. Afl. 7. (Raket-Slof). 8°.

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1887, uitgegeven door het Koninklijk Nederlandsch meteorologisch Instituut. Utrecht 1888. Jaarg. 39. 4°. Oblong.

C. Wilde. De briefwisseling van Plinius en Traianus en de jongste bestrijder harer echtheid. Een verweerschrift. Utrecht 1890. 8°.

Catalogus van het Museum van Oudheden te Nijmegen. 2de gedeelte. Gedenkteekenen van middeleeuwschen oorsprong en van lateren tijd. Nijmegen 1890. 3de druk. 8°.

Catalogus der Boekerij van het provinciaal Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Noord-Brabant. 's Hertogenbosch 1890. 4de gedeelte. 8°.

Militair onderwijs in Nederland en Nederlandsch-Indië (1735—1890). Eerste proeve van een bibliographisch overzicht door I. P. I. W. Körndörffer. Breda 1890. gr. 8°.

De vrije Fries. Mengelingen uitgegeven door het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid-, en taalkunde. Leeuwarden 1890. 3de Reeks. Dl. V. Afl. 4. 8°.

Aanwinsten van het munt-, penning- en zegelkabinet (1889—1890) van het Friesch Genootschap van geschied-, oudheid- en taalkunde. 8°.

J. Dirks. De lustplaats Groot Heerema bij Zweins. (Leeuwarden 1890). 12°.

————. Jacob Canter. (Leeuwarden 1890). 8°.

Jaarboek der Rijks-Universiteit te Groningen, 1889—1890. Groningen 1890. 8°.

Algemeen Verslag wegens het Instituut voor Doofstommen te Groningen, over het schooljaar 1889—1890. 8°.

H. E. Moltzer. Frederik III en Karel de Stoute. Naar het Berlijnsche handschrift en een fragment van: Die enighe sprake ende vereneghinge die Sunte Augustinus hadde mit God. Groningen 1890. 8°. (Bibliotheek van middelnederlandsche Letterkunde).

J. T. Oudemans. Einige Bemerkungen über die Arbeit von Prof. B. Grassi und Dr. G. Rovelli »il sistema dei Tisanuri". gr. 8°.

A. D. Loman. De jongste uitgaaf der Agrapha. (1890). 8°. (Theologisch Tijdschrift).

J. GRONEMAN. Een avond bij den rijksbestuurder van Jogjåkartå. 4°.
(Separat-Abdruck aus: Intern. Archiv für Ethnographie).

———— De besnijdenis van den Kroonprins van Jogjåkartå. 8°.
(Overgedrukt uit de Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 5e Reeks. Deel V.)

Koninkrijk der Nederlanden. Statistiek van den in-, uit- en doorvoer over het jaar 1889. 2de Gedeelte. 's Gravenhage 1890. fol.

Statistiek van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maanden September, October en November 1890. 's Gravenhage 1890. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Juni 1890. fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maanden Mei en Juni 1890. fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor Nijverheid en Landbouw in Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Nederlandsch-Indische Maatschappij van Nijverheid en Landbouw. Batavia 1890. Deel XLI. Afl. 1—2. 8°.

Geneeskundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Vereeniging tot bevordering der geneeskundige Wetenschappen in Nederlandsch-Indië. Batavia 1890. Deel XXX. Afl. 4—5. 8°.

Verslag omtrent den staat van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg en de daarbij behoorende inrichtingen over het jaar 1889. Batavia 1890. gr. 8°.

Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin. VII. Chemisch-pharmacologisch Laboratorium. Eerste Verslag van het onderzoek naar de plantenstoffen van Nederlandsch-Indië door M. Greshoff. Batavia 1890.

M. C. Piepers. Observations sur les vols de Lépidoptères aux Indes orientales Néerlandaises et considérations sur la nature probable de ce phénomène. Batavia 1890. 8°.
(Overgedrukt uit het Natuurk. Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel L).

G. J. P. J. Bolland. Die Lebenserscheinungen und der Erklärungswahn in der Physiologie der Gegenwart. 8°.
(Overgedrukt uit het Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel L).

BELGIË.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts de Belgique. Bruxelles 1890. 3e Série. Tome XX. N°. 9—11. 8°.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N°. 10—11. 8°.

La Cellule. Recueil de Cytologie et d'Histologie géné-

rale. Louvain 1884—1890. Tome I—VI. Fasc. 1. gr. 8.

O. Wattez. Een hoekje van Zuid-Vlaanderen, Oudenaarde, Ronse en omstreken. Gent 1890. 8°.
(Uitgave van het Willems-Fonds N°. 120).

A. Vermast. Jacob van Maerlant. Gent 1890. 8°.
(Volksboekje uitgeg. door het Willems-Fonds. N°. 9).

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CXI. N°. 16—24. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1888—1890. 4e Série. Tome XVI. N°. 2. Tome XVII. N°. 2. Tome XVIII. N°. 3—4. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1890. 3e Série. Tome XXIV. N°. 42—50. 8°.

Compte-rendu sommaire des séances de la Société philomatique de Paris. 1890. N°. 1—4. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N°. 736—743. 4°.

Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1890. 6e Année. Tome XI. N°. 114, 116, 118—119. gr. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1890. New Series. Vol. XII. N°. 11—12. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1890. Vol. L. N°. 9, Vol LI. N°. 1. 8°.

Comparison of the places of the moon deduced from Burckhardt's and Hansen's tables for every Greenwich mean midnight during the years 1847—62, together with a corrected comparison of Hansen's tables with the Greenwich Observations during the years 1847—61. London 1890. 8°.
(Appendix to Vol. L. of the Monthly Notices of the royal astron. Society).

Journal of the royal microscopical Society. London 1890. Part 5—6. 8°.

Transactions of the Sanitary Institute. London 1890. Vol. X. 8°.

Proceedings of the Cambridge philosophical Society. Cambridge 1890. Vol. VII. Part 2. 8°.

Proceedings of the philosophical Society. Glasgow 1890. Vol. XXI. 8°.

The collected mathematical papers of ARTHUR CAYLEY. Cambridge 1890. Vol. III. 4°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Wien 1890. N°. 10—13. gr. 8°.

Astronomische Arbeiten des k. k. Gradmessungs-Bureau. Wien 1890. Bd. II. (Längenbestimmungen). 4°.

Bulletin international de l'Académie des Sciences. Cracovie 1890. N°. 8—9. 8°.

DUITSCHLAND.

Ergebnisse der Beobachtungsstationen an den deutschen Küsten über die physikalischen Eigenschaften der Ostsee und Nordsee und die Fischerei. Berlin 1890. Jahrg. 1889. Heft 7—9. 4°. Oblong.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1890. Jahrg. 7. N°. 38—45. 4°.

J. Ritzema Bos. Tierische Schädlinge und Nützlinge für Ackerbau, Viehzucht, Wald- und Gartenbau. Berlin 1891. 8°.

Schriften der naturforschenden Gesellschaft. Danzig 1890. Neue Folge. Band VII. Heft 3. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. 13. N°. 348—351. 8°.

Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. 1890. Heft 22. 8°.

XV. Bericht der naturforschenden Gesellschaft. Bamberg 1890. 8°.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim 1890. N°. 4. 8°.

Correspondenz-Blatt des naturwissenschaftlichen Vereines. Regensburg 1885. Jahrg. 39. 8°.

Berichte des naturwissenschaftlichen Vereines. Regensburg 1890. Heft 2. 8°.

Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsass-Lothringens, herausgegeben von dem historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Strassburg 1890. Jahrg. VI. 8°.

Sitzungsberichte der philosophisch-philologischen und historischen Classe der kön. bair. Akademie der Wissenschaften. München 1890. Band II. Heft 2. 8°.

Chronik der kön. Universität Greifswald für das Jahr 1889—1890. Greifswald 1890. Neue Folge. Jahrg. 1. 8°.

E. Maass. De Aeschyli supplicibus commentatio. Gryphiswaldiae 1890. 4°.

F. Susemihl. De Theogoniae Orphicae forma antiquissima dissertatio. Gryphiswaldiae 1890. 4°.

R. Ahrens. Beiträge zur Casuistik von Psychosen nach Influenza. Greifswald 1890. 8°.

R. Bloch. Zur Therapie der Atresia ani. Greifswald 1890. 8°.

P. Bünger. Beitrag zur Behandlung der Pseudarthrose. Greifswald 1890. 8°.

St. Chachamowicz. Ein Fall von primärem Gallenblasenkrebs bei Steinbildung in der Gallenblase. Greifswald 1890. 8°.

R. Ebert. Zwei Fälle von eingreifenden Verletzungen des Auges durch stumpfe Gewalt. Greifswald 1890. 8°.

W. Fiege. Die Hasenscharten der Greifswalder chirurgischen Klinik von October 1885 bis April 1890. Greifswald 1890. 8°.

M. Filter. Ueber solitäre Lipome des Kniegelenkes und ihre Ursachen. Greifswald 1890. 8°.

M. Fuchs. Ein anaërober Eiterungserreger. Greifswald 1890. 8°.

G. Gaerber. Ueber die in der Greifswalder chirurgischen Klinik in dem Zeitraume vom October 1885 bis 1 April 1888 vorgekommenen Fälle von Herniotomie. Greifswald 1890. 8°.

A. Geppert. Uebersicht sämmtlicher in der hiesigen chirurgischen Klinik seit dem 30 October 1885 bis 15 Februar 1890 befindlichen Lupuskranken, ihre Behandlung und deren Erfolg. Greifswald 1890. 8°.

A. Gläntzer. Zur operativen Behandlung des Mastdarmvorfalles. Greifswald 1890. 8°.

P. Goehtz. Ein Fall von Struma maligna aus der hiesigen chirurgischen klinik. Greifswald 1890. 8°.

A. Gogrewe. Beiträge zur arzneilichen Wirkung des Methacetins. Greifswald 1890. 8°.

H. Göhlmann. Ein Beitrag zur Casuistik der diffusen chronisch-submucösen Laryngitis. Greifswald 1890. 8°.

G. Gropler. Ueber Carcinoma mammae. Greifswald 1890. 8°.

C. Grünwald. Ein Fall von Paramyoclonus multiplex. Greifswald 1890. 8°.

C. Gursky. Ein Fall von solitärem cysticercus cellulosae der regio cervicalis. Greifswald 1890. 8°.

L. Haeusser. Gicht und Psychose. Greifswald 1890. 8°.

B. Heintze. Ueber Todesursachen nach Laparatomie. Greifswald 1890. 8°.

A. Henschel. Ein Fall von Angioma arteriale racemosum. Greifswald 1890. 8°.

F. Herrmann. Zur Casuistik des chronischen Pemphigus. Greifswald 1890. 8°.

H. Holthausen. Ueber die Bedeckung grösserer Defekte durch frische, gestillte Hautlappen. Greifswald 1890. 8°.

R. Jacoby. Ueber dobbelseitige Myome der Eierstöcke bei gleichzeitigen Geschwulstbildung andrer Organe. Greifswald 1890. 8°.

P. John. Zur Behandlung der Bauchfelltuberkulose durch Laparotomie mit zwei Fällen. Greifswald 1890. 8°.

P. Kittlick. Ueber das Cholesteatom des Felsenbeins. Greifswald 1890. 8°.

P. Kluck. Die in den Jahren 1885—1888 in der chirurgischen Klinik zu Greifswald vorgekommenen Fälle von Osteomyelitis acuta. Greifswald 1889. 8°.

A. Kruse. Ueber eine einseitig gelagerte Hufeisenniere mit partieller Hydronephrose. Greifswald 1890. 8°.

R. Kubeler. Beitrag zur Pharmakodynamik des Antimonwasserstoffes. Greifswald 1890. 8°.

F. Landmann. Die physiologischen Anschauungen des Aristoteles. Greifswald 1890. 8°.

H. Meffert. Ein Fall von Incarceration des retroflectirten, graviden Uterus mit Abstossung der Blasenschleimhaut. Greifswald 1890. 8°.

R. Milbradt. Zur Casuistik der Verletzungen des Augapfels. Greifswald 1890. 8°.

W. Pajenkamp. Ueber Hemiatrophia facialis progressiva. Greifswald 1890. 8°.

J. Plesch. Ueber Fibromyome des graviden Uterus mit Berücksichtigung eines Falles. Greifswald 1890. 8°.

R. Schmidt. Ein Fall von Aneurysma der Arteria tibialis postica. Greifswald 1890. 8°.

O. von Rechenberg. Ueber das Verhalten des Anilins zur salzsauren Amidosalicylsäure. Greifswald 1890. 8°.

J. Richter. Ein Fall von Aneurysma der Anonyma und der Carotis communis dextra. Greifswald 1890. 8°.

J. Rumbold. Ein Beitrag zur Echinococcuserkrankung. Greifswald 1890. 8°.

C. Rüschhoff. Ueber Syphilome des musculus sternocleidomastoideus nebst zwei Fällen. Greifswald 1890. 8°.

M. Sandhop. Ein Fall von congenitaler Dextrocardie ohne Situs viscerum transversus der übrigen Organe. Greifswald 1890. 8°.

A. Schepers. Die operative Behandlung der Retroflexio uteri. Greifswald 1890. 8°.

W. Scheunemann. Ueber zirkuläre Darmnekrose. Greifswald 1890. 8°.

E. Schlange. Ueber Darmwandbrüche. Greifswald 1890. 8°.

H. Schlüter. Ein Myxom der Niere. Greifswald 1890. 8°.

G. Scholinus. Ueber primäre und secundäre Paranoia. Greifswald 1890. 8°.

H. Schreijer. Zwei Fälle von Actinomykose der Bauchdecken. Greifswald 1890. 8°.

O. Schünemann. Die Herniotomieen in der Greifswalder chirurgischen Klinik im Etatsjahre 1889/90. Greifswald 1890. 8°.

F. Schütte. Ein Fall von Spontangangrän bei Diabetes mellitus. Greifswald 1890. 8°.

R. Siewert. Ein Fall von Noma, aus der chirurgischen Klinik zu Greifswald. Greifswald 1890. 8°.

E. Simon. Beitrag zur Casuistik abscedierender Hirnentzündungen nach Otitis media purulenta chronica. Greifswald 1890. 8°.

E. Sprenger. Zur Behandlung der Tuberculose des Kehlkopfes. Greifswald 1890. 8°.

St. Szukalski. Ein Beitrag zur Casuistik der Atresia ani vaginalis. Greifswald 1890. 8°.

F. Thiele. Ein Fall von angeborenem Defekt der rechten Tibia. Greifswald 1890. 8°.

A. Voss. Ueber einen Fall von Diabetes insipidus mit Adipositas universalis. Greifswald 1890. 8°.

J. Wichmann. Spina bifida sacralis. Ein geheilter Fall. Greifswald 1890. 8°.

F. Wilda. Ueber die Anlegung einer Entero-Anastomose. Anklam 1890. 8°.

A. Wilke. Ein Fall von Sarcom der Nase. Greifswald 1890. 8°.

W. Wolff. Die in den Jahren 1885—1890 in der chirurgischen Klinik zu Greifswald wegen septischer Erkrankung ausgeführten Amputationen und Exarticulationen. Greifswald 1890. 8°.

J. ZIMNIK. Zur Casuistik des Ulcus septum nasi perforans. Greifswald 1890. 8°.

P. H. DAHMS. Ueber einige Eruptivgesteine aus Transvaal in Süd-Afrika. Stuttgart 1890. 8°.

H. HANNOW. Ueber Azobenzolsalicylsäure und einige Derivate derselben. Greifswald 1890. 8°.

A. BEHRENS. Die Endung des zweiten Person Pluralis des altfranzösischen Verbums. Greifswald 1890. 8°.

K. ERNST. Syntaktische Studien zu Rabelais. (Die Congruenz des Participii präteriti und der Gebrauch der Hülfsverba). Greifswald 1890. 8°.

B. KINDT. Die Katastrophe Ludovico Moro's in Novara im April 1500. Greifswald 1890. 8°.

R. WAGNER. Stellung des attributiven Adjectivs im altfranzösischen Prosatexten von Anfang des XIII bis Anfang des XV Jahrhunderts. Greifswald 1890. 8°.

LUXEMBURG.

DE COLNET-D'HUART. Essai d'une théorie mathématique de la lumière, de la chaleur, de l'émission et de l'absorption des radiations calorifiques et lumineuses. Luxembourg 1890. 8°.
(Extrait des Publications de l'Institut royal grand-ducal de Luxembourg).

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Rendiconti. Vol. VI. Fasc. 5—8. 4°.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1890. Vol. V. N°. 2—3. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1890. N°. 116—119. 8°.

Memorie del reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1890. Classe di Lettere. Vol. XVII. Fasc. 2. Vol. XVIII. Fasc. 2. 4°.

Inhoud, Vol. XVII. Fasc. 2:

G. Ascoli. Note irlandesi concernenti in ispecie il codice Ambrosiano.
C. Cantu. L'incivilimento dell'Africa.
G. Strambio. Da Legnano a Mogliano Veneto. — Un secolo di lotta contro la pellagra.

Vol. XVIII. Fasc. 2:

C. Cantu. La nuovo facciata del Duomo.
A. de Viti de Marco. Le teorie economiche di Antonia Serra.
C. Ferrini. Sulle fonti delle istituzioni di Giustiniano.

Rendiconti del reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano 1889. Serie 2. Vol. XXII. 8°.

Atti della fondazione scientifica Cagnola dalla sua istituzione in poi. Milano 1890. Vol. IX. 8°.

G. Scardovelli. Lucrezia Beniamini. Bologna 1890. 8°.

— — — — — Luigi, Alfonso e Rodolfo Gonzaga marchesi di Castelgoffredo. Bologna 1890. 8°.

———— Penombre medievali. Bologna 1890. 8°.

PORTUGAL.

J. Ramos-Coelho. Historia do Infante D. Duarte irmão de el-Rei D. João IV. Lisboa 1890. Tome II. 8°.

F. Gomes Teixeira. Curso de Analyse infinitesimal. Calculo differencial. Porto 1890. 2ª Ediçao. 8°.

ZWEDEN EN NOORWEGEN

Afbildningar af föremål i nordiska Museet. Stockholm 1890. N°. 2—3. (Island). 4°.

A. Hazelius. Ofverlatelsebref samt nordiska Museets stadgar. Stockholm 1890. 8°.

RUSLAND.

Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. 1890. Heft 33. 8°.

AZIË.

Journal of the College of Science, imperial University, Japan. Tokio 1890. Vol. III. Part 4. gr. 8°.

Transactions of the seismological Society of Japan. Yokohama 1890. Vol. XV. 8°.

AMERIKA.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1890. Vol. X. N°. 83. 4°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol. XV. N°. 17—21. 4°.

Report for the year 1889—90, presented by the board of managers of the Observatory of Yale University to the President and fellows. 8°.

Boletin mensual del Observatorio meteorologico del Colegio Pio de Villa Colon. Montevideo 1890. Ano 2. N°. 9—10. gr. 8°.

Boletin mensual. Mexico 1889. Tome II. N°. 12. 4°.

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior, agricultura e industrias. Mexico 1890. N°. 60—63. 8°.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 9. gr. 8°.

Anales de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1890. Tome XXX. Entr. 4—5. 8°.

Boletin de la Academia nacional de Ciencias en Cordoba. Buenos Aires 1889. Tome XI. Entr. 4. 8°.

AUSTRALIË.

Prodromus of the zoology of Victoria. Melbourne 1890. Decade XX. gr. 8°.

Memoirs of the geological Survey of N. S. W. Palaeontology. N°. 8. Sydney 1890. 4°.

Inhoud:

R. Etheridge. Contributions to a catalogue of works, reports, and papers on the anthropology, ethnology, and geological history of the Australian and Tasmanian aborigines. Part I.

Records of the geological Survey of N. S. Wales. Sydney 1890. Vol. II. Part 1. 4°.

Australian Museum. Report of trustees for the year 1889. fol.

AANGEKOCHT.

De Navorscher. Nijmegen 1890—1891. Nieuwe Serie. Jaarg. 23. Afl. 11—12. Jaarg. 24. Afl. 1. 8°.

Internationales Archiv für Ethnographie. Leiden 1890. Band III. Heft 5. 4°.

Table générale des comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXII à XCI. Paris 1888. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 268—281. 4°.

Journal des Savants. Paris, Octobre—Novembre 1890. 4°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1890. 2e Série. Tome V bis. 8°.

Annales des Sciences naturelles. Paris 1890. 7e Série. Botanique. Tome XI. N°. 4—6. Tome XII. N°. 1—3. 8°.

Revue générale de Botanique. Paris 1890. Tome II. N°. 23. 8°.

Bulletin des Sciences mathématiques. Paris 1890. 2e Série. Tome XIV. Octobre—Novembre. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1890. 6e Série. Tome XXI. Novembre—Décembre. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1890. 5th Series. Vol. XXX. N°. 186—187. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. VI. N°. 35—36. 8°.

The zoological Record for 1889. London 1890. Vol. XXVI. 8°.

Journal of the marine biological Association of the United Kingdom. London 1890. New Series. Vol. I. N°. 4. 8°.

Tschermak's mineralogische und petrographische Mittheilungen. Wien 1890. Neue Folge. Band XI. Heft 4—5. 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 2998—3008. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen 1890. N°. 20—24. 8°.

Veröffentlichungen des kais. Gesundheitsamtes. Berlin 1890. Jahrg. XIV. N°. 42—50. 4°.

Berichte der deutschen botanischen Gesellschaft. Berlin 1890. Jahrg. 8. Heft 8. 8°.

Archiv für Naturgeschichte. Berlin 1890. Jahrg. 56. Band I. Heft 3. 8°.

Annalen der Physik und Chemie. Leipzig 1890. Neue Folge. Band XLI. Heft 3—4. Beiblätter. Band XIV. St. 10—11. 8°.

Zeitschrift für physikalische Chemie. Leipzig 1890. Band VI. Heft 4—5. 8°.

Journal für Ornithologie. Leipzig 1890. 4te Folge. Band XVIII. Heft 2. 8°.

Dingler's polytechnisches Journal. Stuttgart 1890. Band CCLXXVIII. Heft 3—11. 8°.

Flora oder allgemeine botanische Zeitung. Marburg 1890. Neue Reihe. Jahrg. 48. Heft 5. 8°.

Tageblatt der 51 Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Cassel. 1878. 4°.

Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Lepzig 1890. Band I. 8°.

Bibliothèque universelle et Revue Suise. Lausanne 1890. 3e Période. Tome XLVIII. N°. 142. 8°.

Archives des Sciences physiques et naturelles. Genève 1890. 3e Période. Tome XXIV. N°. 10—11. 8°.

A. de Gubernatis. Dictionnaire international des écrivains du jour. Florence 1890. Livr. 17. (Spi-Vog.). gr. 8°.

TEN GESCHENKE OF IN RUIL ONTVANGEN IN DE MAAND JANUARI 1891.

NEDERLAND.

Lijst van boeken behoorende aan het Kon. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap. Amsterdam 1891. gr. 8°.

Revue internationale des falsifications. Amsterdam 1891. 4e Année. Livr. 6. 4°.

J. Lorié. Contributions à la géologie des Pays-Bas V. Les dunes intérieures, les tourbières basses et les oscillations du sol. Haarlem 1890. gr. 8°. (Extrait des Archives Teyler, 2e Série. Tome III).

Tijdschrift der Nederlandsche dierkundige Vereeniging. Leiden 1890. 2e Serie. Deel III. Afl. 1. 8°.

Recueil des travaux chimiques des Pays-Bas. Leide 1890. Tome IX. N°. 3—4. 8°.

Flora Batava. Leiden 1891. Afl. 291—292. 4°.

Onderzoek omtrent de afsluiting en droogmaking van de Zuiderzee, de Wadden en de Lauwerzee. Nota N°. V. De afsluiting Noord-Holland—Wieringen—Friesland en de droogmaking van het gedeelte der Zuiderzee binnen die afsluiting. Leiden z. j. fol.

Enquête, gehouden door de Staats-Commissie, benoemd krachtens de wet van 19 Januari 1890 (Staatsblad N°. 1) 1e Afdeeling. Openbare middelen van vervoer. A. Spoorwegen. ('s Gravenhage). 3e Afdeeling. Los- en laadwerk bij zeeschepen te Rotterdam en Amsterdam. Fol.

Verslag over den staat der gestichten voor krankzinnigen in de jaren 1878, 1879, 1880 en 1881 aan den Minister van Binnenlandsche Zaken, opgemaakt door de Inspecteurs voor het Staatstoezicht op de krankzinnigen en de krankzinnigengestichten in Nederland. 's Gravenhage 1890. 4°.

Tijdschrift van het koninklijk Instituut van Ingenieurs, 1890—1891. 's Gravenhage 1890. Afl. 1. 1ste gedeelte. Afl. 2. 2de gedeelte. 4°.

Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. 's Gravenhage 1891. 5de Reeks. Deel VI. Afl. 1. 8°.

J. Jacobs en J. J. Meijer. De Badoej's. 's Gravenhage 1891. gr. 8°.
(Uitgegeven door het koninklijk Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde v. N.-Indië.)

Berichten en Mededeelingen der Vereeniging voor Lijkverbranding. 1890. Jaarg. 15. N°. 4. 8°.

H. H Kuijper. De opleiding tot den dienst des woords bij de Gereformeerden. 's Gravenhage 1891. Deel I. 8°.

Algemeen Nederlandsch Familieblad. Tijdschrift voor geschiedenis, geslacht-, wapen-, zegelkunde, enz. 's Gravenhage 1890. Jaarg. VII. N°. 11—12. 4°.

J. W. Beck. Observationes criticae et palaeographicae ad Flori epitomam de Tito Livio. Groningae 1891. 4°.

Statistiek van het koninkrijk der Nederlanden. Staten van de in-, uit- en doorgevoerde voornaamste handelsartikelen gedurende de maand December 1890. 's Gravenhage 1891. Fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten langs de kusten van de Noordzee, de Zuiderzee en de Nederlandsche rivieren, waargenomen in de maand Juli 1890. Fol.

Verzamelingstabel der waterhoogten volgens de bladen der zelfregistreerende peilschalen, waargenomen in de maand Juli 1890. Fol.

NEDERLANDSCH OOST-INDIË.

Tijdschrift voor indische taal-, land en volkenkunde, uitgegeven door het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Deel XXXIV. Afl. 2. 8°.

Notulen van de algemeene- en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Batavia 1890. Deel XXVIII. Afl. 2. 8⁰.

A. G. VORDERMAN. De vogels van Billiton. Batavia 1890. 8⁰.
(Overgedrukt uit het Natuurkundig Tijdschrift voor N.-Indië. Dl. L.)

Annales du Jardin botanique de Buitenzorg. Leide 1891. Vol. IX. Part 2. gr. 8⁰.

BELGIË.

Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des beaux-Arts. Bruxelles 1891. Année 57. kl. 8⁰.

Bulletin de l'Académie royale de Médecine de Belgique. Bruxelles 1890. 4e Série. Tome IV. N⁰. 12. 8⁰.

Annales de la Société entomologique de Belgique. Bruxelles 1889. Tome XXXIII. gr. 8⁰.

Annales de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1889. Tome XXIV. gr. 8⁰.

Procès-Verbaux des séances de la Société royale malacologique de Belgique. Bruxelles 1890. Tome XIX. gr. 8⁰.

A. DE CEULENEER. Type d'Indien du nouveau monde représenté sur un bronze antique du Louvre. Bruxelles 1890. 8⁰.
(Extrait des Mémoires couronnés publiés par l'Académie royale de Belgique. Tome XLV.)

J. DE GEIJTER. Keizer Karel in het rijk der Nederlanden in middeleeuwschen versbouw. Gent 1891. 2de Uitgave. 8°.

FRANKRIJK.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris 1890. Tome CXI. N°. 25—26. Tome CXII. N°. 1—3. 4°.

Comptes rendus de l'Académie des Inscriptions et belles-Lettres. Paris 1890. 4e Série. Tome XVIII. Septembre—Octobre. 8°.

Bulletin de l'Académie de Médecine. Paris 1890. 3e Série. Tome XXIV. N°. 51—52. Tome XXV. N°. 1—3. 8°.

Compte-rendu sommaire des séances de la Société philomatique de Paris. 1890. N°. 5—6. 8°.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de la Société de Biologie. Paris 1890. 9e Série. Tome II. N°. 29—37. 8°.

Revue internationale de l'Electricité et des applications. Paris 1890. Tome XI. N°. 120. gr. 8°.

L'Electricien. Revue internationale de l'Electricité et de ses applications. Paris 1891. 2e Série. Tome I. N°. 1—3. gr. 8°.

Journal d'Hygiène. Paris 1890. 16e Année. Vol. XV. N°. 744—749. 4°.

Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux. Paris 1890. Année 1890. N°. 1—3. 8°.

GROOT-BRITTANNIË EN IERLAND.

Proceedings of the royal Society. London 1891. Vol. XLVIII. N°. 295. 8°.

Proceedings of the royal geographical Society. London 1891. New Series. Vol. XIII. N°. 1. 8°.

Monthly Notices of the royal astronomical Society. London 1891. Vol. LI. N°. 2. 8°.

Proceedings of the scientific meetings of the zoological Society. London 1890. Part 2—3. 8°.

The scientific papers of JAMES CLERK MAXWELL; edited by W. D. NIVEN. Cambridge 1890. 2 Vol. 4°.

OOSTENRIJK-HONGARIJE.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums. Wien 1890. Band V. N° 4. gr. 8°.

Verhandlungen des k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Wien 1890. Band XL. N°. 3—4. 8°.

Mittheilungen der anthropologischen Gesellschaft. Wien 1890. Band XX. Heft 3—4. 4°.

Abhandlungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kön.-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1890. 7e Folge. Band III. 4°.

Inhoud:

J. F. STUDNICKA. Resultate der ombrometrischen Beobachtungen in Böhmen während das Jahr 1888.

K. KÜPPER. Ueber die Curven C_p^n von n^{ter} Ordnung und dem Geschlecht $p > 1$, auf welchen die einfachsten Specialschaaren $g_2^{(1)}$, $g_3^{(1)}$ vorkommen.

————. Ueber geometrische Netze.

O. Feistmantel. Uebersichtliche Darstellung der geologisch-palaeontologischen Verhältnisse Süd-Afrika's. I Theil. Die Karoo-Formation und die dieselbe unterlagernden Schichten.

K. Küpper. Zur Theorie der algebraïschen Curven n^{ter} Ordnung: C^n.

Abhandlungen der Classe für Philosophie, Geschichte und Philologie der kön.-böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag 1890. 7e Folge. Band III. 4°.

Inhoud:

J. Kalousek. Documenta et registra civitatis Albae Aquae.

J. M. Klimesch. Urkunden und Regesten zur Geschichte des Gutes Poreschin im 14 und 15 Jahrhunderte.

A. Gindely. Waldsteins Vertrag mit dem Kaiser bei der Uebernahme des zweiten Generalats.

A. Ludwig. Ueber die Kritik der Rgveda-Textes.

Sitzungsberichte der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Prag 1890. Jahrg. 1889. Band II. Jahrg. 1890. Band I. 8°.

Sitzungsberichte der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Philosophisch-historische Classe. Prag 1890. Jahrg. 1889. 8°.

Jahresbericht der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für das Jahr 1889. Prag 1890. 8°.

Preisschriften herausgegeben von der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Praze 1890. N°. 3—4. gr. 8°.

Inhoud:

3. O. Feistmantel. Uhlonosné Utvary v Tasmanii.

4. F. Bayer. Osteologie Ropuch (Bufo Laur.).

J. H. Loewe. Die speculatieve Idee der Freiheit, ihre Widersacher, ihre practische Verwertung. Prag 1890. 8°.
(Herausgeg. v. d. kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften).

Regesta diplomatica nec non epistolaria Bohemiae et Moraviae. Pragae 1890. Pars 3. Ann. 1311—1333. 4°.

Lotos. Jahrbuch für Naturwissenschaft, herausgegeben von dem Verein »Lotos". Wien 1891. Neue Folge. Band Xl. 8°.

Casopis pro pestovani mathematiky a fysiky, vydava Jednota ceskych mathematiku. Praze 1890. Rocnik XX. Cislo 1—2. 8°.

Bulletin international de l'Académie des Sciences. Cracovie 1891. Année 1890. Décembre. 8°.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der kön. ungarischen geologischen Anstalt. Budapest 1890. Band VIII. Heft 9. Band IX. Heft 2. gr. 8°.

Földtani Közlony. (Geologische Mittheilungen). Zeitschrift der ungarischen geologischen Gesellschaft. Budapest 1890. Kötet XX. Füzet 5—12. gr. 8°.

DUITSCHLAND.

Sitzungsberichte der kön. preuss. Akademie der Wissenschaften. Berlin 1890. N°. 20—40. gr. 8°.

Abhandlungen des kön. preussischen meteorologischen Instituts. Berlin 1890. Band I. N°. 1—3. 4°.

Das kön. preussische meteorologische Institut in Berlin und dessen Observatorium bei Potsdam, herausgegeben von W. von Bezold. Berlin 1890. gr. 8°.

Wochenschrift für klassische Philologie. Berlin 1890. Jahrg. 7. N°. 46—52. 4°.

Archiv für pathologische Anatomie und Physiologie und für klinische Medicin. Berlin 1890. Band CXXII. Heft 2—3. 8°.

J. E. Alberts. Der heutige Stand der Krebsfrage. Berlin 1890. 8°.
(Sonder-Abdruck aus Deutsche Medizinal-Zeitung 1890. N°. 93.)

Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft. Frankfurt a. M. 1890. Band XVI. Heft 2. 4°.

Inhoud.

R. von Lendenfeld. Das System der Spongien.
F. Leydig. Das Parietalorgan der Amphibien und Reptilien.

Catalog der astronomischen Gesellschaft. 1ste Abtheilung. Catalog der Sterne bis zur neunten Grösse zwischen 80° nördlicher und 2° südlicher Declination für das Aequinoctium 1875. 3te Stück, Zone + 65° bis + 70° beobachtet auf der Sternwarte Christiania. Leipzig 1890. 4°.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Leipzig 1890. Jahrg. 25. Heft 3. 8°.

Zoologischer Anzeiger. Leipzig 1890. Jahrg. XIII. N°. 352. Jahrg. XIV. N°. 353—354. 8°.

Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Leipzig 1890. 2te Reihe. Theil IX. Heft 3—4. 8°.

Petermann's Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. Gotha 1890. Band XXXVI. N°. 11—12. Ergänzungsheft N°. 99. 4°.

Verhandlungen der kais. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1890. Band LIV. 4°.

Inhoud:

H. Simroth. Beiträge zur Kenntniss der Nacktschnecken.
R. Hintz. Ueber den mechanischen Bau des Blattrandes mit Berücksichtigung einiger Anpassungserscheinungen zur Verminderung der localen Verdunstung.
W. Kärnér. Ueber den Abbruch und Abfall pflanzlicher Behaarung und den Nachweis von Kieselsäure in Pflanzenhaaren.
C. von Gumppenberg. Systema geometrarum zonae temperatioris septentrionalis. Systematische Bearbeitung der Spanner der nördlichen gemässigten Zone. 3ter u. 4ter Theil.

Leopoldina. Amtliches Organ der kais. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Halle 1889. Heft 25. 4°.

Zeitschrift für Naturwissenschaften, im Auftrage des naturwissenschaftlichen Vereins für Sachsen und Thüringen. Halle a. S. 1890. 5te Folge. Band I. Heft 4—5. 8°.

Jahrbücher des Vereins von Alterthumsfreunden im Rheinlande. Bonn 1890. Heft LXXXIX. gr. 8°.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Wiesbaden 1890. Jahrg. 43. 8°.

Annalen des Vereins für Nassauische Altertumskunde und Geschichtsforschung. Wiesbaden 1890. Band XXII. gr. 8°.

Neue Annalen der kön. Sternwarte in Bogenhausen bei München. München 1890. Band I. 4°.

ITALIË.

Atti della reale Accademia dei Lincei. Roma 1890. Serie 4a. Rendiconti. Vol. VI. Fasc. 9—11. 4°.

Indici e Cataloghi. IV. I codici palatini. Vol. II. Fasc. 2. X. Manoscritti di Fillippo Pacini. Roma 1890. 8°.

Bollettino delle opere moderne straniere. Roma 1890. Vol. V. N°. 4. 8°.

Bollettino delle pubblicazioni italiane. Firenze 1890. N°. 120—121. 8°.

Memorie della reale Accademia delle Scienze. Torino 1890. Serie 2a. Tome XL. 4°.

Inhoud.

L. Camerano. I primi momenti della evoluzione dei Gordii.
A. Battelli. Sulle proprieta termiche dei vapori. Parte 1. Studio del vapore d'etere rispetto alle leggi di Boyle e di Gay Lussac.
T. Salvadori. Aggiunte alla Ornitologia della Papuasia e delle Molucche. Parte 1. Accipitres-Bittaci-Picarcae. Parte 2. Passeres.
L. Bellardi. I molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria. Parte VI. Volutidae, Marginellidae, Columbellidae; VII. Harpicae e Cassididae.
G. Loria. Il periodo aureo della geometria greca.
C. Guidi. Sulla teoria della trave continua.

Atti delle reale Accademia della Scienze. Torino 1890. Vol. XXV. Disp. 15a. 8°.

Atti del reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. Venezia 1889—90. Serie 7. Tomo I. Disp. 1—9. 8°.

Annali della reale Scuola normale superiore. Pisa 1889. Scienze fisiche e matematiche. Vol. VI. 8°.

Memorie di matematica e di fisica della Societa Italiana delle Scienze. Napoli 1890. Serie 3a. Tomo VII. 4°.

Inhoud:

F. Bassani. Colonna vertebrale di Oxyrhina Mantelli, Agassiz, scoperta nel calcare senoniano di Castellavazzo nel Bellunese.

L. Manfredi, G. Boccardi, G. Jappelli. Sul fermento inversivo nell' organismo animale.

M. Centonze. L'osso bregmatico (Antiepilepticum).

G. Torelli. Su qualche proprieta degl'.integrali definiti trinomii che soddisfano all' equazione differenziale lineare di 2° ordine, illustrata da Gauss.

G. Emery. Sulle curve funicolari sollecitate per modi scorrevoli.

R. de Paolis. Teorio dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire tra i loro elementi.

A. Scacchi. Appendice alla primo memoria sulla lava Vesuviana del 1631.

ZWITSERLAND.

Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft. Basel 1890. Band IX. Heft I. 8°.

DENEMARKEN.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Copenhague. 1890. Classe des Sciences. 6e Série. Vol. V. N°. 3. Vol. VII. N°. 1—2. 4°.

Inhoud. Vol. V. N° 3.

H. J. Hansen. Cirolanidie et familiae nonnullae propinquae Musei Hauniensis. (Résumé en français.)

Vol. VII.

1. J. P. Gram. Studier over nogle numeriske funktioner. (Résumé en français.)
2. K. Prytz. Methoder tel korte tiders, saerlig rotationstiders, udmaaling.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Copenhague. 1890. Classe des Lettres. 6e Série. Vol. I. N°. 1. 4°.

Inhoud:

V. Thomsen. Berøringer mellem de finske og de baltiske (litauisk-lettiske) sprog.

Oversigt over det kong. danske Videnskabernes Selskabs forhandlinger i aaret 1890. Kjobenhavn 1890. N°. 2. 8°.

K. Erslev. Aktstykker og Oplysninger til rigsraadets og staendermodernes historie i Kristian IV's tid. Kjobenhavn 1883—1890. Bd. I—III. 8°.

RUSLAND.

Annalen des physikalischen Central-Observatoriums. St. Petersburg 1890. Jahrg. 1889. Theil I. 4°.

Bulletins du Comité géologique. St. Petersburg 1890. Tome VIII. N°. 9—10. Tome IX. N°. 1—6. 8°.

Bibliothèque géologique de la Russie pour 1889. St. Pétersbourg 1890. 8°.

Bulletin de la Société impériale des Naturalistes. Moscou 1890. Année 1889. N°. 4. Année 1890. N°. 1. 8°.

Ofversigt af finska Vetenskaps-Societetens förhandlingar. Helsingfors 1889. N°. XXXI. 8°.

Bidrag till kännedom af finlands natur och folk. Helsingfors 1889. Heft 48. 8°.

RUMENIË.

Analele Academiei Romane. 1878—1888. Indice Alfabeticu alu cuprinsului. Vol. XI din Seria 1 si I—X din Seria 2. Bucuresci 1890. 4°.

Analele Academiei Romane. Bucuresci 1890. Seria 2. Tom. XI—XII. 4°.

Academia Romana. Lege, statute, regulamente si decisiuni 1890. Bucuresci 1890. 8°.

Etymologicum magnum Romaniae. Bucuresci 1890. Tom. II. Fasc. 3. (Ariciu-Astemat.) gr. 8°.

S. F. Marianu. Nunta la Romani. Studiu istoricoethnograficu comparativu. Bucuresci 1890. 8°.

AMERIKA.

Report of the Superintendent of the U. S. naval Observatory for the year ending 1890, June 30. Washington 1890. 8°.

Astronomical Papers prepared for the use of the American Ephemeris and nautical Almanac. Washington 1890. Vol. II. Part 5. Vol. IV. 4°.

U. S. Department of Agriculture. North American fauna. N°. 3—4. Washington 1890. 8°.

Proceedings of the U. S. National Museum. Washington 1890. Vol. XII. 8°.

Bulletin of the U. S. National Museum. Washington 1890. N°. 38. 8°.

Memoirs of the Boston Society of natural History. Boston 1890. Vol. IV. N°. 7—9. 4°.

Inhoud:

7. K. Miyabe. The flora of the Kurile Islands.
8. R. Tracy Jackson. Phylogeny of the Pelecypoda, the Aviculidae and their allies.
9. S. H. Scudder. New types of Cockroaches from the carboniferous deposits of the U. S. New carboniferous Myriapoda from Illinois. Illustrations of the carboniferous Arachnida of North America, of the orders Anthracomarti and Pedipalpi. The insects of the triassic beds of Fairplay, Colorado.

Proceedings of the Boston Society of natural History. Boston 1890. Vol. XXIV. Part 3—4. 8°.

Annals of the astronomical Observatory of Harvard College. Cambridge 1890. Vol. XXI. Part 2. Vol. XXIV. Vol. XXX. Part 1. 4°.

D. W. Baker. History of the Harvard College Observatory during the period 1840—1890. Cambridge 1890. 8°.

Proceedings of the Academy of natural Sciences. Philadelphia 1890. Part 2. 8°.

Journal of the American medical Association. Chicago 1890. Vol XV. N°. 24—26. Vol. XVI. N°. 1—3. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Baltimore 1890. Vol. X. N°. 84. 4°.

American Journal of Science. New-Haven 1890. 3d Series. Vol. XL. N°. 238. 8°.

A. H. Foord. Contributions to the micro-palaeontology of the Cambro-Silurian rocks of Canada. Ottawa 1883. 8°.
(Geological and natural History Survey of Canada).

Informes y documentos relativos a comercio interior y exterior, agricultura e industrias. Mexico 1890. N°. 64. 8°.

Boletin mensual del Observatorio meteorologica del Colegio pio de Villa Colon. Montevideo 1890. Ano II. N°. 11. gr. 8°.

Revista do Observatorio, publicaçao mensal do Observatorio do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 10—12. gr. 8°.

Boletim da Academia nacional de Medicina do Rio de Janeiro. 1890. Anno V. N°. 14. Anno VI. N°. 1—6. 4°.

Annaes da Academia de medicina do Rio de Janeiro. 1890. Serie 6. Tomo VI. N°. 1. 8°.

Annals de la Sociedad cientifica Argentina. Buenos Aires 1890. Tomo XXX. Entr. 6. 8°.

Boletin mensual del Museo de productos Argentinos. Buenos Aires 1890. Ano 3. N°. 31. 8°.

AANGEKOCHT.

J. G. Frederiks en F. J. van den Branden. Biographisch Woordenboek der Noord- en Zuidnederlandsche Letterkunde. Amsterdam 1890. Afl. 10. 8°.

Internationales Archiv für Ethnographie. Leiden 1890. Band III. Heft 6. 4°.

La grande Encyclopédie. Inventaire raisonné des Sciences, des Lettres et des Arts. Paris 1890. Livr. 282—287. 4°.

Journal des Savants. Paris, Décembre 1890. 4°.

Annales des Sciences naturelles. 7e Série. Zoologie. Paris 1890. Tome X. N°. 4—6. 8°.

Archives de Zoologie expérimentale et générale. Paris 1890. 2e Série. Tome VIII. N°. 4. 8°.

Revue générale de Botanique. Paris 1890. Tome II. N°. 24. 8°.

Annales de Chimie et de Physique. Paris 1891. 6e Série. Tome XXII. Janvier. 8°.

The London, Edinburgh, and Dublin philosophical Magazine and Journal of Science. London 1891. 5th Series. Vol. XXXI. N°. 188. 8°.

Annals and Magazine of natural History. London 1890. 6th Series. Vol. VII. N°. 37. 8°.

Journal of Anatomy and Physiology normal and pathological. London 1890. Vol. XXV. Part 1—2. 8°.

Dictionary of national Biography, edited by L. Stephen. London 1891. Vol. XXV. (Harris-Henry I.) 8°.

Astronomische Nachrichten. N°. 3009—3013. 4°.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1890. N°. 25—26. 1891. N°. 1. 8°.

Inscriptiones Graecae Siciliae et Italiae additis Graecis Galliae Hispaniae Britanniae Germaniae Inscriptionibus, edidit G. Kaibel. Berolini 1890. Fol.

